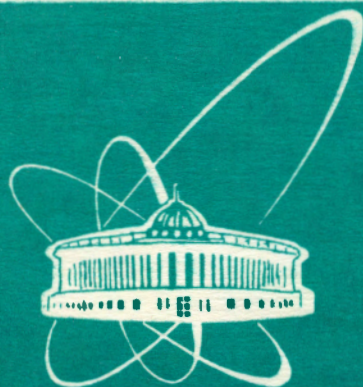


93-455



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P17-93-455

В.М.Дубовик, М.А.Марценюк\*, Н.М.Марценюк\*

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ  
АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУР

Направлено в «Журнал экспериментальной  
и теоретической физики»

---

\*Пермский государственный университет

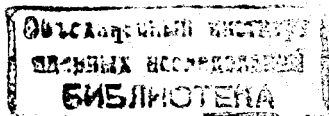
1993

## 1. Введение

В теории антиферромагнетизма в качестве параметра антиферромагнитного упорядочения обычно используется вектор антиферромагнетизма  $\vec{L}$ , который в случае двухподрешеточного антиферромагнетика равен разности магнитных моментов подрешеток:  $\vec{L} = \vec{M}_1 - \vec{M}_2$ . Однако этот параметр является ненаблюдаемой величиной, и поэтому переход из неупорядоченной фазы в антиферромагнитную выглядит как несобственный - в термодинамический потенциал обычно не включают слагаемые линейные по  $\vec{L}$ , которые описывали бы взаимодействие антиферромагнетика с внешним полем [1,2]. Исследование свойств антиферромагнетика производят лишь косвенно - по его взаимодействию с однородным магнитным полем, т.е. измеряя магнитную восприимчивость. В то же время магнитная подструктура антиферромагнетика представляет собой пространственно неоднородное распределение магнитных диполей, которые можно описать с помощью некоторого набора мультипольных моментов, как интегральных характеристик данного образца. В отличие от вектора антиферромагнетизма  $\vec{L}$ , мультипольные моменты являются наблюдаемыми величинами, причем каждый из них детализирует взаимодействие образца с неоднородным магнитным полем.

Цель настоящей работы — развить формализм мультипольного описания антиферромагнитного образца (и других систем с пространственно неоднородным распределением магнитных диполей), установить его связь с обычным описанием и его преимущество, как базового, при рассмотрении термодинамических свойств антиферромагнетиков. В работе показано, что измерение мультипольных моментов магнетиков (даже такой специфической конфигурации, как антиферромагнетик) позволяет получить об их текстуре полную информацию, которая доступна в рамках макроскопического подхода, точнее, при допустимости рассмотрения заданного физического объема методами классического электромагнетизма. Приведен ряд примеров.

Следует отметить, что последовательное описание обменных магнетиков с помощью системы мультиполей было предложено в работах Андреева и Марченко [3,4], однако в этих работах главным образом исследуется спектр возбуждения спиновых волн и рассматривается взаимодействие магнетиков только с однородным магнитным полем. Способы мультипольного описания состояний произвольной системы диполей и ее взаимодействия с неоднородным внешним



полем подробно обсуждаются в работе [5]. В данной работе рассмотрение антиферромагнетиков проводится на основе подходов, развитых в [3-5]. Важную роль в мультипольном описании играют моменты тороидного семейства [6-8], которое было найдено и подробно изучено в работах [9-10]. Если магнетик обладает дипольным тороидным моментом, то он может реагировать на переменное электрическое поле или сам его индуцировать. Отметим также, что аналогичное явление - влияние переменного магнитного поля на систему электрических диполей - может наблюдаться, например, в антисегнетоэлектриках, а также и в сравнительно недавно исследованных так называемых аромагнетиках [11, 12].

План изложения работы следующий. Во втором разделе обсуждается формализм мультипольного описания состояний различных магнетиков. Сначала в качестве исходных величин используются магнитные моменты подрешеток. Известно, что мультипольные моменты могут зависеть от выбора начала координат, в данном случае от расположения "центров" подрешеток, которые можно выбирать произвольным образом. Для устранения этого произвола нужно исходить из понятия так называемой независимой области магнитной структуры (об использовании этого понятия в кристаллографии см. [13]), которая в конечном счете определяется формой образца. Зная независимую область, можно найти мультипольные моменты магнетиков. На большом количестве примеров показано, что многие антиферромагнитные структуры описываются мультипольными моментами: в магнитной среде - скалярным, тороидным и квадрупольным, которые наиболее характерны для структуры с антиферромагнитными свойствами. В этом же разделе рассматривается мультипольное описание магнетиков в обменном приближении. Как показано в работах [3,4], в этом случае равновесное состояние магнетика задается не более чем тремя величинами - так называемыми векторами антиферромагнетизма. В рамках симметричного анализа в работе устанавливается связь между этими векторами и мультипольными моментами как для "бесконечного" кристалла, так и для кристалла конечных размеров, но имеющего симметричную форму "рационального" многогранника [13].

В третьем разделе обсуждается взаимодействие магнетиков с внешним неоднородным полем. Показано, что градиенты эффективного поля на образце определяются не только полем источника, но и пространственным расположением спинов. В частности, оказывается, что эффективное поле может иметь вихревую и потенциальную составляющие (эффективные ротор и дивергенцию магнитного поля) даже в том случае, когда внешнее поле их не имеет. В этом же разделе рассматриваются поля, создаваемые самими мультипольными моментами - квадрупольным, тороидным и скалярным, что позволяет установить способ их регистрации. Кратко обсуждается динамика магнитных мультипольных моментов на основе обменного приближения.

Общий результат работы сводится к тому, что мультипольные моменты дают универсальный способ описания магнитных структур в терминах величин, непосредственно измеримых в опыте. Постановка экспериментов по определению мультипольных восприимчивостей - в частности, тороидной, квадруполь-

ной и "скалярной", исследование процессов перемагничивания магнетиков неоднородным магнитным полем, условий формирования мультипольных доменных структур, анализ мультипольных вкладов в спектры спиновых волн - все это позволит получить более глубокое понимание физики магнитного состояния и расширит возможные области приложения магнитных материалов.

## 2. Мультипольное описание состояний магнетиков

### 2.1. Микроскопическая конфигурация моментов

Будем представлять себе магнетик как систему  $N$  спинов, расположенных в узлах кристаллической решетки  $\vec{r}_a$ :  $\vec{S}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ), взаимодействие которых между собой и с внешним полем описывается гамильтонианом  $\hat{H}(1, 2, \dots, N)$ . Зная решения уравнения Шредингера для этой системы и учитывая тепловые возбуждения, можно найти (хотя бы в принципе) точную равновесную матрицу плотности  $\hat{\rho}(1, 2, \dots, N)$ , с помощью которой, в свою очередь, находятся средние значения любой величины  $f$ :

$$\langle f \rangle = Sp f \hat{\rho}. \quad (2.1)$$

Далее нас будут интересовать средние значения операторов спина  $\langle \vec{S}_a \rangle \equiv \vec{m}_a$

$$\vec{m}_a = Sp \vec{S}_a \hat{\rho}(1, 2, \dots, a, \dots, N). \quad (2.2)$$

Принимая систему единиц, в которой гиромагнитное отношение  $\gamma$  и постоянная Планка  $\hbar$  равны единице ( $\gamma = 1$ ,  $\hbar = 1$ ), мы будем далее отождествлять вектор  $\vec{m}_a$  с магнитным моментом частицы в точке  $\vec{r}_a$ . Отметим, что при точном задании матрицы плотности  $\hat{\rho}$  значения магнитных моментов  $\vec{m}_a$  также являются точными. Из определения (2.2) следует, что поскольку компоненты оператора спина принимают ограниченный ряд значений в интервале от  $-s$  до  $s$ , каждая из компонент вектора  $\vec{m}_a$  не может быть больше чем  $s$ , то есть вектор  $\vec{m}_a$  всегда находится внутри сферы ограниченного радиуса:

$$m_a^2 \leq s. \quad (2.3)$$

В случае спина  $s = 1/2$  каждый вектор  $\vec{m}_a$  полностью описывает одночастичное состояние  $a$ -го спина. Действительно, одночастичная матрица плотности, определенная соотношением

$$\hat{\rho}(1) = Sp_{2, \dots, N} \hat{\rho}(1, 2, \dots, N), \quad (2.4)$$

в этом случае может быть представлена в виде [14]:

$$\hat{\rho}(1) = \frac{1}{2}(\hat{1} + 4\vec{m}_1 \hat{S}_1) \quad (2.5)$$

(и аналогично для спина с любым другим номером  $a$ ). Если же  $s > 1/2$ , то в выражении (2.5) кроме  $\hat{S}_a$  следует учитывать также и другие неприводимые тензорные операторы (более высокого ранга), составленные из компонент оператора  $\hat{S}_a$ . Здесь для простоты мы ограничимся случаем  $s = 1/2$ . Таким образом, каждому состоянию спиновой системы соответствует некоторое распределение в пространстве векторов  $\vec{m}_a$ , то есть некоторая заданная векторная функция координат  $\vec{m}(\vec{r}_a) = \vec{m}_a$ , принимающая значения на дискретном множестве точек  $\vec{r}_a$ . Очевидно, что обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо, то есть  $\vec{m}(\vec{r}_a)$  не определяет состояния системы. Тем не менее, в приближенном описании, например, в приближении самосогласованного поля, может быть найдено состояние, соответствующее данному распределению  $\vec{m}(\vec{r}_a)$ .

## 2.2. Магнитные подрешетки

Функция  $\vec{m}(\vec{r}_a)$  задает магнитную конфигурацию магнетика микроскопически. С макроскопической точки зрения состояния образца как целого описываются некоторыми суммами от  $\vec{m}_a$  по выбранной системе точек. В периодической решетке распределение векторов  $\vec{m}_a$  по пространству также будет периодическим, поэтому мы можем выделить  $n$  подсистем точек, состоящих из  $N_1, N_2, \dots, N_n$  спинов соответственно (причем  $\sum_k N_k = N$ ), в которых магнитные моменты одинаковы (то есть равны по величине и параллельны между собой) и находятся в эквивалентных узлах кристаллической решетки:  $\vec{m}_a = \vec{m}_b = \vec{m}_k$  ( $a, b \in N_k$ ). Это дает возможность ввести суммарный магнитный момент  $k$ -ой подсистемы  $\vec{M}_k$  (здесь  $k = 1, 2, \dots, n$ ), а также найти ее геометрический центр  $\vec{R}_k$ , с которым естественно связывается вектор  $\vec{M}_k$ :

$$\vec{M}_k = N_k \vec{m}_k; \quad \vec{R}_k = \frac{1}{N_k} \sum_a \vec{r}_a \quad (a \in N_k). \quad (2.6)$$

Таким образом, мы разбиваем магнетик на  $n$  подсистем (подрешеток) "вдвинутых" одна в другую. Моменты  $\vec{M}_k$  - это точное определение того, что для данного образца мы будем понимать под моментами подрешеток. Из определения (2.6) можно заключить, что расстояние между точками привязки моментов  $\vec{R}_k$ , то есть модули разностей  $|\vec{R}_i - \vec{R}_k|$ , по порядку величины равны постоянной магнитной решетки  $a$

$$|\vec{R}_i - \vec{R}_k| \sim a. \quad (2.7)$$

Значения векторов  $\vec{M}_k$ , вообще говоря, зависят от формы образца и от того, где именно проходит граница образца по отношению к узлам кристаллической решетки. Ради формальной строгости оговорим, что образец имеет достаточно малые размеры и его поверхность не имеет никаких "диких" свойств. Далее, как это обычно делается, мы будем пренебрегать поверхностными эффектами, связанными с нарушениями периодического распределения намагниченности на границе. В обычном определении магнитных моментов подрешеток их пространственное расположение относительно друг друга (то есть точки "привязки"

$\vec{R}_k$ ) определяются неоднозначно. Дело в том, что и сами элементарные ячейки кристалла определяются неоднозначно - всегда можно выбрать другой набор базисных векторов решетки Браве с тем же объемом элементарной ячейки (см., например, [15], п.129). Если же рассматривается образец заданной формы, то для него указанная неоднозначность устраняется тем, что расположение границ образца относительно атомных плоскостей фиксирует также и определенный выбор базисных векторов. Из этих рассуждений следует, что два разных по форме образца одного и того же магнетика будут описываться в общем случае различными совокупностями векторов  $\vec{M}_k$  и  $\vec{R}_k$ . Для иллюстрации на рис. 1 показаны два образца одного и того же антиферромагнетика (рис. 1 (а) и 1 (в) соответственно). С помощью формул (2.6) для данного случая не сложно найти моменты подрешеток  $\vec{M}_k$  и векторы  $\vec{R}_k$ , которые изображены на рис. 1 (б, г) и, как видно из рисунка, векторы  $\vec{R}_k$  отличаются друг от друга.

Будем считать, что рассматриваемая магнитная структура инвариантна относительно некоторой группы трансляций  $\mathcal{G}$ . Если выбрать какой-нибудь узел решетки  $a$  с данным значением спина  $\vec{m}_a$ , то под действием всех операций симметрии группы  $\mathcal{G}$  он преобразуется в эквивалентные узлы. Таким образом мы получим орбиту точки  $a$  относительно группы  $\mathcal{G}$ . Выбрав по одной точке из всех возможных орбит, мы получим таким образом множество точек, которое называется *независимой областью* группы (об использовании этого понятия в кристаллографии см., например, [13]). Следует отметить, что указание независимой области и векторов трансляции решетки полностью фиксирует магнитную структуру кристалла [16]. Так как в независимую область можно включить любую точку орбиты, то для каждой группы  $\mathcal{G}$  существует бесконечно много способов выбора этой области. Из данных выше определений очевидно,

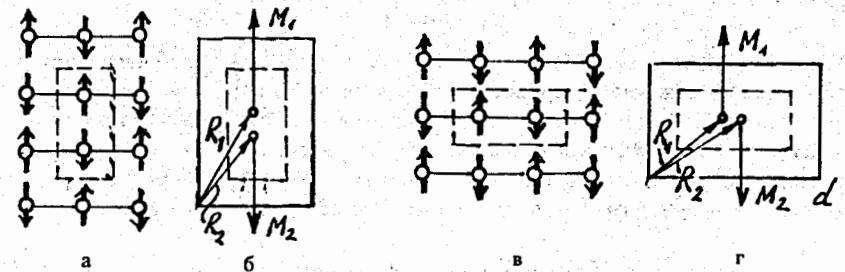


Рис.1. Расположение моментов магнитных подрешеток в антиферромагнетике в зависимости от формы образца. Пунктиром показаны независимые области.

что все центры магнитных подрешеток  $\vec{R}_k$  лежат в некоторой независимой области группы трансляций  $\mathcal{G}$ , а векторы  $\vec{M}_k$  параллельны магнитным моментам атомов, лежащих в независимой области. Для образцов антиферромагнетика,

показанных на рис. 1 (а, в), независимые области выделены пунктиром. Сравнивая рис. 1 (а, в) с рис. 1 (б, г) соответственно, на этом примере можно убедиться в справедливости сделанных утверждений. Таким образом, независимая область, как и центры подрешеток, фиксируется расположением границ образца относительно узлов кристаллической решетки. В дальнейшем, при рассмотрении примеров магнитных структур, мы будем использовать те или иные независимые области решетки, предполагая, что форма кристалла подобрана соответственно выбранной области.

### 2.3. Мультипольные моменты

Для описания магнитной структуры образца и его взаимодействия с внешним полем далее будут использоваться мультипольные моменты, из которых наиболее важными являются магнитный дипольный момент

$$\vec{M} = \sum_a \vec{m}_a = \sum_k \vec{M}_k, \quad (2.8)$$

тороидный и квадрупольный моменты в магнитной среде

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \sum_a [\vec{r}_a \vec{m}_a] = \frac{1}{2} \sum_k [\vec{R}_k \vec{M}_k],$$

$$Q_{ik} = \sum_a \{ \vec{r}_a \vec{m}_a \}_{ik} = \sum_k \{ \vec{R}_k \vec{M}_k \}_{ik}, \quad (2.9)$$

а также скалярный момент ("магнитодипольный заряд")

$$q = \sum_a (\vec{r}_a \vec{m}_a) = \sum_k (\vec{R}_k \vec{M}_k). \quad (2.10)$$

Мультипольные моменты более высокого ранга являются неприводимыми тензорами, составленными из произведений векторов  $\vec{R}_k$  и  $\vec{M}_k$  (см. подробнее [5]). В соотношениях (2.8)-(2.10) круглые, квадратные и фигурные скобки использованы для обозначения соответственно скалярного, векторного и тензорного произведений векторов. Под тензорным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  здесь понимается неприводимый тензор 2-ранга, составленный из их компонент

$$\{ \vec{a} \vec{b} \}_{ik} = \frac{1}{2} (a_i b_k + a_k b_i - \frac{2}{3} (\vec{a} \vec{b}) \delta_{ik}), \quad (2.11)$$

На рис.2. показаны примеры распределений магнитных диполей, описываемых моментами  $\vec{M}$ ,  $\vec{T}$ ,  $Q$  и  $q$ , для четырехподрешеточного магнетика. На рис. 2а момент  $\vec{M}$  описывает структуру с параллельной ориентацией моментов подрешеток. Тороидный момент  $\vec{T}$  соответствует вихревой структуре (рис. 2б). Скалярный момент  $q$  является интегральной мерой "источника" или "стока" векторного поля диполей (рис. 2в). Квадрупольный момент  $Q$  описывает симметричное "течение" векторного поля (рис. 2г). На этом же рисунке справа (рис. 2д)

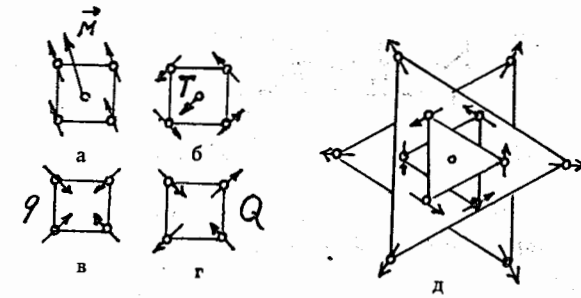


Рис.2. Примеры распределений магнитных диполей, описываемых мультипольными моментами.

показана магнитная структура граната  $Mn_3Al_2Si_3O_{12}$  [16]. Из сравнения этой структуры с изображениями на рис. 2(а-д) можно видеть, что она обладает скалярным и тороидным моментами. Как показано в работе [5], конечная система диполей (роль которой в данном случае играет совокупность моментов подрешеток  $\vec{M}_k$ ) описывается конечным числом независимых мультипольных моментов, причем выбор самих независимых мультиполей неоднозначен - в конечном счете он фиксируется только физической постановкой задачи.

Рассмотрим в качестве примера двухподрешеточный антиферромагнетик, описываемый всего двумя векторами  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$ , "привязанными" соответственно к точкам  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$ , причем  $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$  (рис.3). Вектор антиферромагнетизма  $\vec{L} = \vec{M}_1 - \vec{M}_2$  хотя и показывает ориентацию моментов  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$ , но не описывает их взаимного пространственного расположения. Более последовательно для описания конфигурации ввести мультипольные моменты. В рассматриваемом примере суммы по  $k$  в выражениях (2.8)-(2.10) будут содержать только по два слагаемых. Так как в данном случае суммарный магнитный момент системы  $\vec{M}$  равен нулю, то моменты  $\vec{T}$ ,  $Q$  и  $q$  не зависят от выбора начала координат, поэтому удобно считать начало координат расположенным в центре отрезка 1-2, соединяющего точки 1 и 2 на рис.3, то есть мы считаем, что  $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$ . В результате имеем :

$$\vec{T} = \frac{1}{4} [\vec{R} \vec{L}]; \quad Q = \frac{1}{2} \{ \vec{R} \vec{L} \}; \quad q = \frac{1}{2} (\vec{R} \vec{L}), \quad (2.12)$$

где  $\vec{R} = \vec{R}_1 = \vec{R}_2$ . Ясно, что из девяти компонент  $\vec{T}$ ,  $Q$  и  $q$  (напомним, что тензор 2-ранга  $Q$  - неприводимый и поэтому он имеет всего пять независимых компонент) только три являются независимыми. Выберем в качестве независимых моментов, например,  $q$ ,  $T_x$  и  $T_y$  (ось  $z$  считаем направленной по  $\vec{R}$ ). Учитывая, что согласно (2.12)  $T_x = -\frac{1}{4} R L_y$ ,  $T_y = \frac{1}{4} R L_x$ ,  $q = \frac{1}{2} R L_z$ , мы можем выразить компоненты вектора  $\vec{L}$  через выбранные моменты  $T_x$ ,  $T_y$  и  $q$  :

$$L_x = 4T_y/R, \quad L_y = -4T_x/R, \quad L_z = 2q/R, \quad (2.12')$$

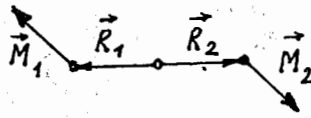


Рис.3. Моменты подрешеток и центры их "привязки" для двухподрешеточного антиферромагнетика.

что дает возможность, в свою очередь, выразить квадрупольный момент  $Q$ , а также все мультиполи более высокого ранга через независимые. Как уже было отмечено во Введении, переход к мультипольному описанию имеет то преимущество, что в отличие от вектора антиферромагнетизма мультипольные моменты могут быть непосредственно измерены на опыте.

#### 2.4. Примеры мультипольного описания магнитных структур

Для выяснения особенностей мультипольного описания магнетиков мы рассмотрим несколько характерных примеров. Как известно, все магнитные структуры разделяются на коллинеарные и неколлинеарные. В первом случае магнитные моменты всех подрешеток данного магнетика  $\vec{M}_k$  параллельны друг другу и поэтому любой из них можно записать в виде

$$\vec{M}_k = M_k \vec{n}, \quad (2.13)$$

где единичный вектор  $\vec{n}$  направлен по "оси коллинеарности". Подставляя  $\vec{M}_k$  в виде (2.13) в формулы (2.8)-(2.10), получаем следующие значения выделенных нами моментов

$$\vec{M} = M \vec{n}; \quad \vec{T} = \frac{1}{2} [\vec{R} \vec{L}]; \quad Q = \{\vec{R} \vec{L}\}; \quad q = (\vec{R} \vec{L}), \quad (2.14)$$

где введены обозначения

$$M = \sum_k M_k; \quad \vec{R} = \sum_k M_k \vec{R}_k / \sum_k |M_k|; \quad \vec{L} = \sum_k |M_k| \vec{n}. \quad (2.15)$$

Величина  $M$  - суммарный магнитный момент образца, вектор  $\vec{L}$  можно назвать обобщенным вектором антиферромагнетизма, а величина  $\vec{R}$  интерпретируется как расстояние между центрами подрешеток с положительными и отрицательными значениями  $M_k$ . Если обозначить посредством  $M_k^+, \vec{R}_k^+$  и  $M_k^-, \vec{R}_k^-$  положительные и отрицательные проекции  $\vec{M}_k$  на ось коллинеарности  $\vec{n}$  и их радиус-векторов, то вектор  $\vec{R}$  можно записать в виде

$$\vec{R} = \vec{R}^+ - \vec{R}^-; \quad \vec{R}^+ = \sum_k M_k^+ \vec{R}_k^+ / \sum_k M_k^+; \quad \vec{R}^- = \sum_k M_k^- \vec{R}_k^- / \sum_k M_k^-. \quad (2.16)$$

То есть величины  $M_k^\pm$  играют роль положительных и отрицательных "магнитодипольных зарядов" на атомах, а вектор  $\vec{R}$  направлен от центра отрицательных "зарядов" - к центру положительных.

Сравнивая формулы (2.14) и (2.12), можно видеть, что мультипольные моменты коллинеарной структуры выражаются через  $\vec{R}$  и  $\vec{L}$  аналогично моментам двухподрешеточного антиферромагнетика. Поэтому, если не учитывать высших мультиполей, то можно считать, что любой коллинеарный магнетик эквивалентен некоторому двухподрешеточному магнетик. Следует отметить, что во многих коллинеарных структурах моменты подрешеток  $M_k$  равны между собой по абсолютной величине. В этом случае совпадение коллинеарной структуры и некоторого эффективного двухподрешеточного магнетика можно считать буквальным, так как в обоих случаях независимыми величинами являются всего два вектора - вектор намагничения и вектор антиферромагнетизма.

Прежде чем переходить к непосредственному анализу конкретных магнитных структур, укажем простой способ нахождения независимых областей по заданному расположению спинов в периодической решетке. Сначала следует выявить периоды трансляции, относительно которых симметрична рассматриваемая структура (при этом учитывается не только пространственное расположение атомов, но и величины их магнитных моментов). Затем нужно найти узлы, которые совмещаются между собой при трансляциях (эквивалентные узлы) и которые, следовательно, лежат на одной орбите. Если выбрать по одному представителю от каждой орбиты, то мы и получим независимую область данной магнитной структуры. При этом нужно следить за тем, чтобы объем независимой области не превышал объема элементарной ячейки. Рассмотрим для при-

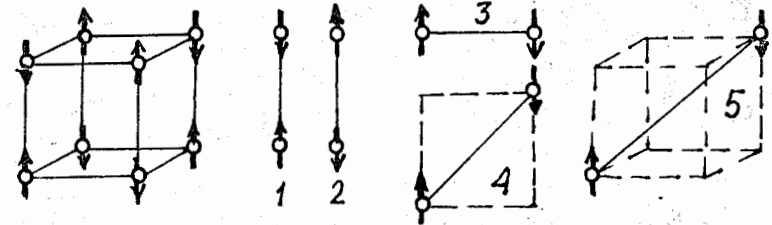


Рис.4. Независимые области 1-5 коллинеарного антиферромагнетика в простой кубической решетке.

мера антиферромагнетик  $RbMnF_3$ . Магнитные ионы марганца упорядочены в простой кубической решетке (рис.4). Легко видеть, что эта структура инвариантна относительно трансляций в направлениях диагоналей квадратов  $[110]$ ,  $[101]$  и  $[011]$ . Поэтому в данном случае мы имеем две орбиты - к одной относятся все атомы со спином вверх, а к другой - со спином вниз. Выбирая по одному атому из каждой орбиты, мы получаем различные независимые области. Топологически неэквивалентные области показаны на рис.4 справа. Первая и вторая

из них обладают только скалярным моментом  $q$ , причем у первой - "магнитный заряд" отрицателен ( $q < 0$ ), а у второй - положителен ( $q > 0$ ). Третья область обладает только тороидным моментом  $\vec{T}$ , а четвертая и пятая - как скалярным, так и тороидными моментами.

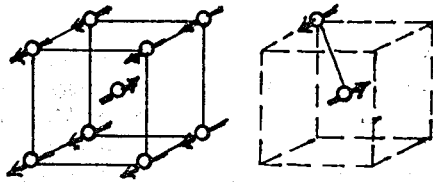


Рис.5. Антиферромагнитная структура ОЦК.

Рассмотрим теперь структуру с коллинеарным антиферромагнитным упорядочением в объемноцентрированной кубической (ОЦК) решетке (рис.5). Эта структура инвариантна относительно трансляций вдоль ребер куба (направления  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$ ). Все атомы в вершинах куба принадлежат одной орбите, а центральный атом - другой. Поэтому в независимую область может входить центральный атом и один из атомов в вершине куба. Одна из независимых областей этой структуры показана справа на рис.5; легко видеть, что эта структура обладает скалярным и тороидным моментами.

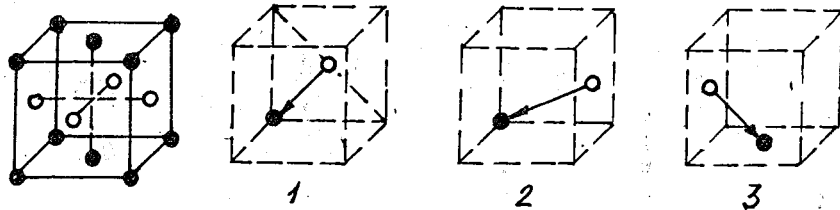


Рис.6. Антиферромагнитная структура ГЦК1.

Перейдем к анализу антиферромагнитных структур в гранецентрированной кубической решетке (для краткости ГЦК-решетка). Структура ГЦК1 показана на рис.6 слева. Для упрощения рисунков здесь и далее атомы с антипараллельной ориентацией спинов изображаются темными и светлыми кружками. В случае ГЦК1 векторы трансляций имеют направления  $[001]$ ,  $[110]$  и  $[\bar{1}10]$ . Поэтому атомы на верхней и нижней гранях принадлежат одной орбите, а центральные атомы боковых граней - другой. Примеры независимых областей показаны на рис. 6 справа. Более сложные независимые области имеют другие ГЦК-решетки антиферромагнетиков. В качестве примера на рис.7 показана структура ГЦК3А.

Векторы трансляций направлены по ребрам прямоугольного параллелепипеда, причем в горизонтальном направлении период равен удвоенной длине ребра куба. Независимая область содержит восемь атомов. Один из примеров области показан на рис.7 справа. С помощью формул (2.16) для этой структуры можно найти координаты центра положительных и центра отрицательных ориентаций моментов (темные и светлые кружки на рис.7 справа):  $\vec{R}^+ = (1/8, 3/8, 3/4)$  и  $\vec{R}^- = (3/8, 1/8, 3/4)$ . Отсюда следует, что вектор  $\vec{R}$  лежит в плоскости  $xz$ . Отметим, что все другие независимые области можно "генерировать", исходя из области, показанной на рис.7, путем сдвига любой из атомов в эквивалентную позицию с помощью известных векторов трансляции (не забывая, однако, что объем области не должен превышать объема элементарной ячейки).

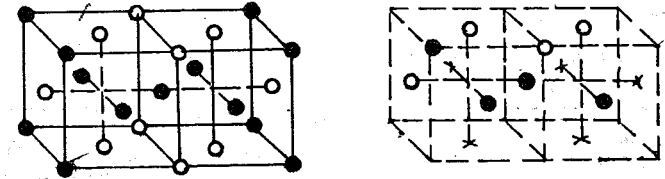


Рис.7. Антиферромагнитная структура ГЦК3А.

Перейдем теперь к рассмотрению неколлинеарных структур. Любую такую структуру мы можем представить как суперпозицию некоторого (небольшого) числа коллинеарных структур. Пусть  $\vec{n}_A$  - оси коллинеарности этих структур,  $\vec{M}_{kA}$  и  $\vec{R}_{kA}$  - намагниченности подрешеток, относящихся к А-ой структуре, и их центры. Применяя к каждой из них соотношения (2.14), для суммарных мультипольных моментов получим выражения:

$$\vec{M} = \sum M_A \vec{n}_A; \quad \vec{T} = \frac{1}{2} \sum_A [\vec{R}_A \vec{L}_A]; \quad Q = \sum_A \{\vec{R}_A \vec{L}_A\}; \quad q = \sum (\vec{R}_A \vec{L}_A), \quad (2.17)$$

где величины  $M_A$ ,  $\vec{R}_A$  и  $\vec{L}_A$  определены соотношениями, аналогичными выражениям (2.15) с тем отличием, что там следует заменить  $\vec{n}$ ,  $\vec{M}_k$  и  $\vec{R}_k$  на  $\vec{n}_A$ ,  $\vec{M}_{kA}$  и  $\vec{R}_{kA}$  соответственно, а суммирование проводить только по подрешеткам данной коллинеарной структуры.

Рассмотрим в качестве примера структуру гранатов  $Ca_3SbSnFe_3O_{12}$ ,  $Na_3Te_2Fe_3O_{12}$  и  $YCa_2Zr_2Fe_{2,75}G_{0,25}O_{12}$ . Далее для краткости мы будем обозначать их символами  $G1$ ,  $G2$  и  $G3$  соответственно. В этих веществах независимые области содержат по 12 магнитных ионов железа, которые занимают в структуре граната подрешетки 24(d). Кубические координаты атомов в независимой области, показанной на рис. 8, имеют значения:

$$\begin{aligned} &1(3/8 \ 0 \ 1/4), 2(1/4 \ 3/8 \ 0), 3(0 \ 1/4 \ 3/8), 4(1/8 \ 0 \ 3/4), \\ &5(3/4 \ 1/8 \ 0), 6(0 \ 3/4 \ 1/8), 7(7/8 \ 0 \ 1/4), 8(1/4 \ 7/8 \ 0), \\ &9(0 \ 1/4 \ 7/8), 10(5/8 \ 0 \ 3/4), 11(3/4 \ 5/8 \ 0), 12(0 \ 3/4 \ 5/8). \end{aligned}$$

Векторы трансляций направлены по осям  $x, y, z$ . По данным нейтрографических исследований (данные заимствованы из монографий [16]) все ионы железа разделяются на три коллинеарные группы A(1,4,7,10), B(2,5,8,11) и C(3,6,9,12) (здесь в скобках указаны номера атомов на рис. 8), которые лежат в координатных плоскостях. Для граната G1 оси коллинеарности указанных групп атомов имеют направления  $\vec{n}_A = [11\bar{1}], \vec{n}_B = [\bar{1}1\bar{1}], \vec{n}_C = [\bar{1}\bar{1}1]$ , а проекции моментов атомов каждой группы на соответствующие оси равны между собой. Гранат G2 отличается от граната G1 только тем, что оси коллинеарности тех же групп атомов имеют направления  $\vec{n}_A = [01\bar{1}], \vec{n}_B = [10\bar{1}], \vec{n}_C = [1\bar{1}0]$ . У граната G3 оси коллинеарности направлены так же, как и у граната G2, но моменты в группах A, B, C попарно антипараллельны (на рис. 8(b) они отмечены темными и светлыми кружками). На рис.8 показаны вычисленные по формулам (2.16) радиусы-векторы центров групп  $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{R}_C$ : на рис.8(a) - для G1 и G2 (для которых они совпадают), а на рис.8(б) - для G3.

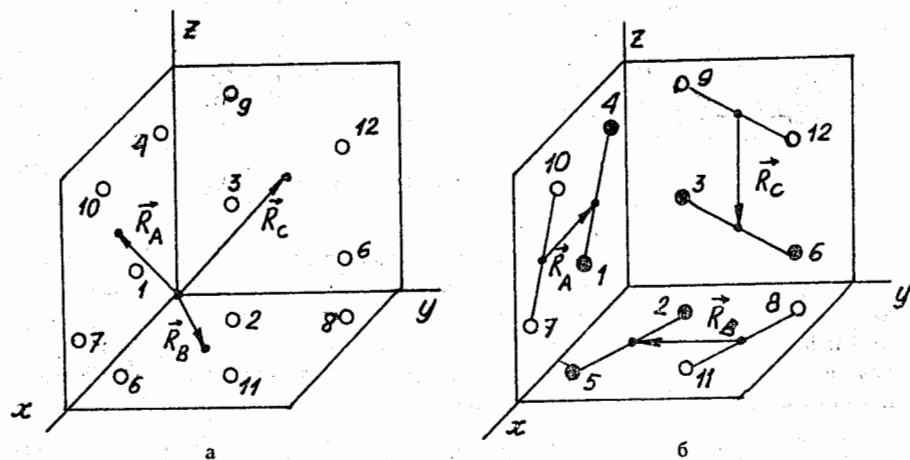


Рис.8. Расположение магнитных ионов в независимой зоне структуры гранатов.

Гранат G1 имеет суммарный магнитный момент, направленный по оси  $[\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}]$ . Чтобы получить значения мультипольных моментов  $\vec{T}, Q$  и  $q$ , не зависящие от выбора начала координат, вычтем из момента каждой подрешетки  $\vec{M}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 12$ ) вектор  $\vec{M}/n$  и будем считать полученные разности (то есть величины  $\vec{M}'_k = \vec{M}_k - \vec{M}/n$ ) новыми моментами подрешеток.

Относительное расположение векторов  $\vec{R}_A, \vec{R}_B$  и  $\vec{R}_C$  и обобщенных векторов антиферромагнетизма, ориентированных по осям коллинеарности, для гранатов G1, G2, G3 показано на рис.9. Все три магнитные структуры имеют отличный от нуля тороидный момент. Что касается скалярного момента, то для граната G1 он положителен, для G2 - отрицателен, а для G3 - равен нулю.

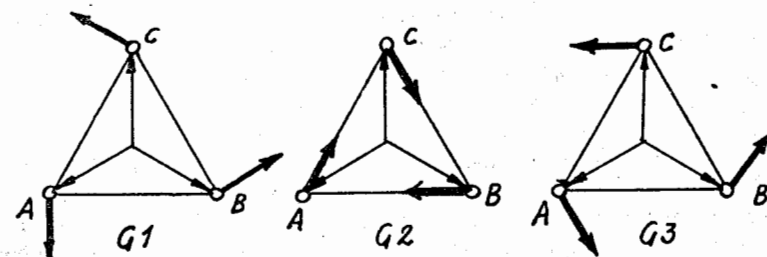


Рис.9. Суммарные моменты коллинеарных групп атомов в структуре гранатов.

Проведенное рассмотрение ясно показывает, что мультипольные моменты являются универсальным средством описания разнообразных магнитных структур, они весьма чувствительны к тонким деталям пространственного распределения магнитных моментов магнетиков. Несомненным преимуществом магнитных мультиполей перед всеми другими параметрами магнитной структуры является их наблюдаемость на опыте. Заметим также, что чем меньше размеры (макро)образца, тем более эффективно его описание с помощью мультипольных моментов.

#### 2.5. Обменные магнетики

Для определения мультипольных моментов заданной магнитной структуры необходимо иметь точные данные о значениях средних атомных спинов и их расположении в кристаллической решетке, что и было использовано в предыдущем разделе при анализе конкретных примеров магнетиков. Некоторые общие заключения о мультипольных моментах можно сделать, основываясь на соображениях симметрии. Так, например, известно, что из 122 магнитных классов симметрии 31 допускает существование вектора  $\vec{M}$  и 31 - вектора  $\vec{T}$  [8]. Можно также выяснить, какие классы магнитной симметрии допускают существование других мультипольных моментов. Однако здесь мы не будем заниматься этой задачей. Гораздо больший интерес представляет анализ мультипольных моментов на основе обменного приближения, справедливого для большого числа магнитных структур.

Как показано в работах Андреева и Марченко [3,4], значительное упрощение в макроскопическую теорию магнетизма вносит последовательный учет главной (обменной) симметрии магнетиков. Пренебрегая в гамильтониане спиновой системы анизотропными взаимодействиями, имеющими релятивистский порядок малости по сравнению с обменными, можно исследовать обменную структуру магнетика, которая зависит только от относительной ориентации спинов, но



не от их ориентации по отношению к решетке. На этом пути было выяснено [3,4], что обменные магнетики описываются небольшим числом макроскопических параметров – векторами  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$ , преобразующимися по неприводимым представлениям пространственной группы кристалла  $G$ . Однако при этом ориентация векторов  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  относительно решетки остается произвольной (обменное вырождение). Роль анизотропных взаимодействий в первом приближении состоит в том, что они снимают это вырождение (хотя и не всегда полностью) и тем самым фиксируют спины относительно решетки. Наша задача состоит в том, чтобы установить связь между параметрами  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  и мультипольными моментами и найти число независимых моментов, которые требуются для описания магнитной структуры при заданной симметрии решетки.

Следуя работам [3,4], разложим микроскопическую плотность магнитного момента  $\vec{m}(\vec{r})$  (пропорциональную введенной в разделе 2.1 функции  $\vec{m}(\vec{r}_a)$ ) по неприводимым представлениям пространственной группы кристалла  $G$

$$\vec{m}(\vec{r}) = \sum_{\Gamma} \vec{L}_{\Gamma\mu} \Phi_{\Gamma\mu}(\vec{r}), \quad (2.18)$$

где функция  $\Phi_{\Gamma\mu}(\vec{r})$  преобразуется по  $\Gamma$ -ому неприводимому представлению группы  $G$ , индекс  $\mu$  нумерует функции, принадлежащие данному представлению. В сумме (2.18) учитывается, что некоторые неприводимые представления могут повторяться до трех раз. Разложение (2.18) соответствует принятому предположению об обменном приближении, так как компоненты векторной функции  $\vec{m}(\vec{r})$  в (2.18) рассматриваются как скаляры. Как показано в [3,4], максимальное число отличных от нуля векторов  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  и максимальная размерность представления  $\Gamma$  равны трем. Кроме того, в тех случаях, когда структура описывается двумя или тремя векторами  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$ , они взаимно ортогональны. Перечисление всех возможных магнитных структур (обменных классов) для групп симметрии, соответствующих кристаллическим классам, можно найти в работе [4]. Кроме этого возможны также геликоидальные обменные структуры [3], которые здесь мы не будем рассматривать. В связи с этим под группой симметрии  $G$  далее будет пониматься одна из 32 точечных групп, соответствующих кристаллическим классам.

Для решения вопроса о том, какие именно мультипольные моменты допускает данная обменная структура, необходимо знать ориентацию моментов подрешеток (а с ними и векторов  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  относительно кристаллографических осей), которые определяются анизотропным взаимодействием. Как можно видеть на примере двухподрешеточного магнетика, рассмотренном в разделе 2.3 (рис.3), в зависимости от ориентации вектора антиферромагнетизма  $\vec{L}$  относительно радиуса-вектора  $\vec{R}$ , соединяющего центры подрешеток, могут меняться величины мультипольных моментов (2.12). В частности, при параллельной ориентации ( $\vec{R} \parallel \vec{L}$ ) имеем  $q \neq 0, T = 0$ , то есть отличен от нуля скалярный момент, а тороидный момент равен нулю, если же  $\vec{R} \perp \vec{L}$ , то наоборот,  $q = 0, T \neq 0$ .

Для удобства дальнейших рассуждений будем называть число параметров, которым задается магнитная структура (то есть общее число отличных от нуля компонент векторов  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$ ) кратностью вырождения данного обменного состоя-

ния. Таким образом, без учета анизотропии возможны трех-, шести- и девятикратные вырождения обменной энергии в положении минимума, который реализуется данной структурой. Так как анизотропные взаимодействия имеют релятивистский порядок малости, мы можем их учесть по теории возмущений. В первом приближении возмущение приводит лишь к снятию вырождения по ориентациям моментов. Как обычно, в рамках симметричного подхода мы можем найти, между какими состояниями будет снято вырождение (см., например, [17]), что в нашем случае как раз и будет означать указание возможных ориентаций векторов  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  относительно решетки.

Для решения этой задачи теперь следует учитывать преобразования "спинового" индекса векторов  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  при преобразованиях группы  $G$ . По этому индексу величины  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  преобразуются как псевдовекторы, точнее говоря, они реализуют псевдовекторное представление  $\Gamma_p$  группы  $G$ , которое в общем случае является приводимым. Разложив это представление на неприводимые, мы можем утверждать, что каждому из них будут соответствовать разные значения энергии анизотропии. То есть сферическая симметрия, которая предполагалась при введении обменного приближения, теперь будет снята "полем", имеющим симметрию, описываемую группой  $G$ .

Рассмотрим несколько простых примеров. Согласно таблице, приведенной в [4], группа  $C_{2v}$  допускает, например, существование обменных структур, которые описываются одним вектором  $\vec{L}_{\Gamma}$ , преобразующимся по одному из одномерных представлений этой группы ( $\Gamma = A_1, A_2, B_1$ ). То есть в этой группе существует три трехкратно вырожденных мультиплета, пронумерованных символами соответствующих представлений. Псевдовекторное представление  $\Gamma_p$  в группе  $C_{2v}$  разлагается в сумму одномерных представлений следующим образом:  $\Gamma_p = A_2 + B_1 + B_2$ , причем по представлениям  $B_1, B_2$  и  $A_1$  преобразуются соответственно компоненты  $L_x, L_y$  и  $L_z$ . Таким образом, можно сказать, что в данном случае обменное вырождение мультиплетов полностью снимается, причем вектор  $\vec{L}_{\Gamma}$  направлен по одной из осей координат  $x, y, z$ , ориентация которых задана симметрией кристалла.

В группе  $D_4$  разложение псевдовекторного представления  $\Gamma_p$  на неприводимые части имеет вид:  $\Gamma_p = A_2 + E$ , причем по представлению  $A_2$  преобразуется  $z$ -компонента псевдовектора, а по представлению  $E$  - его  $x$ -и  $y$ -компоненты. Таким образом, в данном случае мы имеем дело с частичным снятием обменного вырождения. Если в состоянии  $A_2$  энергия меньше, чем в состоянии  $E$ , то принято говорить, что магнетик одноосный.

Рассмотрим теперь случай, когда структура описывается двумя взаимно перпендикулярными векторами  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$ . В группе  $C_{2v}$ , где псевдовекторное представление разлагается на три одномерных, векторы  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$ , реализующие состояния  $(A_1 A_2)$  или  $(B_1 B_2)$ , могут быть направлены по двум взаимно перпендикулярным осям симметрии. В результате шестикратное обменное вырождение снимается в этой группе полностью. Можно показать, что в аналогичной ситуации (двухвекторная структура) в группе  $D_4$  происходит лишь частичное снятие вырождения. Мы не будем подробно останавливаться на этой и на другой аналогичной задаче для трехвекторных структур.

Таким образом, в низкосимметричных группах обменное вырождение полностью или частично снимается и можно указать возможные ориентации векторов антиферромагнетизма  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  относительно кристаллических осей. В тетраэдрических и кубических группах компоненты псевдовектора преобразуются по одному трехмерному представлению. Поэтому в первом приближении вырождение не снимается и необходимо учитывать более высокие степени приближения. Однако в этих кристаллах снятие вырождения может происходить из-за слабых деформаций кристалла, понижающих его симметрию, которые, как правило, сопровождают переход в магнитоупорядоченное состояние.

Для вычисления мультипольных моментов следует умножить функцию  $\vec{m}(\vec{r})$ , заданную соотношением (2.18), на неприводимый тензор, составленный из компонент радиус-вектора  $\vec{r}$  и проинтегрировать по объему кристалла. Далее мы будем интересоваться только моментами первого порядка по  $\vec{r}$  - скалярным, торонидным и квадрупольным (остальные моменты могут быть рассмотрены аналогично), которые в соответствии с определением (2.9) могут быть представлены в виде

$$q = \sum_{\Gamma\mu} (\vec{L}_{\Gamma\mu} \vec{r}_{\Gamma\mu}); \quad \vec{T} = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma\mu} [\vec{r}_{\Gamma\mu} \vec{L}_{\Gamma\mu}]; \quad Q = \sum_{\Gamma\mu} \{\vec{r}_{\Gamma\mu} \vec{L}_{\Gamma\mu}\}, \quad (2.19)$$

здесь символом  $\vec{r}_{\Gamma\mu}$  обозначен векторный интеграл по объему кристалла, имеющий вид

$$\vec{r}_{\Gamma\mu} = \int_V \vec{r} \Phi_{\Gamma\mu}(\vec{r}) dV. \quad (2.20)$$

Так как вектор  $\vec{r}_{\Gamma\mu}$  - полярный, он преобразуется по векторному представлению  $\Gamma_\nu$  группы  $G$ . На вопрос о ненулевых значениях этого вектора можно ответить на основании соображений симметрии. Если интегрирование в (2.20) проводится по бесконечной области ("бесконечный" кристалл), то интеграл отличен от нуля в тех случаях, когда произведение векторного представления группы  $\Gamma_\nu$  и приводимого представления  $\Gamma$  содержит единичное представление. Другой важный предельный случай соответствует области интегрирования, совпадающей по симметрии с группой кристалла  $G$ , то есть форма кристалла представляет собой так называемый рациональный многогранник [13]. В этом случае интеграл (2.20) отличен от нуля, если произведение представлений  $\Gamma_\nu$  и  $\Gamma$  содержит одно из неприводимых представлений, включенных в векторное представление  $\Gamma_\nu$ .

Рассмотрим примеры. В группе  $C_{2v}$  векторное представление  $\Gamma_\nu$  распадается в прямую сумму представлений  $A_1(z)$ ,  $B_1(x)$  и  $B_2(y)$  (в скобках указаны соответствующие базисные функции). Представление  $\Gamma$ , в соответствии с таблицей в [4], может быть равным  $A_1$ ,  $A_2$  или  $B_1$ . Произведение представлений  $\Gamma_\nu$  и  $\Gamma$  в данном случае распадается на прямую сумму неприводимых представлений группы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu \times A_1 &= A_1 + B_2 + B_1; & \Gamma_\nu \times B_1 &= B_1 + A_2 + A_1; \\ \Gamma_\nu \times A_2 &= A_2 + B_1 + B_2; & \Gamma_\nu \times B_2 &= B_2 + A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Видим, что единичное представление  $A_1$  не содержится только в произведении  $\Gamma_\nu \times A_2$ . Следовательно, в бесконечном кристалле моменты первого порядка могут быть отличны от нуля для структур типа  $A_1$ ,  $B_1$  и их композиций с  $A_2$  и  $B_2$ . В дальнейшем, чтобы исключить тривиальный случай  $\Gamma = A_1$ , здесь и далее мы будем считать, что начало координат выбрано таким образом, что интеграл  $\vec{r}_{A_1}$  равен нулю. Из проведенного анализа следует, что в состоянии  $B_1$  отлична от нуля только  $x$ -компонента вектора  $\vec{r}_{B_1}$ . Выше было показано, что вектор  $\vec{L}_{B_1}$ , описывающий магнитную структуру в этом состоянии, при учете анизотропии может быть ориентирован по оси  $x$ ,  $y$  или  $z$ . Если он направлен по оси  $x$ , то в соответствии с (2.20) отличен от нуля скалярный момент  $q$ , в двух других случаях он равен нулю, но отличен от нуля торонидный момент. В состояниях  $A_2$  и  $(A_1 A_2)$  для бесконечного кристалла моменты первого порядка отсутствуют. В состоянии  $(B_1 B_2)$  отличны от нуля как скалярный, так и торонидный моменты.

Для кристалла конечных размеров, но симметричного по форме, вектор  $\vec{r}_{\Gamma\mu}$  в группе  $C_{2v}$  отличен от нуля всегда, так как произведения представлений  $\Gamma_\nu$ ,  $\Gamma$  (2.21) содержат неприводимые представления  $A_1$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , входящие в состав векторного представления. При этом интегралы  $\vec{r}_{A_1}$  имеют отличные от нуля все три компоненты, а  $\vec{r}_{A_2}$ ,  $\vec{r}_{B_1}$  и  $\vec{r}_{B_2}$  - компоненты  $x$  и  $y$ ,  $x$  и  $z$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Отсюда следует, что во всех антиферромагнитных структурах этой группы отличны от нуля моменты первого порядка.

Аналогичный анализ других обменных магнетиков позволяет установить, что большинство из них обладает моментами первого порядка ( $q$ ,  $\vec{T}$  и  $Q$ ). Поскольку, с другой стороны, максимальное число параметров, которыми описывается магнитная структура в обменном приближении не превышает девяти, то путем линейной замены переменных всегда можно выразить векторы  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$  через подходящие компоненты моментов  $\vec{M}$ ,  $q$ ,  $\vec{T}$  и  $Q$  и считать, что они, а не  $\vec{L}_{\Gamma\mu}$ , являются независимыми параметрами состояния. Таким образом, измерение моментов первого порядка (вместе с  $\vec{M}$ ) дает возможность в большинстве случаев полностью описать макроскопическую структуру кристалла в обменном приближении.

### 3. Взаимодействие магнетиков с неоднородным полем

#### 3.1. Энергия взаимодействия с магнитным полем

Рассмотрим теперь взаимодействие с неоднородным магнитным полем  $\vec{H}(\vec{r})$  образца магнетика, которое описывается оператором

$$\hat{H}_F = - \sum_a (\vec{S}_a \vec{H}(\vec{r}_a)). \quad (3.1)$$

После усреднения по состояниям системы согласно способу, представленному в разделе 2.1, это выражение принимает вид  $\mathcal{E}_F = - \sum_a (\vec{m}_a \vec{H}(\vec{r}_a))$ . Учитывая

определения моментов подрешеток  $\vec{M}_k$ , мы можем представить его в виде

$$\mathcal{E}_F = \langle \mathcal{H}_F \rangle = - \sum_k (\vec{M}_k \vec{H}_k); \quad \vec{H}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{\alpha \in N_k} \vec{H}(\vec{r}_\alpha), \quad (3.2)$$

где введено среднее поле  $\vec{H}_k$ , действующее на  $k$ -ую подрешетку.

Для того чтобы выразить энергию взаимодействия через мультипольные моменты, введем вместо векторов  $\vec{H}_k$  некоторые тензорные параметры  $F^{(l)}$ ..., пользуясь методикой, развитой в работе [5].

$$H_{k\alpha} = F_\alpha^{(0)} + F_{\alpha\beta}^{(1)} R_{k\beta} + F_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} R_{k\beta} R_{k\gamma} + \dots + F_{\alpha\beta\gamma\dots\delta}^{(p)} R_{k\beta} R_{k\gamma} R_{k\alpha} R_{k\delta} \dots R_{k\delta}, \quad (3.3)$$

где греческие индексы обозначают декартовы компоненты тензоров. Это равенство следует рассматривать как невырожденное линейное преобразование, связывающее две совокупности переменных  $\vec{H}_k$  и  $F^{(l)}$ , причем число переменных в каждой совокупности одинаково и равно  $3n$ . Выбор параметров  $F^{(l)}$  ограничен только требованием невырожденности преобразования (3.3), а в остальном остается произвольным.

Подставляя (3.3) в первое из равенств (3.2), мы можем записать энергию взаимодействия  $\mathcal{E}_F$  в виде

$$\mathcal{E}_F = -M_\alpha F_\alpha^{(0)} - \frac{1}{3} q F^{(1)} - \frac{1}{2} T_\alpha F_\alpha^{(1)} - Q_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^{(1)} + \dots + Q_{\alpha\beta\gamma\dots\delta} F_{\alpha\beta\gamma\dots\delta}^{(p)}, \quad (3.4)$$

где  $F^{(1)}$  и  $F_\alpha^{(1)}$  - скаляр и вектор, которые можно выделить из тензора 2-го ранга  $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ . Остальные, символически представленные здесь слагаемые, соответствуют взаимодействиям высших мультипольностей.

Внешнее неоднородное магнитное поле  $\vec{H}(\vec{r})$  в большинстве случаев можно считать медленно меняющимся с координатами, то есть масштаб неоднородности поля  $l$  мал по сравнению с периодом решетки  $a$  ( $a \ll l$ ). Как было показано выше, магнитную структуру можно представлять себе в виде периодического повторения независимой области. Такая структура схематически показана на рис. 10 для двухподрешеточного антиферромагнетика. На этом же рисунке пунктиром показаны магнитные силовые линии неоднородного магнитного поля, наложенного на образец. Проведем разложение поля  $\vec{H}(\vec{r})$  в степенной ряд по  $\vec{r}$  вблизи центра  $\vec{r}_\alpha$  каждой "копии" независимой области

$$\vec{H}(\vec{r}) \approx \vec{H}(\vec{r}_\alpha) + \frac{1}{2} [\vec{r} \text{rot} \vec{H}(\vec{r}_\alpha)] + \vec{r} \{ \nabla \vec{H}(\vec{r}_\alpha) \} + \dots, \quad (3.5)$$

где  $\vec{r}$  отсчитывается от "каждого"  $\vec{r}_\alpha$ , а аргумент у  $\text{rot} \vec{H}$  и неприводимого тензора градиента магнитного поля  $\{ \nabla \vec{H} \}$  указывает, что значения этих величин должны быть взяты в центре рассматриваемой независимой области  $\vec{r}_\alpha$ . В разложении (3.5) отсутствует скалярный член вида  $\vec{r} \text{div} \vec{H}$ , так как согласно уравнению Максвелла  $\text{div} \vec{H} = 0$ . Отметим также, что вихревое поле ( $\text{rot} \vec{H} \neq 0$ ) может быть создано на образце только протекающими по нему токами (токами проводимости или токами смещения).

Подставляя разложение (3.5) в формулу (3.2), по которой определяется среднее поле  $\vec{H}_k$ , получаем

$$\vec{H}_k = \vec{H}_0 + \frac{1}{2} [\vec{R}_k \vec{V}] + \vec{R}_k U + \dots, \quad (3.6)$$

где введены усредненные по всем независимым областям - однородная часть поля  $\vec{H}_0$  и производные  $\vec{V}$  и  $U$ :

$$\vec{H}_0 = \frac{n}{N} \sum \vec{H}(\vec{r}_\alpha); \quad \vec{V} = \frac{n}{N} \sum \text{rot} \vec{H}(\vec{r}_\alpha); \quad U = \frac{n}{N} \sum \{ \nabla \vec{H}(\vec{r}_\alpha) \} \quad (3.7)$$

(суммирование ведется по центрам  $\vec{r}_\alpha$ ). При выводе выражения (3.6) предполагалось, что начало координат выбрано в центре "основной" независимой области, построенной на векторах  $\vec{R}_k$ .

Сравнивая равенства (3.6) и (3.3), можно видеть, что параметры  $F^{(l)}$  могут быть представлены в виде рядов по производным поля, что позволяет находить их значения с любой степенью точности. Для иллюстрации рассмотрим случай двухподрешеточного антиферромагнетика. Пусть  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  - средние значения поля на каждой из подрешеток (рис.11(a)). В соответствии с (3.3) введем вместо векторов  $\vec{H}_1, \vec{H}_2$  тензорные параметры  $F^{(l)}$ .... В данном случае представление (3.3) можно записать в виде

$$\vec{H}_k = \vec{F}^{(0)} + F^{(1)} \vec{R}_k + \frac{1}{2} [\vec{F}^{(1)} \vec{R}_k]; \quad (k = 1, 2) \quad (3.8)$$

Таким образом, в качестве независимых параметров выбраны: свертка тензора 2-го ранга  $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ , а также  $x$ -и  $y$ -компоненты вектора  $F_\alpha^{(1)}$ , дуального несимметричной части тензора  $F_{\alpha\beta}^{(1)}$  (такой выбор параметров определяется симметрией ячейки). Ось  $z$ , как и ранее, считается направленной по вектору  $\vec{R} = \vec{R}_{12}$ , соединяющему центры подрешеток. Равенство (3.8) следует рассматривать как линейное преобразование от шести переменных поля  $\vec{H}_1, \vec{H}_2$  к новым - шести же - переменным  $\vec{F}^{(0)}, F^{(1)}$  и  $\vec{F}^{(1)}$  (при дополнительном условии  $(\vec{R} \vec{F}^{(1)}) = 0$ ). Преобразование (3.8) легко обратить, то есть выразить новые переменные через старые. Предполагая, что начало координат выбрано в центре отрезка 1-2 (рис.11a); после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(0)} &= \frac{1}{2} (\vec{H}_1 + \vec{H}_2); & F^{(1)} &= \frac{1}{2} (H_{1z} + H_{2z})/R; \\ F_x^{(1)} &= -2(H_{1y} + H_{2y})/R; & F_y^{(1)} &= -2(H_{1x} + H_{2x})/R. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введенные поля  $\vec{F}^{(0)}, F^{(1)}$  и  $\vec{F}^{(1)}$  играют роль эффективного однородного поля ( $\vec{F}^{(0)}$ ), эффективной дивергенции ( $F^{(1)}$ ) и ротора ( $\vec{F}^{(1)}$ ) неоднородного поля, так как в согласии с (3.4) именно они определяют взаимодействие мультипольных моментов системы с полем. Подставляя вместо  $\vec{H}_k$  его разложение в ряд (3.6), мы можем выразить эффективные поля (3.9) через "истинные":

$$\vec{F}^{(0)} = \vec{H}_0; \quad F^{(1)} = V_{zz}; \quad F_x^{(1)} = U_x + 2V_{zy}; \quad F_y^{(1)} = U_y - 2V_{zx}. \quad (3.10)$$

Следует отметить, что эффективный вихрь (вектор  $\vec{F}^{(1)}$ ) может существовать даже в том случае, когда "истинное" поле является безвихревым ( $\vec{V} = \text{rot}\vec{H} = 0$ ). Такая ситуация возможна при определенной ориентации магнитной ячейки относительно собственных осей среднего градиента магнитного поля  $V_{\alpha\beta}$ , как это ясно видно из рис.11б. На этом рисунке пунктиром отмечены силовые линии безвихревого неоднородного магнитного поля и указаны поля  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$ , действующие в узлах 1 и 2. Векторы  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  будут иметь компоненты, перпендикулярные  $\vec{R}_{12}$  при условии, что ни одна из главных осей тензора  $V_{\alpha\beta}$  не совпадает с  $\vec{R}$ . Эти рассуждения показывают, что наблюдение тороидной поляризации антиферромагнетика (за которую ответствен эффективный вихрь внешнего поля  $\vec{F}^{(1)}$ ) оказывается возможным и в статическом режиме.

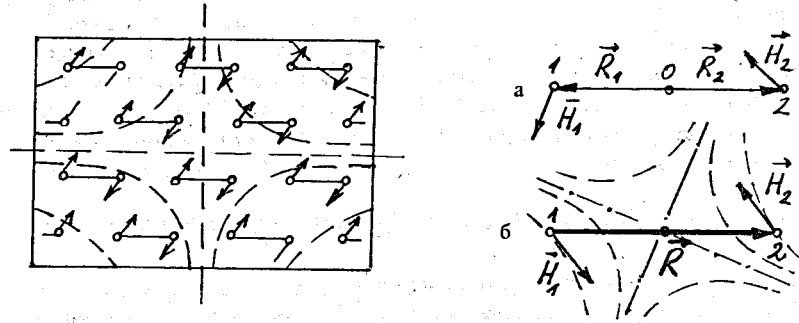


Рис.10. Двухподрешеточный антиферромагнетик в неоднородном поле.

Рис.11. Суммарные магнитные поля на подрешетках: (а) - в произвольном случае; (б) - в безвихревом магнитном поле.

Необходимо подчеркнуть, что мультипольные моменты магнетика согласно выражению (3.4) взаимодействуют с эффективными полями  $F^{(l)}$ , которые учитывают не только анизотропию неоднородного внешнего поля, но также и анизотропию самого магнетика. Различие между эффективными градиентами поля  $F^{(l)}$  и средними истинными градиентами  $\langle \text{rot}\vec{H} \rangle$ ,  $\langle \{\nabla H\} \rangle$ , ..., состоит в том, что связь между средними полями на подрешетках  $\vec{H}_k$  и тензорами  $F^{(l)}$  согласно определению (3.3) является точной: выражение (3.3) - это просто переход от одних переменных к другим. Поэтому сумма в (3.3) состоит из конечного числа слагаемых в силу конечности числа атомов в одной независимой области кристалла. В то же время суммы (3.5), (3.6) ограничены только степенью взятого приближения и в принципе могут быть продолжены до бесконечности.

Легко видеть, что энергию взаимодействия двухподрешеточного антиферромагнетика с неоднородным полем мы могли бы также записать без обращения к мультипольным моментам, непосредственно выражая ее через вектор антифер-

ромагнетизма:

$$\mathcal{E}_F = -\vec{M}_1\vec{H}_1 - \vec{M}_2\vec{H}_2 = -\frac{1}{2}\vec{L}(\vec{H}_1 - \vec{H}_2). \quad (3.11)$$

Однако в дальнейшем, рассматривая условия наблюдения антиферромагнитной поляризации, нам все равно пришлось бы разделять различные мультипольные вклады в электромагнитное поле, создаваемое поляризованным образцом. Отметим, что в обменном приближении взаимодействие с неоднородным магнитным полем можно записать аналогично (3.11) в виде

$$\mathcal{E}_F = -\sum_{\Gamma\Lambda}(\vec{L}_{\Gamma\Lambda}\vec{H}_{\Gamma\Lambda}). \quad (3.12)$$

### 3.2. Выстраивание мелких частиц антиферромагнетика в неоднородном поле

Наличие мультипольных моментов у образцов антиферромагнетика может быть обнаружено по влиянию неоднородного магнитного поля на движение мелких частиц антиферромагнитного материала, взвешенных в подходящей несущей жидкости. Чтобы получить выражение для энергии, удобное для рассмотрения движущихся частиц, будем предполагать, что внешнее неоднородное поле слабо меняется на протяжении размеров частицы, и поэтому оно может быть разложено в ряд относительно центра частицы (ср. разложение (3.5)). В линейном приближении имеем

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(0) + \frac{1}{2}[\vec{r}\text{rot}\vec{H}(0)] + \vec{r} \cdot \{\nabla\vec{H}(0)\}. \quad (3.13)$$

Представим энергию взаимодействия частицы с неоднородным полем в виде интеграла  $\mathcal{E}_F = -\int \vec{m}(\vec{r})\vec{H}(\vec{r})dV$ , который берется по объему частицы. Подставляя в этот интеграл значения поля (3.13) и используя данное выше определение мультипольных моментов, получаем

$$\mathcal{E}_F = -(\vec{M}\vec{H}(0)) - (\vec{T}\text{rot}\vec{H}(0)) - (Q : \{\nabla\vec{H}(0)\}). \quad (3.14)$$

Моменты  $\vec{M}$ ,  $\vec{T}$  и  $Q$  фиксированы относительно осей координат, жестко связанных с самой частицей, а градиенты поля - относительно осей лабораторной системы координат. Поэтому энергия  $\mathcal{E}_F$  зависит от углов Эйлера, задающих относительную ориентацию той и другой системы координат. Момент сил  $\vec{K}$ , действующий на частицу, можно получить, дифференцируя энергию по углам:

$$\vec{K} = -\hat{L}\mathcal{E}_F, \quad (3.15)$$

где  $\hat{L}$  - оператор бесконечно малого поворота. Подставляя (3.14) в (3.15) и вычисля производную, находим

$$\vec{K} = -[\vec{M}\vec{H}(0)] + [\vec{T}\text{rot}\vec{H}(0)] + [Q \cdot \{\nabla\vec{H}(0)\}]. \quad (3.16)$$

Уравнение движения частицы в вязкой жидкости имеет вид

$$J \cdot \dot{\vec{\Omega}} = -\lambda \cdot \vec{\Omega} + \vec{K}, \quad (3.17)$$

где  $J$  - тензор инерции,  $\lambda$  - тензор вращательного трения,  $\vec{\Omega}$  - угловая скорость частицы. В сильно вязкой жидкости можно пренебречь в уравнении движения инерционным членом, так что в соответствии с (3.17) угловая скорость оказывается равной

$$\vec{\Omega} = \lambda^{-1} \cdot \vec{K}, \quad (3.18)$$

где  $\lambda^{-1}$  - тензор, обратный к  $\lambda$ . Учитывая, что любой вектор  $\vec{e}$ , жестко связанный с частицей, изменяется по закону

$$\dot{\vec{e}} = [\Omega \vec{e}], \quad (3.19)$$

и подставляя в это выражение угловую скорость (3.18), можно видеть, что в результате действия постоянного во времени поля частица примет определенную ориентацию. Если же поле осциллирует с частотой  $\omega$ , то и частица будет осциллировать (совершать вращательные качания) с той же частотой, причем сдвиг фазы между колебаниями поля и частицы зависит от соотношения между временем ориентационной вязкой релаксации и частотой  $\omega$ .

Поля  $\vec{H}(0)$ ,  $rot \vec{H}(0)$  и  $\{\nabla \vec{H}(0)\}$  могут быть созданы независимыми источниками. Например, однородное поле  $\vec{H}(0)$  - цилиндрической катушкой с током (при этом частица должна находиться в центре катушки). Вихревое поле  $rot \vec{H}$  в случае непроводящего магнетика может быть создано токами смещения:  $rot \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{E}$ , возникающими, например, в плоском конденсаторе или в зазоре линейной антенны. А симметричный тензор градиента поля  $\{\nabla \vec{H}(0)\}$  - системой катушек с током. Из проведенных выше рассуждений следует, что если частица, взвешенная в вязкой жидкости, обладает суммарным магнитным моментом  $\vec{M}$ , то он будет ориентироваться по направлению поля  $\vec{H}(0)$  (а вместе с ним и сама частица) подобно тому, как ориентируется по полю стрелка компаса. В направлении же, перпендикулярном полю, ориентация частицы остается произвольной; она определяется начальными условиями движения. Аналогично, если частица обладает тороидным моментом  $\vec{T}$ , то этот момент будет ориентироваться по направлению производной электрического поля  $\vec{E}$ . Если это поле меняется со временем периодически, то и частица будет периодически переориентироваться, подобно тому, как переориентируются в переменном магнитном поле мелкие частицы ароматизатора [11, 12], обладающие аксиальным (электрическим) тороидным моментом. Так же может быть проведен и анализ движения квадрупольных частиц. Таким образом, если частица антиферромагнитна и, следовательно, не обладает магнитным моментом ( $\vec{M} = 0$ ), то ее магнитная структура может быть экспериментально обнаружена при наблюдении ее ориентационного движения в неоднородных полях  $rot \vec{H}$  или  $\{\nabla \vec{H}\}$ .

### 3.9. Поля магнитных мультиполей

Общая схема разложения электрических и магнитных полей по мультипольным вкладам была развита Дубовиком с соавт. (см. обзоры [6,9,10]). Как показано в этих работах, кроме обычных мультиполей - электрических и магнитных диполей, квадруполь и т.д., мультипольное разложение содержит, во-первых, поля моментов тороидного ряда, из которых первым является тороидный момент  $\vec{T}$ , и, во-вторых, так называемые среднеквадратичные радиусы, к числу которых относятся и скалярный момент  $q$ .

Чтобы получить значения полей интересующих нас мультиполей  $M, q, T, Q$ , описывающих магнитную структуру, естественно рассматривать создаваемые ими поля как сумму вкладов отдельных магнитных диполей. Будем исходить из выражений для магнитного и электрического полей точечного магнитного диполя, которые можно представить в виде (см., например, [18], с. 232, где для перехода от полей электрического диполя  $\vec{d}$  к полям магнитного  $\vec{m}$ , следует сделать замену  $\vec{d} \rightarrow \vec{m}$ ,  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ ):

$$\vec{H}_m = \nabla(\nabla \frac{\vec{m}}{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\vec{m}}}{r}; \quad \vec{E}_m = -\frac{1}{c} [\nabla \frac{\dot{\vec{m}}}{r}]. \quad (3.21)$$

В этих выражениях предполагается, что значения момента  $\vec{m}(t)$  должны быть взяты в ретардированные моменты времени  $t' = t - r/c$ . Разделив магнетик на независимые области, соответствующие геометрии образца, разложим поля (3.21) по малому параметру  $a/r$  вблизи центра каждой независимой области, а затем следует провести суммирование по всем независимым областям. Далее мы ограничимся вычислением полей только одной независимой области.

Как известно, разложение функции в степенной ряд в первом приближении эквивалентно действию на нее оператора  $1 - \vec{r} \nabla$ :

$$f(\vec{r} - \vec{r}_a) \approx [1 - (\vec{r}_a \nabla) + \dots] f(\vec{r}). \quad (3.22)$$

Пользуясь этим свойством, запишем выражения для суммарных полей (3.21), создаваемых системой магнитных диполей  $\vec{m}_a$ , расположенных в точках  $\vec{r}_a$  вблизи начала координат в виде

$$\vec{H}_\Sigma = \sum_a (1 - (\vec{r}_a \nabla)) \vec{H}_{ma}; \quad \vec{E}_\Sigma = \sum_a (1 - (\vec{r}_a \nabla)) \vec{E}_{ma}. \quad (3.23)$$

Учитывая определения мультипольных моментов (2.8)-(2.10), а также используя формулу разложения прямого произведения двух векторов на скалярное, векторное и тензорное (см. (2.11)) произведения

$$a_i b_k = \{\vec{a} \vec{b}\}_{ik} + \frac{1}{2} e_{ikj} [\vec{a} \vec{b}]_j + \frac{1}{3} (\vec{a} \vec{b}) \delta_{ik}, \quad (3.24)$$

после простых вычислений получим

$$\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_M + \vec{H}_Q + \vec{H}_T + \vec{H}_q, \quad \vec{E}_\Sigma = \vec{E}_M + \vec{E}_Q + \vec{E}_T + \vec{E}_q, \quad (3.25)$$

где введены поля суммарного магнитного момента  $\vec{M}$

$$\vec{H}_M = \nabla(\nabla \frac{\vec{M}}{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\vec{M}}}{r}; \quad \vec{E}_M = -\frac{1}{c} [\nabla \frac{\dot{\vec{M}}}{r}]; \quad (3.26)$$

магнитного квадрупольного

$$\vec{H}_Q = -\nabla(\nabla \nabla : Q) \frac{1}{r} + \frac{1}{c^2} (\nabla \dot{Q}) \frac{1}{r}; \quad \vec{E}_Q = -\frac{1}{c} [\nabla \nabla \dot{Q}] \frac{1}{r}; \quad (3.27)$$

тороидного момента

$$\vec{H}_T = \frac{1}{c^2} (\nabla \dot{T}) \frac{1}{r}; \quad \vec{E}_T = -\frac{1}{c} [\nabla \nabla \dot{T}] \frac{1}{r}; \quad (3.28)$$

и скалярного момента

$$\vec{H}_q = \frac{1}{c^2} \nabla \dot{q} \frac{1}{r}; \quad \vec{E}_q = 0. \quad (3.29)$$

В этих выражениях точки над символами обозначают дифференцирование по времени спиновых переменных, то есть моментов  $\vec{m}_a$ , с которыми линейно связаны мультипольные моменты.

Как можно видеть, в статическом случае поля тороидного и скалярного моментов отсутствуют. Электрическое поле тороидного момента эффективно эквивалентно полю электрического диполя величины  $\vec{d} = -\dot{T}/c$ . Магнитное поле скалярного момента соответствует полю "магнитного заряда", равного  $\dot{q}/c^2$ . Поскольку поля (3.25)-(3.28) имеют разное пространственное распределение, они могут быть независимо измерены с помощью соответствующих устройств (капашек и конденсаторов определенной конфигурации), см., например, [20].

#### 3.4. Динамика мультипольных моментов

Рассмотрим кратко динамику магнитной структуры в рамках обменного приближения, развитого в работах [3,4]. По отношению к спиновым переменным все мультипольные моменты ведут себя как векторы, поэтому при бесконечно малом повороте спинового пространства, задаваемом векторным параметром  $\delta\vec{\theta}$ , они преобразуются следующим образом:

$$\delta\vec{M} = [\delta\vec{\theta} \vec{M}]; \quad \delta q = (\delta\vec{\theta} \vec{T}); \quad \delta\vec{T} = Q\delta\vec{\theta} + [\delta\vec{\theta} \vec{T}] - \frac{2}{3} q\delta\vec{\theta};$$

$$\delta Q = \{\delta\vec{\theta} \times Q\} - \{\delta\vec{\theta} \vec{T}\}. \quad (3.30)$$

Введем угловые скорости поворота в спиновом пространстве

$$\vec{\Omega} = \frac{\delta\vec{\theta}}{dt}; \quad \vec{\Omega}_i = \frac{\delta\vec{\theta}}{dx_i}, \quad (3.31)$$

где  $x_i$  - локальные координаты магнетика. Как показано в [3,4], функция Лагранжа в переменных  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\Omega}_i$ , без учета релятивистских взаимодействий может быть записана в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\gamma^2} \chi_{\alpha\beta} (\Omega_\alpha + \gamma H_\alpha) (\Omega_\beta + \gamma H_\beta) + \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha\beta}^{ik} \Omega_{i\alpha} \Omega_{k\beta} - \mathcal{E}_F, \quad (3.32)$$

где магнитная восприимчивость  $\chi_{\alpha\beta}$  и параметры вращательной упругости  $\Lambda_{\alpha\beta}^{ik}$  имеют симметрию, задаваемую равновесной ориентацией мультипольных моментов. В функции Лагранжа дополнительно учтено взаимодействие магнетика с неоднородным магнитным полем  $\mathcal{E}_F$ , которое подробно обсуждалось в разделе 3.1. Таким образом, при наличии неоднородного поля появляется возможность дополнительного возбуждения спиновых волн.

#### 4. Заключение

Наблюдение мультипольных моментов значительно расширяет экспериментальные методы магнетизма. Эти величины могут использоваться как параметры порядка для интерпретации фазовых переходов в магнитоупорядоченное состояние и для описания доменных структур. Могут быть исследованы процессы мультипольного перемагничивания магнетиков, как это рассматривалось в работе [17] на примере тороидного перемагничивания агрегатов магнитных частиц, что дает возможность использовать новые магнитные среды (например, антиферромагнетики) для высокоплотной магнитной записи и хранения информации.

В качестве примера мультипольной интерпретации свойств магнетиков рассмотрим фазовый переход в упорядоченное состояние двухподрешеточного антиферромагнетика. Как известно, температура Нееля  $T_N$ , которая определяет точку перехода, не является точкой, где магнитная восприимчивость обращается в бесконечность, как это имеет место, например, для ферромагнетиков. Это объясняется тем, что однородное поле не может "создать" антиферромагнитное упорядочение. Легко, однако, показать, что температура Нееля определяет особенность тороидной восприимчивости антиферромагнетика. В самом деле, в рамках простейшей модели среднего поля (см., например, [2]) намагниченности подрешеток  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  в области температур  $T > T_N$  удовлетворяют уравнениям

$$\vec{M}_1 = \frac{c}{2T} (\vec{H}_1 - \alpha \vec{M}_1 - \gamma \vec{M}_2); \quad \vec{M}_2 = \frac{c}{2T} (\vec{H}_2 - \alpha \vec{M}_2 - \gamma \vec{M}_1), \quad (4.1)$$

где по сравнению с [2] учтено, что магнетик находится в неоднородном магнитном поле, и поэтому на подрешетки действуют разные магнитные поля  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$ , как это было показано в разделе 3.1.

Для решения уравнений (4.1) введем новые переменные

$$\vec{M}_{\pm} = \vec{M}_1 \pm \vec{M}_2, \quad \vec{H}_{\pm} = \frac{1}{2}(\vec{H}_1 \pm \vec{H}_2), \quad (4.2)$$

где  $\vec{M}_{\pm}$  - это магнитный момент, а  $\vec{M}_-$  - вектор антиферромагнетизма. В новых переменных уравнения (4.1) могут быть представлены в виде

$$\vec{M}_{\pm} = \frac{c}{2T}(2\vec{H}_{\pm} - \alpha\vec{M}_{\pm} \mp \gamma\vec{M}_{\pm}), \quad (4.3)$$

откуда находим их решение

$$\vec{M}_{\pm} = \frac{2c\vec{H}_{\pm}}{T + c(\alpha \pm \gamma)/2}. \quad (4.4)$$

Переходя к мультипольным моментам в соответствии с соотношениями (2.13), (3.1), получаем

$$\vec{M} = \frac{c\vec{H}_0}{T - \theta}; \quad \vec{T} = \frac{c\vec{F}_{(1)}}{T - T_N}; \quad q = \frac{cF_{(0)}}{T - T_N}, \quad (4.5)$$

где введены обозначения для температур

$$\theta = -c(\alpha + \gamma)/2; \quad T_N = -c(\alpha - \gamma)/2 \quad (4.6)$$

Полученные соотношения (4.5) показывают, что температура Нееля определяет особенность тороидной и "скалярной" восприимчивостей антиферромагнетика, подобно тому как температура Кюри определяет особенность восприимчивости ферромагнетика. Физическая причина этого результата вполне очевидна: неоднородное поле своей вихревой или потенциальной составляющей, в отличие от однородного поля, может перевести антиферромагнетик в упорядоченное состояние.

Как известно, магнитная восприимчивость ферромагнетиков  $\chi_M^{\text{ферро}}$  вблизи точки Кюри  $T_c$  имеет порядок величины  $10^4 \dots 10^5$  Гс/Э, а магнитная восприимчивость антиферромагнетиков  $\chi_M^{\text{анти}}$  порядка  $10^{-5} \dots 10^{-3}$  Гс/Э. Поскольку поведение тороидной восприимчивости антиферромагнетика  $\chi_T$  вблизи  $T_N$  аналогично поведению магнитной восприимчивости ферромагнетика  $\chi_M^{\text{ферро}}$  вблизи  $T_c$ , то следует ожидать, что у антиферромагнетика восприимчивость  $\chi_T$  будет на много порядков превышать восприимчивость  $\chi_M^{\text{анти}}$ . Это объясняется тем, что вблизи точки перехода размягчаются соответствующие степени свободы спинов и поэтому даже слабое вихревое магнитное поле может вызвать значительное изменение тороидного момента, что может быть использовано для его измерения.

Авторы благодарны А.Ф. Андрееву за полезное обсуждение этой работы.

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* М.:Наука - 1982, 624 с.
2. Боровик-Романов А.С. *Антиферромагнетизм.*//Физическая энциклопедия, т.1. М.: Советская энциклопедия.- 1988. С.108-113.
3. Андреев А.Ф., Марченко В.И. *Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков.* УФН, 1980. 130, в.1, с.39-63.
4. Андреев А.Ф., Марченко В.И. *Макроскопическая теория спиновых волн.* ЖЭТФ, 1976.70, в.4, с. 1522-1537.
5. Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М. *Тороидная поляризация агрегированных магнитных суспензий и композитов.* Физика элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ), 1993, 24, вып.4, стр.1056-1132 .
6. Dubovik V. M. Tugushev V.V. *Toroid moments in electrostatics and solid-state physics* Phys. Reports, 1990, 187, п.4, р.145-202.
7. Волков Б.А., Горбачевич А.А., Копаев Ю.В., Тугушев В.В. *Макроскопические токовые состояния в кристаллах* ЖЭТФ, 1981. 81, в.2, с.729-742.
8. Кротов С.С., Тугушев В.В. *Псевдосообственное тороидное упорядочение в антиферромагнетиках* ЖЭТФ, 1986. 91, в.5, с.1708-1724; V.M.Dubovik, S.S.Krotov and V.V.Tugushev. *Toroid current structures in ferro- and antiferromagnets*, JINR Comm. E17-86-499, Dubna, 1986, 26 p.; см. Дубовик В.М., Кротов С.С., Тугушев В.В. *Макроскопическая симметрия и микроскопическая природа параметров порядка при токовом и спин-токовом упорядочении в кристаллах*, Кристаллография, 1987, 32, 3, с.540-549.
9. Дубовик В.М., Чешков А.А. *Мультипольные разложения в классической и в квантовой теории поля и излучение* Физ. элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ), 1974,5, в.3, с.791-837; Dubovik V.M., Shabanov S.V. *The gauge invariance, radiation and toroid order parameters in electromagnetic theory.* // In special issue "Essays on the formal aspects of electromagnetic theory". Ed. A. Lakhtakia, Singapore : WS, 1993, p.399-474.
10. Дубовик В.М., Тосунян Л.А. *Тороидные моменты в физике электромагнитных и слабых взаимодействий* Физ. элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ); 1983, 14, в.5, с.1193-1228.
11. Толстой Н.А., Спартаков А.А. *Новый вид магнетизма - аромагнетизм* Письма в ЖЭТФ, 1990, 52, в.3, с. 796-798.
12. Марценюк М.А., Марценюк Н.М. *О происхождении аромагнетизма .* Письма в ЖЭТФ, 1991, 53, в. 5, с. 229-232.
13. Кокстер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп* М.:Наука, 1980. 240 с. (Пер. с англ. Coxeter H.S.M., Moser W.O.J. *Generators and relations for discrete groups* Berlin: Springer-Verlag, 1972)
14. Fano U. *Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator technics.* Rev. Mod. Phys. 1957, 39.n.1 , p. 74-93.

15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая физика. Ч.1.* М.: Наука, 1978. 584 с.
16. Нейтроны и твердое тело : В 3-х т. Т.2 / Изюмов Ю.А., Найш В.Е., Озеров Р.П. *Нейтроннография магнетиков.* - М.:Атомиздат, 1981-312 с.  
Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. *Фазовые переходы и симметрия кристаллов.* М.:Наука, 1984 - 248 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* М.:Наука, 1989. 768 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* М.Наука. 1988. 504 с.
19. Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М. *Перемагничивание агрегатов магнитных частиц вихревым полем и использование тороидности для записи информации.* - Препринт ОИЯИ Р17-92-541, Дубна, 1992. 30 с.
20. Миллер М.А. *Зарядовая и токовая электростатика; Нестационарные источники статических полей.* УФН, 1984, 142, вып.1, стр.147-158.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 декабря 1993 года.

Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М.  
Мультипольное описание антиферромагнитных структур

P17-93-455

Показано, что магнитная структура образцов антиферромагнетика конечных размеров может быть описана системой однозначно определенных мультипольных моментов. «Вырезая» из данного антиферромагнетика тот или иной образец, мы одновременно фиксируем независимую область периодической магнитной структуры, по которой можно установить, какими именно моментами описывается данный образец. Рассмотрен ряд конкретных примеров антиферромагнитных структур и показано, что для описания большинства из них достаточно использовать тороидный и скалярный моменты. Для обменных магнетиков указана связь между мультипольными моментами и параметрами Андреева и Марченко. Показано, что наличие мультипольных моментов у образцов магнитного материала может быть установлено по их взаимодействию с неоднородным полем определенной пространственной конфигурации, а сами мультипольные моменты могут быть измерены по их вкладу в суммарное поле, создаваемое образцом. Общий результат заключается в том, что мультипольное описание состояний магнетиков ставит вопрос о необходимости нового экспериментального подхода к изучению их макроскопических свойств.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1993

Перевод авторов

Dubovik V.M., Martsenyuk M.A., Martsenyuk N.M.  
Multipole Description of Antiferromagnetic Structures

P17-93-455

It is shown that the magnetic structure of samples of antiferromagnetic materials of finite sizes can be described by a system of uniquely determined multipole moments. The advantage of this description is the possibility to find these moments experimentally. Cutting a sample of some form of the given antiferromagnetic materials one fixes the «independent region» of a periodic magnetic structure. Knowing the independent region it is possible to point out which moments describe the given samples. A series of concrete antiferromagnetic is considered and it is shown that for a great number of them only two moments can be used: — toroid and scalar ones. For antiferromagnetics of the exchange kind the connection between the multipole parameters and the Andreev-Marchenko parameters is established. The conditions of observation of the multipole moments of the antiferromagnetic samples are considered. General conclusion is that the multipole description gives a more precise understanding of magnetic states of small macroscopic samples. For example, it is shown that the Neel temperature is  $\lambda$ -point of toroid susceptibility of an antiferromagnetic (i.e. toroid moment is a «real» order parameter).

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1993