93-389

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-93-389

Л.А.Сюракшина, А.С.Шумовский, В.С.Ярунин

О НЕВОЗМОЖНОСТИ СУБПУАССОНОВСКОГО РАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЗЕ-ВОЗБУЖДЕНИЙ С ПАРНЫМИ КОРРЕЛЯЦИЯМИ

1993

Развитие техники эксперимента в области квантовой оптики в последнее время усилило внимание к состояниям квантового электромагнитного поля, не имеющим классических аналогов. Одним из таких состояний является состояние электромагнитного поля с субпуассоновской статистикой фотонов, которое соответствует меньшим флуктуациям числа фотонов по сравнению с известным наиболее близким к классическому состоянию - когерентным состоянием. В работе [1] рассматривались условия существования субпуассоновского эффекта в модели параметрического усиления сигнала и шума. Состояние субпуассоновской статистики в этой модели является неравновесным. Представляет несомненный интерес определение статистики термодинамически равновесных бозе-систем в неклассических состояниях. Простейшая модель описывает двухбозонный процесс, создающий сжатые состояния, который проходит в термостате. Обсуждение статистики числа квантов в равновесной модели, описывающей парные возбуждения бозе-поля, было проведено в работах [2, 3].

Гамильтониан, содержащий билинейные формы бозе-операторов разных сортов

$$H = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k + \frac{g}{2} \sum_{k,l} \left(a_k a_l + a_l^+ a_k^+ \right), \qquad (1)$$

$$[a_k, a_l^+] = \delta_{kl}, \qquad [a_k^+, a_l^+] = 0, \qquad [a_k, a_l] = 0,$$

где a_k^+, a_k являются бозе-операторами рождения и уничтожения квантов поля с соответствующей частотой ω_k, g - константа взаимодействия, используется для рассмотрения широкого круга явлений в твердых телах: фотон-фононных взаимодействий в поляритонных системах, экситон-фононных взаимодействий в молекулярных кристаллах, а также в задачах рассеяния света на фононах и других [3, 4].

В качестве критерия субпуассоновской статистики рассмотрим условие превышения средним значением числа квантов его дисперсии $D(n)$:

$$F(n) \equiv D(n) - \langle n \rangle < 0, \qquad D(n) \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2, \qquad (2)$$

где средние значения физических величин в условиях термодинамического равновесия будут определяться как средние по каноническому ансамблю Гиббса, т.е.

$$< A >= \frac{1}{Q}\mathrm{Tr}\,(AR)\,, \qquad R = e^{-\tilde{\beta}H}, \qquad Q = \mathrm{Tr}(R), \qquad \tilde{\beta} = \frac{1}{\text{к}_{\text{б}} T}.$$

В нашей статье мы покажем невозможность субпуассоновского равновесного эффекта в бозе-системе с парными возбуждениями.

1. Один бозе-осциллятор в термостате

В случае одной степени свободы гамильтониан (1) имеет вид :

$$H = \omega a^+ a + \frac{g}{2}\left(a^2 + (a^+)^2\right), \qquad [a, a^+] = 1, \qquad g < \omega \tag{3}$$

и описывает двухбозонные возбуждения квантового осциллятора на частоте ω.

Для расчета средних значений числа и квадрата числа квантов будем использовать метод канонического преобразования гамильтониана [5]. Введем новые бозе-операторы α, α^+:

$$\begin{aligned} \alpha &= ua - va^+, \qquad [\alpha, \alpha^+] = 1, \qquad u^2 - v^2 = 1, \\ \alpha^+ &= ua^+ - va, \end{aligned}$$

представляющие гамильтониан в диагональном виде:

$$H = E_\alpha \alpha^+ \alpha + E_0,$$

$$E_\alpha = \omega\sqrt{1 - \tilde{g}^2}, \qquad E_0 = -\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\sqrt{1 - \tilde{g}^2}, \qquad \tilde{g} = \frac{g}{\omega},$$

где параметры преобразования u, v вещественны и подчиняются следующим соотношениям:

$$v^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \tilde{g}^2}}{2\sqrt{1 - \tilde{g}^2}}, \qquad u^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \tilde{g}^2}}{2\sqrt{1 - \tilde{g}^2}}, \qquad u \cdot v < 0.$$

Подсчет статистической суммы и средних значений

$$Q = \frac{\exp(-\tilde{\beta}E_0)}{1 - \exp(-\tilde{\beta}E_\alpha)} = \frac{\exp(\frac{\tilde{\beta}\omega}{2})}{2\sinh\left(\frac{\tilde{\beta}\omega}{2}\sqrt{1 - \tilde{g}^2}\right)}, \tag{4}$$

$$< n >= v^2 + (2v^2 + 1)n_\alpha, \qquad n_\alpha = (e^{\tilde{\beta}E_\alpha} - 1)^{-1},$$

$$< n^2 >= v^4(12n_\alpha^2 + 12n_\alpha + 3) + v^2(12n_\alpha^2 + 10n_\alpha + 2) + 2n_\alpha^2 + n_\alpha \tag{5}$$

приводит к результату:

$$F = v^4(8n_\alpha^2 + 8n_\alpha + 2) + v^2(8n_\alpha^2 + 6n_\alpha + 1) + n_\alpha^2 \geq 0\,. \tag{6}$$

Легко видеть, что при любых значениях параметров системы (g, ω, T) условие субпуассоновской статистики (2) не выполняется. Это утверждение в предельном случае нулевой температуры согласуется со сделанным ранее выводом о суперпуассоновской статистике квантов в сжатом состоянии Фока [2].

2. Два связанных осциллятора в термостате

Для двух степеней свободы бозе-поля гамильтониан (1) представляется в виде :

$$H = \omega_a a^+ a + \omega_b b^+ b + g(ab + b^+ a^+), \qquad [a, a^+] = 1, \qquad [b, b^+] = 1 \tag{7}$$

и может быть использован для описания, например, простейшего случая взаимодействия монохроматического света с изотропным кристаллом, где $a^+(a)$ являются операторами рождения (уничтожения) фотона, а $b^+(b)$ - соответствующие операторы поперечных фононов [4]. Для приведения гамильтониана к диагональному виду введем каноническое преобразование:

$$a = u\alpha + v\beta^+, \qquad b = \mu\alpha^+ + \nu\beta.$$

Из коммутационных соотношений, накладываемых на новые операторы квазичастиц $\alpha^+, \alpha, \beta^+, \beta$:

$$\begin{array}{lll} [\alpha,\alpha^+] = 1, & [\alpha^+,\beta^+] = 0, & [\alpha,\beta] = 0 \\ [\beta,\beta^+] = 1, & [\alpha^+,\beta] = 0, & [\alpha,\beta^+] = 0 \end{array},$$

следует, что параметры преобразования должны подчиняться следующим равенствам:

$$u^2 - v^2 = 1, \qquad \nu^2 - \mu^2 = 1, \tag{8}$$

обеспечивающим бозе-статистику, и равенству

$$u\mu = v\nu, \tag{9}$$

сохраняющему независимость квантовых переменных, относящихся к разным осцилляторам. Условия (8) и (9) выделяют два набора значений коэффициентов канонического преобразования:

$$u = \nu, \quad v = \mu, \quad uv < 0 \qquad \text{и} \qquad u = -\nu, \quad v = -\mu, \quad uv > 0$$

с одинаковыми значениями квадратов величин u и v :

$$u^2 = \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2\sqrt{1-k^2}}, \qquad v^2 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{2\sqrt{1-k^2}}, \qquad k^2 = \frac{4g^2}{(\omega_a+\omega_b)^2}. \tag{10}$$

Эти два набора дают одинаковый результат при диагонализации (7):

$$H = E_\alpha\alpha^+\alpha + E_\beta\beta^+\beta + E_0, \tag{11}$$

$$E_\alpha = \bar\omega\sqrt{1-k^2} + \frac{\Delta}{2}, \quad E_\beta = \bar\omega\sqrt{1-k^2} - \frac{\Delta}{2},$$

$$E_0 = -\bar\omega + \bar\omega\sqrt{1-k^2}, \quad \bar\omega = \frac{\omega_a+\omega_b}{2}, \quad \Delta = \omega_a - \omega_b.$$

Вычисляя статистическую сумму

$$Q = \frac{\exp(-\tilde\beta E_0)}{\left(1-e^{-\tilde\beta E_\alpha}\right)\left(1-e^{-\tilde\beta E_\beta}\right)} \tag{12}$$

и средние значения

$$\begin{gathered} < n_a > \equiv < a^+a > = v^2(n_\alpha + n_\beta + 1) + n_\alpha, \\ < n_b > \equiv < b^+b > = v^2(n_\alpha + n_\beta + 1) + n_\beta, \\ n_\alpha = < \alpha^+\alpha > = \frac{1}{e^{\tilde\beta E_\alpha} - 1}, \qquad n_\beta = < \beta^+\beta > = \frac{1}{e^{\tilde\beta E_\beta} - 1}, \\ < (\alpha^+\alpha)^2 > = 2n_\alpha^2 + n_\alpha, \qquad < (\beta^+\beta)^2 > = 2n_\beta^2 + n_\beta, \end{gathered} \tag{13}$$

имеем в итоге:

$$\begin{gathered} F_a = D(n_a) - < n_a > = < n_a >^2 \geq 0, \\ F_b = D(n_b) - < n_b > = < n_b >^2 \geq 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Очевидно, что условие субпуассоновской статистики (2) для обоих осцилляторов не выполняется ни при каких значениях параметров $(\omega_a, \omega_b, T, g)$. Заметим, что это заключение указывает на целесообразность пересмотра вывода о возможности возникновения субпуассоновского распределения числа фононов при температурах ниже некоторой пороговой температуры, сделанного в [3].

Сравним выражения для функции F в случаях одного (6) и двух (14) осцилляторов. В обоих случаях условие субпуассоновости не удовлетворяется, однако характер статистики числа заполнения при этом различен. Для связанных бозе-осцилляторов кинематическая независимость их переменных, выраженная равенством (9), приводит к их статистической независимости. Последняя выражена тем обстоятельством, что каждая из формул (14) определяет один осциллятор в термостате. Напротив, нелинейность самодействия осциллятора с гамильтонианом (3) приводит к его нетривиальной статистике, выраженной формулой (6).

Заметим наконец, что при нулевой расстройке Δ статистическая сумма двух осцилляторов (12) равна квадрату статистической суммы (4) одного осциллятора с гамильтонианом (3). Далее, в пределе $\Delta \to 0$ функция F для полного числа квантов $(n_a + n_b)$ системы

(7) равна удвоенной функции F для числа квантов системы (3). Это означает, что при появлении вырождения ($\omega_a = \omega_b$) статистика двух связанных осцилляторов становится идентичной статистике одного осциллятора. Аналогичное свойство статистики полного числа заполнения связанных осцилляторов наблюдалось в задаче квантовой динамики [6].

Литература

[1] Сюракшина Л.А., Ярунин В.С. // ДАН СССР, 1991, т. 321, с. 294.

[2] Шумовский А.С. // ДАН СССР, 1991, т. 316, с. 894.

[3] Говорков Б.Б., Шумовский А.С. // ЖЭТФ, 1992, т. 101, с. 1270.

[4] Назмитдинов Р.Г., Чижов А.В. // Письма в ЖЭТФ, 1991, т. 52, в. 7, с. 993.

[5] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н.(мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.

[6] Перина Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. М.: Мир, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 октября 1993 года.