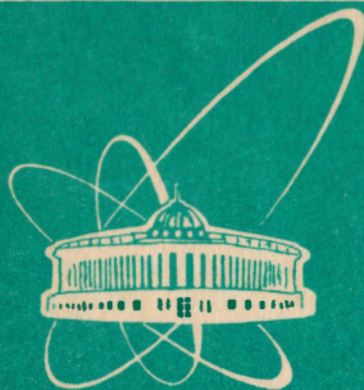


93-267



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P17-93-267

Л.А.Уварова, В.К.Федянин

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ  
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ  
В ОПТИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ЦИЛИНДРЕ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

1993

Одной из актуальных проблем современной физики является задача о распространении электромагнитных волн в средах, оптические свойства которых зависят от поля [1, 2]. Такая задача подробно рассмотрена для сред с плоскопараллельной структурой (см., например, обзоры [8]). Вместе с тем представляется актуальной задача о взаимодействии электромагнитного излучения с дисперсной фазой, составляющими которой являются оптически нелинейные частицы различной формы.

В настоящей работе рассмотрено взаимодействие монохроматической волны с цилиндром (см. рис.1), диэлектрическая проницаемость которого квадратичным образом зависит от поля:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha |E|^2. \quad (1)$$

1. Пусть монохроматическая плоскополяризованная электромагнитная волна, для которой  $E \sim e^{-i\omega t}$ ,  $H \sim e^{-i\omega t}$ , распространяется в некоторой, в общем случае, нелинейной среде.

Из уравнений Максвелла получим следующие уравнения для определения не зависящих от времени векторов  $E$  и  $H$ :

$$\nabla \times E_i = k_2 H_i, \quad \nabla \times H_i = -k_{1i} E_i,$$

$$\nabla D_i = 0, \quad \nabla V_i = 0, \quad (2)$$

где  $k_{1i} = \frac{i\omega}{c} \left( \epsilon_i + i \frac{4\pi \sigma_i}{\omega} \right)$ ,  $k_2 = \frac{i\omega}{c}$ ,  $k^{(i)} = -k_2 k_{1i}$ ,  $\sigma_i$  — проводимость среды,  $c$  — скорость света,  $i = 1$  — цилиндр,  $i = 2$  — континуальная среда;  $\sigma_2 = 0$ .

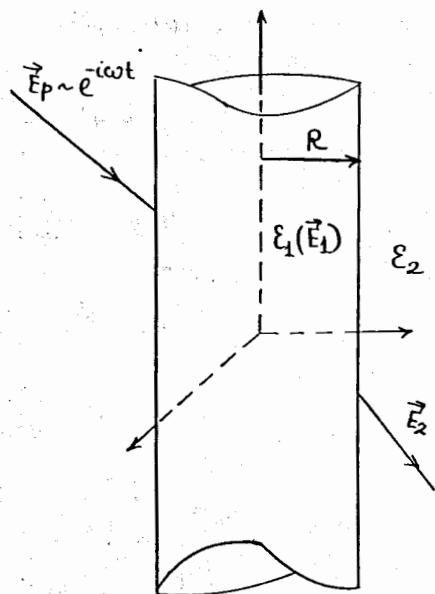


Рис.1

Полагая, что  $E = E^e + E^m$ ,  $H = H^e + H^m$ ,  $E_z^e = E_z$ ,  $H_z^m = H_z$ ,  $H_z^e = 0$ ,  $E_z^m = 0$ , из уравнений (2) получим уравнения для скалярных потенциалов  $V^e$ ,  $V^m$ , с помощью которых можно затем определить составляющие векторов  $E$  и  $H$ . Эти уравнения, а также формулы для  $E_j$  и  $H_j$  ( $j = r, z, \varphi$ ) имеют вид

$$\nabla(k\nabla V^e) + k^2 \tilde{k} \int \tilde{k} \frac{\partial^2 V^e}{\partial z \partial \varphi} \partial z \partial \varphi - \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} \frac{\partial V^e}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} \frac{\partial V^e}{\partial r} \partial z \right) - \frac{1}{r^2} \left( \int \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} \frac{\partial V^e}{\partial \varphi} \partial z \right) = 0, \quad (3)$$

$$\Delta V^m + k^2 \tilde{k} V^m - k^2 \tilde{k} \int V^m \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \varphi} \partial \varphi = 0, \quad (4)$$

$$H_r = H_r^e + H_r^m = -\frac{k_{11}^0}{r} \int \tilde{k} \frac{\partial^2 V^e}{\partial z \partial \varphi} \partial z + \frac{\partial^2 V^m}{\partial r \partial z},$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V^m}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V^m}{\partial \varphi \partial z},$$

$$H_\varphi = k_{11}^0 \int \tilde{k} \frac{\partial^2 V^e}{\partial r \partial z} \partial z + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V^m}{\partial \varphi \partial z}, \quad (5)$$

$$E_r = \frac{\partial^2 V^e}{\partial r \partial z} + \frac{k_2}{r} \frac{\partial V^m}{\partial \varphi},$$

$$E_z = -\frac{1}{kr} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \tilde{k} \frac{\partial V^e}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \tilde{k} \frac{\partial V^e}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{1}{kr} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} \frac{\partial V^e}{\partial r} \partial z \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} \frac{\partial V^e}{\partial \varphi} \partial z \right],$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V^e}{\partial z \partial \varphi} - k_2 \frac{\partial V^m}{\partial r}. \quad (6)$$

Здесь обозначено  $\tilde{k} = \varepsilon/\varepsilon_0$ ,  $k_{11}^0 = \frac{i\omega\varepsilon_0}{c}$ . Уравнения (3)–(4) и выражения (5)–(6) имеют место, если выполнено одно из следующих условий:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} = 0, \quad E_\varphi^e E_\varphi^m + E_r^e E_r^m = 0.$$

На границе двух сред ( $r = R$ ) должно выполняться условие равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного векторов, а именно:

$$E_{pz}(R) + E_{sz}(R) = E_{1z}(R), \quad E_{p\varphi}(R) + E_{s\varphi}(R) = E_{1\varphi}(R),$$

$$H_{pz}(R) + H_{sz}(R) = H_{1z}(R), \quad H_{p\varphi}(R) + H_{s\varphi}(R) = H_{1\varphi}(R), \quad (7)$$

где индекс  $p$  относится к падающей волне, а индекс  $s$  — к рассеянной.

2. Найдем асимптотические решения для электрического вектора, поскольку именно знание электрического вектора необходимо при решении различных энергетических задач. Будем полагать, что вклад  $|E|^2$  в величину диэлектрической проницаемости не особенно велик. Тогда, следуя работе [4], меру нелинейности  $h = \max |\alpha| |E|^2 \varepsilon_0^{-1}$  можно считать малым параметром. В таком случае можно ввести медленные переменные по формуле  $\tilde{y} = yh$ .

2.1. Полагая электрический потенциал  $V^e = \varphi(r, \varphi) e^{ikr}$ , вводя медленную переменную  $\chi = rh^2$  и ограничиваясь вторым порядком малости  $h^2$ , из уравнения (3) получим следующее нелинейное уравнение:

$$i \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \chi} + \frac{1}{2\tilde{\chi}} \tilde{\psi} \right) = \frac{1}{2\tilde{\chi}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} \pm \frac{1}{2} |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi} = 0. \quad (8)$$

Здесь полагается, что диэлектрическая проницаемость частицы зависит от  $z$ -компонента электрического вектора:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \pm \alpha |E_z|^2$ ,  $\sigma_1 \sim 0$ . Вместе с тем из рассмотрения линейной задачи следует, что  $E_r = E_\varphi = 0$  в случае нормального падения на цилиндр поляризованной параллельно плоскости электрической волны (15), что находится в соответствии с выбранной зависимостью  $\varepsilon$  от электрического вектора. Через  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\chi}$ ,  $\tilde{\varphi}$  обозначены:  $\tilde{\psi} = (k^{(1)})^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon_0}} \psi/h$ ,  $\tilde{\chi} = \chi k^{(1)}$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi/h$ . Путем замены

$$\tilde{\varphi} = \frac{\Psi_0(\tilde{\chi})}{\sqrt{\tilde{\chi}}} \exp \left( \frac{im^2}{2\tilde{\chi}} + im\tilde{\varphi} \right)$$

уравнение (8) можно преобразовать к следующему:

$$\frac{i\partial\Psi_0}{\partial\tilde{\chi}} \pm \frac{1}{2} \frac{|\Psi_0|^2\Psi_0}{\tilde{\chi}} = 0. \quad (9)$$

После интегрирования уравнения (9) получим следующее выражение для электрического потенциала

$$V^e = \Gamma_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \left( (k^{(1)})^2 \sqrt{k^{(1)}r} \right)^{-1} \times \\ \times \exp \left[ i \left( \pm 0,5 |\Gamma_e|^2 \ln h^2 k^{(1)}r + \frac{m^2}{2k^{(1)}rh^2} + k^{(1)}r + \frac{m\varphi}{h} \right) \right], \quad (10)$$

где  $m, \Gamma_e$  — постоянные. Формула для компонента  $E_z$  запишется так:

$$E_z = \Gamma_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha k^{(1)}r}} \exp \left[ i \left( \pm 0,5 |\Gamma_e|^2 \ln h^2 k^{(1)}r + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m^2}{2k^{(1)}rh^2} + k^{(1)}r + \frac{m\varphi}{h} \right) \right]. \quad (11)$$

Определив  $E_z$ , получим следующее приближенное уравнение для магнитного скалярного потенциала:

$$i \left( \zeta \tilde{\chi}' + \frac{\zeta}{2\tilde{\chi}} \right) + \frac{1}{2\tilde{\chi}^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tilde{\varphi}^2} \pm \frac{|\Gamma_e|^2 \zeta}{2\tilde{\chi}} = 0, \quad (12)$$

где полагалось  $V^m = \zeta e^{ik^{(1)}r}$ . Полученное на основе записанного выше уравнения выражение для  $V^m$  структурно идентично (10), а именно:

$$V^m = \Gamma_m \left( (k^{(1)})^2 \sqrt{k^{(1)}r} \right)^{-1} \times \\ \times \exp \left[ i \left( \pm 0,5 |\Gamma_e|^2 \ln k^{(1)}rh^2 + \frac{m_1}{2k^{(1)}rh^2} + \frac{m_1\varphi}{h} \right) \right]. \quad (13)$$

С помощью полученных выражений для  $V^e, V^m, E_z$ , выражений (5)–(6) и выражений для падающей и рассеянной волн [5]

$$E_{pz} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(kr) e^{in\varphi}, \quad E_{sz} = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n b_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi},$$

$$H_{p\varphi} = \frac{ikE_0}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n'(kr) e^{in\varphi}, \quad H_{s\varphi} = \frac{ikE_0}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n b_n H_n^{(1)'}(kr) e^{in\varphi},$$

(где  $E_0$  — амплитуда падающей волны,  $k = k^{(2)}, J_n(x), H_n^{(1)}(x)$  — функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка  $n$  соответственно,  $b_n$  — коэффициенты, штрих означает производную по аргументу) можно удовлетворить условиям на границе цилиндра, полагая, что основными в разложении являются нулевая и первая гармоники.

Решая указанную краевую задачу при  $k^{(1)}R \gg 1$ , получим, что  $m = 0,5$ , а величина  $z$ -компонента электрической напряженности определяется формулой

$$E_z = -4E_0 \left( \frac{2}{\pi kr} \right)^{0,5} (1 - e^{i\varphi}) \exp \left[ i \left( k^{(1)}r + \frac{1}{8k^{(1)}r} + \frac{\pi}{4} - \right. \right. \\ \left. \left. - R(k + k^{(1)}) \pm \frac{4E_0^2 \alpha k^{(1)}}{\epsilon_0 k} \ln \frac{k^{(1)}r}{k^{(1)}R} - \frac{1}{8k^{(1)}R} \right) \right]. \quad (14)$$

Представляет интерес рассмотреть противоположный случай малости дифракционного параметра,  $k^{(1)}R \ll 1$ . В этом случае исходному уравнению (8) приближенно можно удовлетворить с помощью функции, представляющей собой следующий ряд

$$\psi = (k^{(1)})^{-2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2k^{(1)}r}} \exp \left( \pm \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2 \ln h^2 k^{(1)}r \right) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp \left[ i \left( \frac{n^2}{2k^{(1)}r} + n\varphi \right) \right]. \quad (15)$$

Соответственно,  $z$  — составляющая электрического вектора, также запишется в виде ряда

$$E_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha k^{(1)}_r}} \exp \left[ \pm \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2 \ln h^2 k^{(1)}_r \right] \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp \left[ i \left( \frac{n^2}{2k^{(1)}_r} + n\varphi \right) \right]. \quad (16)$$

Подставляя (15) в краевые условия на границе «нелинейный цилиндр — линейная среда» и учитывая, что должно выполняться неравенство  $(k^{(1)}_R)^{-1} \gg \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2$  в соответствии с выводом асимптотического уравнения, для коэффициентов  $A_n$  получим следующие выражения:

$$A_n = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon_0}} \exp \left( \mp \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2 \ln h^2 k^{(1)}_r \right) (-i)^n i E_0 \times \frac{(k^{(1)}_R)^{0,5}}{\pi k R} \left( H_n^{(1)'}(kR) + \frac{H_n^{(1)}(kR)}{2k^{(1)}_R} + i \frac{n^2 H_n^{(1)}(kR)}{2(k^{(1)}_R)^2 R^2} \right)^{-1},$$

$$|A_n|^2 = \frac{4\alpha E_0^2 k^{(1)}_R}{\epsilon_0 \pi^2 (kR)^2} \left| H_n^{(1)'}(kR) + \frac{H_n^{(1)}(kR)}{2k^{(1)}_R} + i \frac{n^2 H_n^{(1)}(kR)}{2(k^{(1)}_R)^2 R^2} \right|^{-2}. \quad (17)$$

Из полученных формул (14), (16)—(17) следует, в частности, зависимость фазы электрического вектора от амплитуды падающей волны.

2.2. Рассмотрим далее распространение электромагнитной волны, выделяя направление  $z$ ,  $V^e = \psi(r, z) e^{ikz}$ . Вводя переменные  $\tilde{r} = rk^{(1)}h^2/2$ ,  $\tilde{z} = zk^{(1)}h$  и ограничиваясь порядком  $h^3$ , из уравнения для скалярного потенциала  $V^e$  получим следующую модификацию НУШ

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} + i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}} + \frac{i \tilde{\psi}}{2\tilde{r}} \pm 2|\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi} = 0. \quad (18)$$

Как показано в работе [6], с помощью замены

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\tilde{r}} e^{iz/4\tilde{r}} = \Psi_0(x, \zeta),$$

где  $x = \tilde{z}/\tilde{r}$ ,  $\zeta = -\frac{1}{\tilde{r}}$ , данное уравнение трансформируется в классическое нелинейное уравнение Шредингера

$$i \Psi_0 \zeta + \Psi_{0xx} \pm 2|\Psi_0|^2 \Psi_0 = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19), как хорошо известно, имеет, в частности, солитонные решения, причем эти решения оказываются топологически различными в зависимости от того, рассматривается знак «плюс» или «минус».

Выпишем такие решения (см., например, [7]):

$$\Psi_{0s}^{(+)} = A_0 \exp \left[ i \left( \frac{vx}{2} - \left( \frac{v^2}{2} - A_0^2 \right) \zeta + \theta_0 \right) \right] \times \text{sech} (A_0(x - v\zeta - x_0)), \quad (20)$$

$$\Psi_{0s}^{(-)} = A_0 \exp \left[ i \left( \frac{vx}{2} - \left( \frac{v^2}{4} + 2A_0^2 \right) \zeta + \theta_0 \right) \right] \times \text{th} [A_0(x - v\zeta - x_0)], \quad (21)$$

где  $A_0$  — амплитуда,  $v$  — групповая скорость солитона,  $x_0, \theta_0$  — постоянные. Учитывая (20), получим следующее решение для потенциала  $V^e$ , отвечающее условиям самофокусировки луча,

$$V_s^{e+} = 2 \left( \frac{2\epsilon_0}{\alpha} \right)^{0,5} \frac{B_0}{rk^{(1)}} \exp \left[ i \left( k^{(1)}_r + \frac{z^2 k^{(1)}}{2r} + \frac{V_0 z}{r} + \left( \frac{v_0^2}{4} - B_0^2 \right) \frac{2}{k^{(1)}_r} + \theta_0 \right) \right] \text{sech} \left( 2B_0 \left( \frac{z}{r} + \frac{V_0}{2k^{(1)}_r} \right) \right), \quad (22)$$

где  $x_0 = 0$  ввиду симметрии задачи,  $B_0, v_0, \theta_0$  — постоянные. Компонент  $E_z$  в первом приближении (как это следует из второй формулы (6)) можно считать пропорциональным  $V^e$ . Из выражения (22) следует, что вдоль  $z$  координаты решение представляет собой бризер с вершиной при  $z^* = -v_0(k^{(1)})^{-1}$ . В этом же сечении  $z = z^*$  находится и единственная сингулярная точка, в которой  $E_z^+ \rightarrow \infty$ , а именно точка  $r = 0$ . Что касается распространения волны в радиальном направлении, то она имеет два симметричных относительно оси цилиндра максимума, сдвигающихся от центра с увеличением координаты  $z$  согласно следующей формуле

$$r^* k^{(1)} \cong 1,667 B_0 (v_0 + k^{(1)} z), \quad (23)$$

где  $r^*$  — положение максимума.

Знаку «минус» уравнения (18) соответствует следующее решение:

$$V_s^{e-} = 2 \left( \frac{2\varepsilon_0}{\alpha} \right)^{0,5} \frac{B_0}{rk^{(1)}} \exp \left[ i \left( k^{(1)}r + \frac{z^2 k^{(1)}}{2r} + \frac{V_0 z}{r} + \left( \frac{V_0^2}{4} + 2B_0^2 \right) \frac{2}{k^{(1)}r} + \theta_0 \right) \right] \text{th} \left( 2B_0 \left( \frac{z}{r} + \frac{V_0}{k^{(1)}r} \right) \right). \quad (24)$$

Имеют место и квазипериодические решения (с учетом множителя  $\frac{1}{r}$ ) исходного уравнения (18), которые могут быть получены в соответствии с периодическими решениями НУШ [8].

3. Непосредственно из системы (2) можно получить ряд асимптотических решений, полагая, что тот или иной компонент электрической напряженности превалирует над другими. В данном пункте мы будем полагать, что таким основным компонентом является  $E_r$ , причем зависимость  $E_r(\varphi)$  отсутствует. В таком случае из (2) получим следующее уравнение для  $E_r$ :

$$\frac{d^2 E_r}{dz^2} + k^2 \hat{\varepsilon}(E_r) E_r = 0, \quad (25)$$

где  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(E) + i \frac{4\pi d\sigma}{\omega}$ . Условие калибровки  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  будет удовлетворяться приближенно, если рассматриваемая область не содержит нулевой точки. Рассматривая, по-прежнему, квадратичную зависимость диэлектрической проницаемости от поля, полагаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \pm \alpha |E_r|^2.$$

3.1. Знак «минус»,  $\sigma \sim 0$ . Проинтегрировав (25), получим

$$\tilde{z} - \tilde{z}_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2} \int \frac{dE_r}{(\tilde{E}_r^4 - 2\tilde{E}_r^2 + 2c_0)^{0,5}}, \quad (26)$$

где введены безразмерные величины  $\tilde{z} = zk\sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $\tilde{E}_r = \frac{E_r}{E_{r0}}$ ,  $E_{r0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\alpha}}$ ,  $\tilde{E}_j$  — корни знаменателя (26),  $j = 1 + 4$ ,  $\tilde{E}_j = \pm (1 \pm (1 - 2c_0)^{1/2})^{1/2}$ ,  $\tilde{E}_1 \geq \tilde{E}_2 \geq \tilde{E}_3 \geq \tilde{E}_4$ ,  $c_0, z_0$  — постоянные. Если величина  $2c_0$  заключена между нулем и единицей, то корни  $\tilde{E}_j$  действительны. Обращая формулу (16), получим решение исходного уравнения. Выражения для  $\tilde{E}_r$  будут различными в зависимости от интервала между корнями  $\tilde{E}_j$ , которому

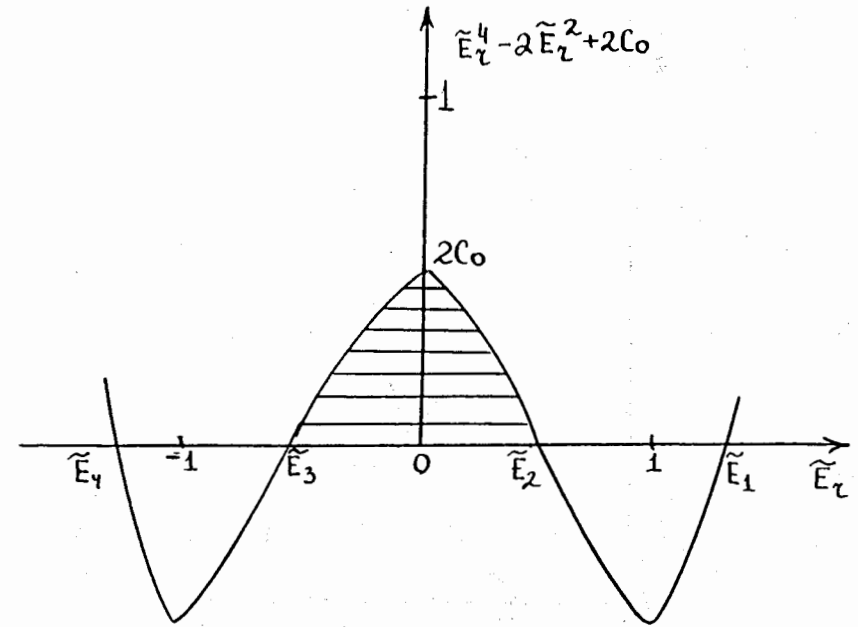


Рис.2

принадлежит  $\tilde{E}_r$ . В данном случае, как следует из рис.2, представляет интерес рассмотреть решение  $\tilde{E}_r \in [\tilde{E}_3, \tilde{E}_2]$ . Такое решение имеет вид

$$E_r = E_2 \frac{E_1 + E_2 - 2E_1 \text{sn}^2 \left( \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2}{2\sqrt{2}} (\tilde{z} - \tilde{z}_0), \kappa \right)}{E_1 + E_2 - 2E_2 \text{sn}^2 \left( \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2}{2\sqrt{2}} (\tilde{z} - \tilde{z}_0), \kappa \right)}, \quad (27)$$

где  $\kappa = \frac{2(\tilde{E}_1 \tilde{E}_2)^{0,5}}{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2}$ ,  $\text{sn}(x, \kappa)$  — функция Якоби. Длина кноидальной волны соответственно равна

$$\lambda_k = \frac{4\sqrt{2} K(\kappa)}{k(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) \sqrt{\varepsilon_0}},$$

где  $K(\kappa)$  — полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Определив зависимость  $E_r(z)$ , можно также определить и величину энергии электромагнитной волны

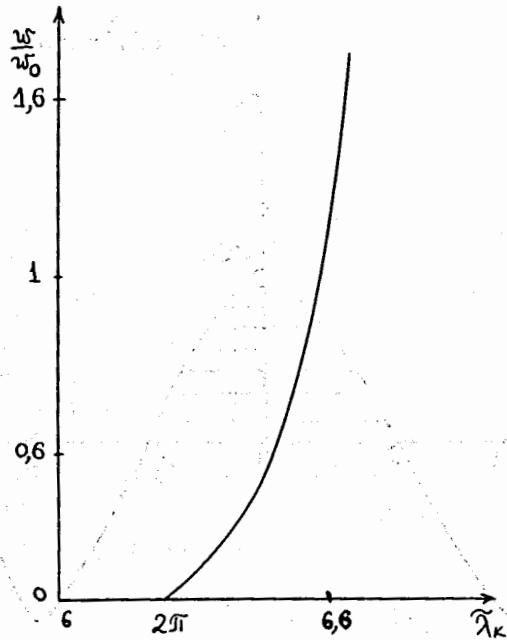


Рис.3

$$w = \frac{\epsilon_0^{1.5} \tilde{\lambda}_k w_0^{2K(\kappa)}}{2K(\kappa)} \int_0^{\tilde{x}} \left( c_0 - \left( \frac{dE_r}{dx} \right)^2 \frac{4K^2(\kappa)}{\tilde{\lambda}_k} \right) dx, \quad (28)$$

где  $\tilde{x} = \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_0}{\tilde{\lambda}_k} 2K(\kappa)$ ,  $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k k \sqrt{\epsilon_0}$ ,  $w_0 = \epsilon_0^{1.5} (2k\alpha)^{-1}$ . На рис.3 представлена

полученная численным интегрированием (28) кривая зависимости  $\frac{w}{w_0}$  от безразмерной длины волны  $\tilde{\lambda}_k$ .

3.2. В этом пункте рассмотрим уравнение (25) с произвольным значением величины  $\sigma$ :

$$\frac{d^2 \tilde{E}_r}{d\tilde{z}^2} + \tilde{E}_r (1 + ib_0) \pm |\tilde{E}_r|^2 \tilde{E}_r = 0, \quad (29)$$

где  $b_0 = \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon_0}$ .

Полагая  $E_r = S e^{i\delta}$ , что приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} S'' - S(\delta')^2 + S \pm S^3 &= 0, \\ S\delta'' + 2S'\delta' + b_0 S &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Вводя переменные  $\delta' = \gamma$ ,  $S' = u$  и учитывая, что  $S'' = u'_S u$ , вместо (30) получим систему

$$\begin{aligned} u'_S u - S\gamma^2 + S^2 \pm S^3 &= 0, \\ \gamma'_S u S + 2u\gamma + b_0 S &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение (31) будем искать в виде разложения в ряд по степеням параметра  $b_0$

$$\begin{aligned} \gamma &= b_0 \gamma_1 + b_0^2 \gamma_2 + \dots \\ u &= u_0 + b_0 u_1 + b_0^2 u_2 + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

После подстановки разложений (32) в систему (31) получим, что

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^{-1}, \quad \gamma_1 = -S^{-2} \int S^2 u_0^{-1} dS, \\ u_2 &= u_0^{-1} \int S \gamma_1^2 dS - 0.5 u_0^{-3}, \quad \gamma_2 = S^{-2} \int S^2 u_0^{-3} dS, \\ u_3 &= 2u_0^{-1} \int S \gamma_1 \gamma_2 dS - u_2 u_0^{-2}, \\ \gamma_3 &= S^{-2} \int (u_2 u_0^{-2} - u_0^{-5}) S^2 dS, \end{aligned}$$

где  $u_0 = (-S^2 \mp \frac{S^4}{2} + c_0)^{0.5}$ . Ограничиваясь в разложении (32) первой степенью  $b_0$ , найдем следующие решения для амплитуды  $S(\tilde{z})$  и фазы  $\delta(\tilde{z})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{z} - \tilde{z}_0 &= \int (-S^2 \mp 0.5 S^4 + c_0)^{-0.5} dS - \\ &- b_0 \int (-S^2 \mp 0.5 S^4 + c_0 + b_0)^{-1} (-S^2 \mp 0.5 S^4 + c_0)^{-0.5} dS, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\delta - \delta_0 = b_0 \int \frac{u_0(S) \gamma_1 dS}{u_0^2 + b_0}, \quad (33)$$

где  $\gamma_1 = -S^{-2} \int \frac{S^2 dS}{(-S^2 \mp 0.5 S^4 + c_0)^{0.5}}$ .

Из выражений (32) — (33) следует, в частности, линейная зависимость координаты  $\tilde{z}$  и фазы  $\delta$  от  $b_0$  при выполнении неравенства  $c_0 \gg b_0$ .

Проведенный в работе анализ взаимодействия электромагнитных волн с цилиндром, диэлектрическая проницаемость которого зависит от поля, указывает на имеющие место качественные отличия полученных решений от решений для цилиндра с постоянными оптическими характеристиками, такие, как: зависимость фазы волны в цилиндре амплитуды падающей волны, возникновение солитонных решений и др.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. — Успехи физ. наук. 1967, т.93, 1, с.19—70.
2. Гиббс Х. — Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
3. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.1, с.198—253.
4. Абловиц М., Сигур Х. — Солитоны и метод обратной задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
5. Борен К., Хафмен Д. — Поглощение и рассеяние света малыми частицами. Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
6. Бурцов С.П., Захаров В.Е., Михайлов А.В. — ТМФ, 1987, т.70, 3, с.323—341.
7. Makhankov V.G., Fedyanin V.K. — Nonlinear Effects in Quasi-One-Dimensional Models of Condensed Matter Theory. — Phys. Reports, 1984, v.104.
8. Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. — Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера. ТМФ, 1987, т.72, 2, с.183—196.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 июля 1993 года.