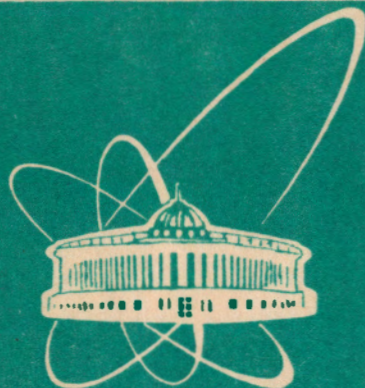


93-227



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P17-93-227

Б.К.Мурзахметов¹, А.В.Чижов

СЖАТЫЕ ФОКОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ
И ДЕТЕКТИРОВАНИЕ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Направлено в журнал «Оптика и спектроскопия»

¹Институт ядерной физики АН Казахстана, Алма-Ата

1993

В последнее десятилетие в квантовой оптике значительное внимание было уделено теоретическим исследованиям свойств сжатых состояний электромагнитного поля [1]. В этих состояниях световое излучение проявляет уменьшенные по сравнению с уровнем "дробового" шума флуктуации одной из квадратурных компонент при соответствующем увеличении флуктуаций сопряженной компоненты. Успешные эксперименты по генерации сжатых состояний в различных двухфотонных процессах [2] открывают перспективу их использования в таких разных областях физики, как детектирование гравитационных волн при помощи оптической интерферометрии [3] и передача оптической информации с малыми искажениями [4]. Появилась также надежда, что в ближайшее время будет возможна генерация другого класса состояний с ярко выраженными неклассическими свойствами — фоковских состояний электромагнитного поля. Недавно было показано [5], что при инжектировании возбужденных атомов в полость микроазера электромагнитное поле в полости в результате последовательного взаимодействия с атомами может переходить в состояние с определенным числом фотонов. Помещая поле в фоковском состоянии на входе "сжимающего" свет устройства типа параметрического усилителя, на выходе можно получить излучение в сжатом фоковском состоянии (СФС). Статистические и фазовые свойства одномодовых СФС изучались в [6, 7]. В работе [8] были введены двухмодовые СФС и изучены статистика числа фотонов и фазовые свойства этих состояний. СФС являются состояниями с ярко выраженными неклассическими свойствами и, по всей видимости, могут реализовываться не только для оптических полей, но и для бозе-полей различной физической природы в молекулярной физике и теории конденсированных сред [9, 10].

В данной работе предлагается использование СФС в проблеме детектирования гравитационного излучения. Рассмотрение основано на работе Холленхорста [11], в которой были исследованы квантовые пределы чувствительности резонансной гравитационной антенны. Простейшей моделью такой антенны является затухающий гармонический осциллятор, испытывающий воздействие коротких импульсов гравитационного излучения, рассматриваемых как классическое внешнее возмущение. Классическое уравнение движения такой системы имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m\omega}{Q} \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = -F(t), \quad (1)$$

Объединенный институт
высших исследований
Библиотека

где мы рассматриваем осциллятор как систему двух точечных частиц массой $m/2$, соединенных струной длины l , x – изменение расстояния между частицами, Q – фактор, характеризующий затухание осциллятора. Вспышка гравитационного излучения, произошедшая в интервал времени $-\tau \leq t \leq 0$, индуцирует сдвиг

$$x(t) = \text{Re} \left[(U_i + U_s) \exp \left(-\frac{\omega t}{2Q} - i\omega t \right) \right], \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где U_s – комплексная амплитуда, связанная с излучением:

$$U_s \equiv -\frac{i}{m\omega} \int_{-\tau}^0 F(t') e^{i\omega t'} e^{\omega t'/2Q} dt' \quad (3)$$

и U_i – комплексная амплитуда антенны до прихода импульса. Определим энергию сигнала как энергию, запасенную антенной в результате взаимодействия с гравитационным излучением:

$$E_s = \frac{1}{2} m\omega^2 |U_s|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\tau}^0 F(t') e^{i\omega t'} e^{\omega t'/2Q} dt' \right|^2. \quad (4)$$

Теперь перейдем к квантовомеханическому рассмотрению проблемы детектирования гравитационного импульса. Для этого определим следующие две вероятности. Вероятностью детектирования Q_D назовем вероятность того, что сигнал был зарегистрирован при гипотезе, что гравитационный импульс действительно пришел. Вероятностью ложного сигнала Q_0 будем называть вероятность регистрации события при гипотезе, что импульса в рассматриваемый интервал времени не было.

Рассмотрим теперь возможные состояния системы в момент измерения. Пусть ρ_0 – матрица плотности, описывающая систему в этот момент при гипотезе, что импульса гравитационной волны не было. Матрицу плотности при альтернативной гипотезе обозначим ρ_1 .

В случае, когда ρ_0 и ρ_1 описывают чистые состояния антенны, т.е. $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ и $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, соотношение между введенными вероятностями Q_0 и Q_D имеет простой вид [11]:

$$Q_D = \begin{cases} [\sqrt{Q_0}|\gamma| + (1 - Q_0)^{1/2}(1 - |\gamma|^2)^{1/2}]^2, & \text{при } 0 \leq Q_0 \leq |\gamma|^2, \\ 1, & \text{при } |\gamma|^2 \leq Q_0 \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

где $\gamma \equiv \langle\psi_0|\psi_1\rangle$. Заметим, что в случае детектирования гравитационных волн ожидается очень малая вероятность события. Поэтому значение вероятности ложной тревоги $Q_0 = 0$ представляет особый интерес.

Вычислим теперь матрицы плотности ρ_0 и ρ_1 . В качестве гравитационной антенны будем рассматривать одномерный гармонический осциллятор с бесконечно большой добротностью Q . Тогда гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + F(t)(\hbar/2m\omega)^{1/2}(a^\dagger + a), \quad (6)$$

где $a^\dagger = (m\omega/2\hbar)^{1/2}\hat{x} - i(2m\hbar\omega)^{1/2}\hat{p}$. Предположим, что осциллятор приготовлен в момент времени $t = -\tau$ в состоянии с матрицей плотности ρ_i . Далее, в течение времени τ , ему предоставляется возможность взаимодействия с импульсом гравитационного излучения. Если $F(t) = 0$ в этот интервал времени, то при $t = 0$ состояние осциллятора будет выражаться формулой:

$$\rho_0 = e^{-i\omega\tau a^\dagger a} \rho_i e^{i\omega\tau a^\dagger a}. \quad (7)$$

При альтернативной ситуации, когда $F(t) \neq 0$ в интервал времени τ , состояние системы при $t = 0$ будет описываться матрицей плотности

$$\rho_1 = e^{-i\omega\tau a^\dagger a} D(\mu e^{i\omega\tau}) \rho_i D^\dagger(\mu e^{i\omega\tau}) e^{i\omega\tau a^\dagger a}, \quad (8)$$

где $D(\mu) \equiv \exp(\mu a^\dagger - \mu^* a)$ и μ – нормированная комплексная амплитуда:

$$\mu = -\frac{i}{(2m\hbar\omega)^{1/2}} \int_{-\tau}^0 F(t') e^{i\omega t'} dt'. \quad (9)$$

Сравнивая с (3), мы видим, что $\mu = (\frac{m\omega}{2\hbar})^{1/2} U_s$, где U_s – классическая амплитуда смещения для $Q \rightarrow \infty$. Для энергии сигнала E_s получаем формулу:

$$E_s = \frac{1}{2} m\omega^2 |U_s|^2 = \hbar\omega |\mu|^2. \quad (10)$$

Используя формулу

$$e^{-i\omega\tau a^\dagger a} D(\mu) e^{i\omega\tau a^\dagger a} = D(\mu e^{-i\omega\tau}), \quad (11)$$

перепишем (8) в виде:

$$\rho_1 = D(\mu) \rho_0 D^\dagger(\mu). \quad (12)$$

Выберем теперь в качестве начального состояния антенны сжатое фоковское состояние (СФС):

$$|\psi_i\rangle = e^{i\omega r a^\dagger} a S(\xi)|n\rangle, \quad (13)$$

где $S(\xi) \equiv \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2}\right]$ – оператор сжатия, а комплексное число $\xi = r e^{2i\theta}$ задает амплитуду и фазу сжатия поля. При $t = 0$ имеем:

$$|\psi_0\rangle = e^{-i\omega r a^\dagger} a |\psi_i\rangle = S(\xi)|n\rangle, \quad (14)$$

и, следовательно, $\rho_0 = S(\xi)|n\rangle\langle n|S^\dagger(\xi)$ и $\rho_1 = D(\mu)S(\xi)|n\rangle\langle n|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\mu)$. Вычислим теперь величину γ . Используя формулы

$$\begin{aligned} S^\dagger a S &= a \cosh r + a^\dagger e^{2i\theta} \sinh r, \\ S^\dagger a^\dagger S &= a^\dagger \cosh r + a e^{-2i\theta} \sinh r, \end{aligned} \quad (15)$$

получаем:

$$\gamma = \langle n|S^\dagger(\xi)D(\mu)S(\xi)|n\rangle = \langle n|D(\mu \cosh r - \mu^* e^{2i\theta} \sinh r)|n\rangle. \quad (16)$$

Воспользовавшись известной формулой для матричных элементов оператора сдвига в базисе фоковских состояний [12]

$$\langle m|D(\mu)|n\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\mu|^2\right\} \left(\frac{m!}{n!}\right)^{1/2} (-\mu^*)^{n-m} L_m^{(n-m)}(|\mu|^2), \quad \text{для } m \leq n, \quad (17)$$

где $L_m^{(n-m)}(x)$ – присоединенные полиномы Лагерра, приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} \gamma &= L_n \left[|\mu|^2 (\cosh r + \sinh r \cos 2(\phi - \theta)) \right] \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}|\mu|^2 (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2(\phi - \theta))\right\}, \quad \mu = |\mu| e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь можно использовать уравнение (5) для вычисления вероятности детектирования Q_D . В случае $Q_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} Q_D &= 1 - \exp\left\{-\frac{E_s}{\hbar\omega} (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2(\phi - \theta))\right\} \\ &\times \left[L_n \left(\frac{E_s}{\hbar\omega} (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2(\phi - \theta)) \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что фаза ϕ в уравнении (19) является функцией времени прихода и формы импульса гравитационной волны. Пока мы предполагали, что она нам известна. На

практике это предположение является некорректным, и поэтому необходимо проинтегрировать по всем возможным значениям фазы. Минимальную энергию сигнала E_{\min} , которую способна детектировать антенна, определим следующим образом: для $Q_0 = 0$ максимизируем Q_D и найдем минимальную энергию сигнала, такую, что вероятность детектирования равна по меньшей мере 50% для всех $E_s \geq E_{\min}$. Тогда для E_{\min} получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \int_0^{2\pi} (d\phi/2\pi) \exp\left\{-\frac{E_{\min}}{\hbar\omega} (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2(\phi - \theta))\right\} \\ &\times \left[L_n \left(\frac{E_{\min}}{\hbar\omega} (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2(\phi - \theta)) \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 1 представлены графики зависимости минимального детектируемого сигнала E_{\min} от фактора сжатия $\alpha = \exp(-r)$ для различных значений параметра n (числа квантов поля в фоковском состоянии на входе “сжимающего” устройства). Заметим, что значение $n = 0$ соответствует приготовлению антенны в состоянии сжатого вакуума. Как было показано Холленхорстом, для таких состояний повышение чувствительности детектора достигается увеличением степени сжатия поля. Однако генерация полей с сильным сжатием представляет собой довольно сложную техническую проблему. Из рис. 1 видно, что повышения чувствительности детектора можно добиться не только за счет увеличения степени сжатия поля, но и за счет увеличения параметра n . Это согласуется с результатами работ Брагинского, в которых на основании принципа неопределенности было показано, что приготовление антенны в собственных энергетических состояниях позволяет понижать порог детектирования сигнала за счет увеличения возбуждения осциллятора [13]. Так, при использовании вместо сжатого вакуума СФС с $n = 1$ чувствительность детектора возрастает на порядок. Дальнейшее увеличение n приводит не к столь быстрому возрастанию чувствительности.

Таким образом, использование в качестве начального состояния детектора сжатого фоковского состояния позволяет оптимальным образом добиться требуемой чувствительности детектора комбинированием степени сжатия и возбуждения определенного числа квантов осциллятора.

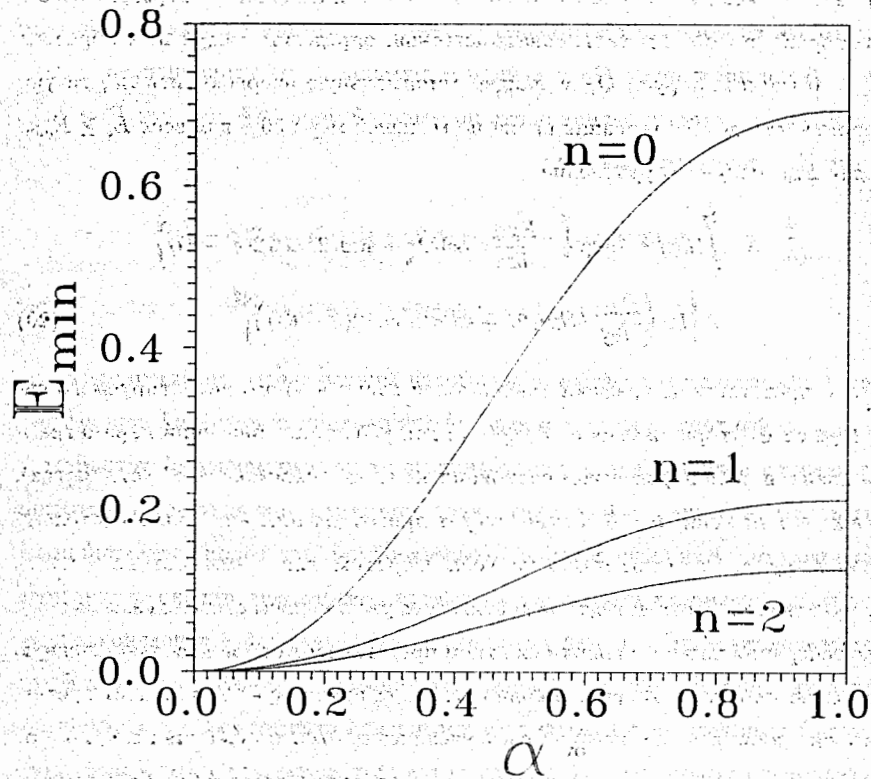


Рис. 1. Зависимость величины минимального детектируемого сигнала E_{\min} (в единицах $\hbar\omega$) от фактора сжатия $\alpha = \exp(-r)$ для различных значений числа квантов поля n в начальном фоковском состоянии

Список литературы

- [1] Zaheer K., Zubairy M.S. // *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* 1990. V. 28. P. 143-235; Teich M.C., Saleh B.E.A. // *Quant. Opt.* 1989. V. 1. P. 153-191.
- [2] Специальные выпуски, посвященные сжатым состояниям света: *J. Opt. Soc. Am. B.* 1987. V. 4. N 10.; *J. Mod. Opt.* 1987. V. 34. N 6/7.
- [3] Caves C.M. // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. N 8. P. 1693-1708.
- [4] Yuen H.P., Shapiro J.H. // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 1978. V. 24. P. 657-662; 1980. V. 26. P. 78-84.
- [5] Filipowicz P., Javanainen J., Meystre P. // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1986. V. 3. P. 906-918.
- [6] De Oliveira F.A.M., Kim M.S., Knight P.L., Bužek V. // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 41. N 5. P. 2645-2652.
- [7] Chizhov A.V., Gantsog Ts., Murzakhmetov B.K. // *Quant. Opt.* 1993. V. 5. N 2. P. 85-93.
- [8] Chizhov A.V., Murzakhmetov B.K. // *Phys. Lett. A.* 1993. V. 176. N 1/2. P. 33-40.
- [9] Gilmore R., Yuan J.-M. // *J. Chem. Phys.* 1989. V. 91. N 2. P. 917-923.
- [10] Шумовский А.С. // *ТМФ.* 1991. Т. 89. N 3. С. 438-445.
- [11] Hollenhorst J.N. // *Phys. Rev. D.* 1979. V. 19. N 6. P. 1669-1679.
- [12] Cahill K.E., Glauber R.J. // *Phys. Rev.* 1969. V. 177. N 5. PP. 1857-1881, 1882-1902.
- [13] Брагинский В.Б., Воронцов Ю.П. // *УФН.* 1974. Т. 114. В. 1. С. 41-53; Брагинский В.Б., Воронцов Ю.П., Халили Ф.Ю. // *ЖЭТФ.* 1977. Т. 73. В. 4(10). С. 1340-1343.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1993 года.