92-99

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-92-99

Б.Кешка

О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ РАБОТЫ ВЧ-СКВИДА С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ШУМОВ

Направлено в журнал "Сверхпроводимость:
физика, химия, техника"

1992

Кешка Б. P17-92-99

О теоретическом исследовании работы ВЧ–СКВИДА с учетом воздействия шумов

Рассматривается возможность применения математического аппарата марковских процессов, в частности уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, для описания работы ВЧ–СКВИДА на плато ВАХ в случае, когда CR_N – малый параметр, а C и R_N – емкость и сопротивление джозефсоновского контакта. Было сделано предположение, что вследствие диссипативных процессов, происходящих в СКВИДе, изменение амплитуды тока в колебательном контуре велико.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Chesca B. P17-92-99

On the Theoretical Study of a RF–SQUID Operation Taking into Account the Noise Influence

A possibility of Markov process technique application, namely the Fokker – Plank – Kolmogorov equation, for description of the rf–SQUID operation on the volt-current characteristic plateau in the case when CR_N is a small parameter and C and R_N are capacity and resistance of the Josephson contact, respectively, has been described. The current amplitude variation in the tank circuit was assumed to be large due to the dissipative processes in the SQUID.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

В данной статье рассматривается известная резистивная модель СКВИДа, представленная на рис. 1:

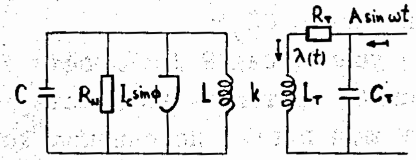

Рис. 1. Резистивная модель СКВИДа.

L - индуктивность контура квантования;

$I_c \sin\phi$ - сверхпроводящая компонента тока через контакт Джозефсона;

R_N, C - соответственно: нормальное сопротивление, емкость Джозевсоновского контакта;

L_T, C_T, R_T - соответственно: индуктивность, емкость, сопротивление колебательного контура;

k - коэффициент связи интерферометра с колебательным контуром

λ_T - ток через индуктивность L_T;

A sin ωt - внешний гармонический сигнал.

Известно, что для нашего СКВИДа основные уравнения имеют вид:

$$CR_N\ddot{\phi} + \dot{\phi} = (\phi^0_{ex} - \phi - l\sin\phi)\,\frac{R_N}{L} + \frac{R_N}{L}\,\frac{2\pi}{\Phi_0}\,k\sqrt{L\,L_T}\,\lambda\,(t) \qquad /1/$$

$$(1-k^2)\,\ddot{\lambda} + \frac{R_T}{L_T}\,\dot{\lambda} = -\,\omega_0^2\,\lambda - \frac{\Phi_0}{2\pi}\,\frac{k}{\sqrt{L\,L_T}}\,\ddot{\phi} - \omega_0^2\,A\sin\omega t \qquad /2/$$

Φ - магнитный поток внутри кольца, $\phi = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}$;

Φ^0_{ex} -внешний постоянный магнитный поток, $\phi^0_{ex} = 2\pi\frac{\Phi^0_{ex}}{\Phi_0}$;

$\Phi_o \simeq 2.07 * 10^{-15}$Вб, квант магнитного потока;

$$l = \frac{2\pi L I_c}{\Phi_0};$$

I_c- критический ток Джозефсоновского контакта.

Если в уравнении /1/ мы будем считать, что:

1) можно пренебречь членом $CR_N\ddot{\phi}$;

/A/ 2) $\lambda(t)$- не решение уравнения /2/, а просто $V_o\cos\omega t$;

3) на Джозефсоновский контакт воздействует нормальный белый шум n(t), источником которого является сопротивление R_N,

тогда анализ процессов в СКВИДе можно вести при помощи уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (Ф.П.К.), как это сделано, например, в[1]. Действительно, в условиях /A/ уравнение /1/ будет иметь вид:

$$\dot{\phi} = f\ (\ \phi,\ t) + n\ (t), \qquad /3/$$

где $\langle n(t)\rangle = 0$, $\langle n(t_1)n(t_2)\rangle = \frac{N_0}{2}\ \delta(t_1-t_2)$,

$\delta(t)$ - дельта функция Дирака, N_o- постоянная,

$$f(\ \phi,t\ ) = \frac{R_N}{L}\left[(\phi^0_{ex} - \phi - l\sin\phi) + \frac{2\pi}{\Phi_0}\, k\sqrt{L\ L_T}\ V_0\cos\ \omega t\right].$$

Уравнение /3/ является стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка и, как следует из теоремы Дуба [2], процесс $\phi(t)$ является марковским. Поэтому для /3/ мы можем записать уравнения Ф.П.К. Цель этой статьи - составить уравнения Ф.П.К. для случая, когда вместо условия /A/ берется условие /Б/:

1) CR_N - малый параметр;

2) $\lambda(t)$ - решение уравнения /2/;

/Б/ 3) на Джозефсоновский контакт воздействует шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $k_\xi(\tau)$, где $k_\xi(\tau)$ не обязательно δ функция;

4) $\lambda(t)$ является функцией более общего вида, $\lambda(t,\phi)$.

В дальнейшем будет показано, что условие /Б4/ вытекает из реальных физических процессов, имеющих место в СКВИДе, и усложняет данную задачу.

Когда условие /Б/ удовлетворяется, наша задача будет описываться уравнением Ф.П.К. для процесса:

$$\mu\ddot{\phi} + \dot{\phi} = f(\phi) + g(\phi,t)\ \xi(t), \qquad /4а/$$

где $\mu = CR_N$,

$\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t_1),\xi(t_2)\rangle = k_\xi(t_2 - t_1)$,

$$f(\phi) = \frac{R_N}{L}(\ \phi^0_{ex} - \phi - l\sin\phi\ ), \qquad /4б/$$

$$g(\phi,t) = \frac{R_N}{L}\,\frac{2\pi}{\Phi_0}\,k\sqrt{L\ L_T}\ V(\phi,t), \qquad /4в/$$

$$\xi(t) = \cos\ [\ \omega t + \alpha(t)]. \qquad /4г/$$

В этом случае предполагается, что $\lambda\ (\phi,t)$ имеет частный вид:

$$\lambda(\phi,t) = V\ (\phi\ ,t)\ \cos\ [\omega t + \alpha(t)], \qquad /5/$$

где $\alpha(t)$:

1) фаза колебаний тока в индуктивности L_T;

2) является случайным процессом, который появляется в результате воздействия внешнего гармонического сигнала $A\sin\omega t$ совместно с шумом r(t) на колебательный контур.

Если считать, что в /1/ присутствуют одновременно два источника шума, то невозможно описать уравнение Ф.П.К. для данного случая, так как в этом случае не имеет смысла говорить о корреляционной функции. Поэтому предположение /5/ означает, что флуктуационные процессы в СКВИДе возникают только за счет воздействия шума r(t) на колебательный контур.

Итак, мы будем искать решение /2/ в виде:

$$\lambda(t) = V\ (t)\ \cos\ \omega t. \qquad /6/$$

Надо отметить, что в уравнении /2/ коэффициент при ϕ достаточно мал при обычных значениях величин L и L_T, поэтому им можно пренебречь в первом приближении. В дальнейшем будем предполагать, что:

$$\omega \simeq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_T C_T}} ;$$

тогда вместо /2/ получается

$$(1 - k^2)\,\ddot{\lambda} + \frac{R_T}{L_T}\,\dot{\lambda} + \omega_0^2\,\lambda + \omega_0^2 A \sin \omega_0 t = 0. \qquad /7/$$

Подставляя /6/ в/7/, получаем для $V(t)$ следующее уравнение:

$$\ddot{V}(1-k^2) + \dot{V}\left[\frac{R_T}{L_T} - 2\omega_0(1-k^2)\,\mathrm{tg}\,\omega_0 t\right] + V\left[k^2 - \frac{\omega_0 R_T}{L_T}\,\mathrm{tg}\,\omega_0 t\right] = -A\,\omega_0^2\,\mathrm{tg}\,\omega_0 t. \qquad /8/$$

Будем искать решение /8/ в виде:

$$V(t) = C_1 e^{-C_2} + C_3 , \qquad /9/$$

где C_i ($i = \overline{1,3}$) - константы.

Если удовлетворяется условие

$$\frac{R_T}{2\,L_T} = k\sqrt{1-k^2}, \qquad /10/$$

то подставляя /9/ в /8/, мы получим решение уравнения в виде

$$V(t) = C_1 e^{-\frac{R_T}{2L_T}\frac{1}{1-k^2}t} + \frac{\omega_0 L_T}{R_T}A = C_1 e^{-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}t} + QA, \qquad /11/$$

где $Q = \frac{\omega_0 L_T}{R_T}$ - добротность колебательного контура.

Предположим, что в начальном состоянии t_i, величина $V(t)$ имела значение V_i; тогда вместо /11/ получим:

$$V(t) = QA\left[1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}t}\right] + V_i e^{-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}t} \qquad /12/$$

Далее будет видно, почему в итоге $V = V(t,\phi)$. Итак, подставляя /12/ в /6/, мы получим решение уравнения /2/. Очевидно, что это решение описывает поведение тока $\lambda(t)$ между скачками, предполагая, что t_i-это точно конец скачка (см. рис. 2).

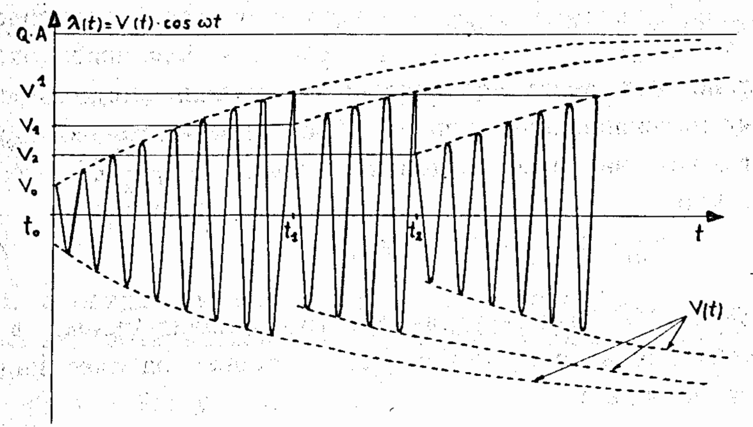

Рис. 2

Если время скачка много меньше периода колебаний:

$$\omega_0 \frac{L}{R_N} \ll 1, \qquad /13/$$

поведение тока $\lambda(t)$ будет таким, как показано на рис. 2, где:

t_0, t_1, t_2 - моменты трех последовательных скачков,
V_0, V_1, V_2 - значение величины V после каждого скачка,
V^1 - значение величины V перед скачком.

Ранее было отмечено, что V^1 имеет одно и то же значение для любого скачка. Это предполагается для того, чтобы не усложнять рис. 2. Очевидно, что падение величины V(t) во время скачка - это результат диссипации энергий в СКВИДе. Далее будет рассматриваться этот процесс без начального условия $V_i \cong V^1$, ($i=0,1,2\ldots$), как это делают, например, в [3].

На основе /Б1/ мы можем предположить, что во время любого скачка ϕ не будет изменяться больше, чем на 2π. Потенциальная энергия СКВИДа имеет вид

$$E_{CK}=E_C\left[1-\cos\phi+\frac{(\phi-\phi_{ex})^2}{2l}\right], \qquad /14/$$

где $E_C=\frac{\Phi_0}{2\pi}I_C$, $\phi_{ex}=\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_{ex}$, Φ_{ex} - внешний магнитный поток.

Пусть $\frac{2\pi}{\Phi_0}k\sqrt{L\,L_T}\,V(t)=a(t)$. /15/

Скачки происходят между устойчивыми состояниями, где $1-\cos\phi=0$, поэтому потенциальная энергия /14/ изменяется во время скачка только за счет изменений члена $(\phi_{ex}-\phi)^2/2l$. Известно, что

$$\phi_{ex}=\phi^0_{ex}+a(t)\cos\omega_0 t \qquad /16/$$

Если условие /13/ удовлетворяется, то во время скачка ϕ_{ex} не будет изменяться за счет члена $\omega_0 t$, а только за счет падения величины $V(t)\propto a(t)$.

Пусть $(V^1-V_i)\propto(a^1-a_i)=\Delta a_i$ /17/

Энергия колебательного контура имеет вид

$$E_{KK}=\frac{E_C}{2l}\,\frac{a^2}{k^2}. \qquad /18/$$

Разумеется, изменения энергии E_{CK} происходят только за счет изменений энергии E_{KK}:

$$\Delta E_{CK}=\Delta E_{KK}. \qquad /19/$$

Подставляя /14/ и /18/ в /19/, получим для Δa_i уравнение

$$\Delta a_i^2(1-k^2\cos^2\omega_0 t)-2\Delta a_i[a^1+k^2(\phi^1\pm2\pi-\phi^1_{ex})\cos\omega_0 t]\mp4\pi k^2(\phi^1\pm\pi-\phi^1_{ex})=0, \qquad /20/$$

где верхнее (нижнее) положение знака $\pm$ означает, что ϕ растет (падает) на 2π, а ϕ^1,ϕ^1_{ex} - значения ϕ,ϕ_{ex} непосредственно перед скачком. Из /20/ видно, что решение этого уравнение: $\Delta a_i^{(m)}=\Delta a_i^{(m)}(\phi^1)$, где $m=1,2$. Используя /17/, получаем:

$$V_i^{(m)}=V_i^{(m)}(\phi^1)\ ,\quad i=0,1,2,\ldots \qquad /21/$$

Известно, что скачок является вероятностным процессом, плотность вероятности которого отличается от нуля в окрестности каждого значения $2j\pi$ для величины ϕ, где j- целое число. Обозначим эту область величины ϕ буквой D. Если для каждого значения $\phi^1\in D$ рассчитать $V_i^{(m)}=V_i^{(m)}(\phi^1)$, то получится функция

$$V_i=V_i(\phi^1),\quad \phi^1\in D, \qquad /22/$$

где, очевидно, в данном случае ϕ^1 - непрерывная переменная.

Итак, возвращаясь к /12/, с учетом /22/ мы получаем

$$V=V(t,\phi^1),\quad \phi^1\in D. \qquad /23/$$

Теперь вернемся к /4г/ и предположим, что r(t) является таким шумом, который дает нам возможность написать для фазы $\alpha(t)$ стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot\alpha=C_1\eta(t), \qquad /24/$$

где C_1- постоянная, $\langle\eta(t)\rangle=0$, $\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle=\frac{N_0}{2}\delta(t_2-t_1)$. Это предположение было сделано для того, чтобы показать в явном виде на одном примере, каким будет уравнение Ф.П.К. для /4а/.

Так как изменение величины $V(t,\phi^{i})$ за счет диссипативных процессов в СКВИДе велико, мы не будем принимать во внимание малые изменения величины $V(t,\phi^{i})$, которые появляются вследствие воздействия шума $r(t)$ на колебательный контур.

Вычислим теперь корреляционную функцию $k_{\xi}(\tau)$ фазовых флуктуаций колебания $\xi(t) = \cos[\omega_0 t + \alpha(t)]$:

$$k_{\xi}(t_1,t_2) = \langle\cos(\omega_0 t_1+\tilde{\alpha}_1)\cos(\omega_0 t_2+\tilde{\alpha}_2)\rangle - \langle\cos(\omega_0 t_1+\tilde{\alpha}_1)\rangle\langle\cos(\omega_0 t_2+\tilde{\alpha}_2)\rangle, \qquad /25/$$

где $\langle\cos(\omega_0 t_m+\tilde{\alpha}_m)\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi}\cos(\omega_0 t_m+\tilde{\alpha}_m)\,P(\tilde{\alpha}_m,t_m)\,d\tilde{\alpha}_m, \qquad /26/$

$$\langle\cos(\omega_0 t_1+\tilde{\alpha}_1)\cos(\omega_0 t_2+\tilde{\alpha}_2)\rangle = \iint_{-\pi}^{+\pi}\cos(\omega_0 t_1+\tilde{\alpha}_1)\cos(\omega_0 t_2+\tilde{\alpha}_2)\,P(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tau)\,d\tilde{\alpha}_1 d\tilde{\alpha}_2, \qquad /27/$$

$\tau = t_2 - t_1$, $\tilde{\alpha}_m = \tilde{\alpha}(t_m)$, $\tilde{\alpha}$ -приведенная к $[-\pi;\ \pi]$ фаза, $m=1,2$,

$P(\tilde{\alpha},t_i)$ - одномерная плотность вероятности фазы,

$P(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tau)$ -двумерная плотность вероятности фазы.

Не трудно доказать [2], что для случайного процесса $\alpha(t)$, который удовлетворяет/24/,

$$P(\tilde{\alpha},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\alpha}(t)}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}_0+2j\pi)^2}{2\sigma_{\alpha}^2(t)}}, \qquad /28/$$

где $\sigma_{\alpha}(t) = Dt$ -дисперсия, $D = \frac{N_0}{2}C_1^2$, $\tilde{\alpha}_0=\tilde{\alpha}(t=0)$.
Так как существует стационарное состояние, то:

$$P(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tau) = P_{st}(\tilde{\alpha}_1)\,P(\tilde{\alpha}_2,\tau), \qquad /29/$$

где $P_{st}(\tilde{\alpha}_1) = \lim_{t\to\infty} P(\tilde{\alpha}_1,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\alpha}(t)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}_0+2\pi x)^2}{2\sigma_{\alpha}^2(t)}}dx = \frac{1}{2\pi}$.

Итак, подставляя /28/в /26/и /29/ в /27/, мы в состоянии вычислить $k_{\xi}(t_1,t_2)$ по формуле /25/. Отсюда, при $t\to\infty$ имеем:

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\frac{D|t|}{2}}\cos\omega_0\tau, \quad \langle\xi(t)\rangle = 0. \qquad /30/$$

Теперь можно применить метод понижения порядка стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром [4]. Постоянную времени нелинейной системы /4а/ охарактеризуем величиной τ_c и время корреляций процесса $\xi(t)$ - величиной τ_K:

$$\tau_c = \min_{\phi,t}\left[-\frac{\partial f(\phi,t)}{\partial\phi}\right]^{-1}, \qquad \tau_k = \frac{1}{k_{\xi}(0)}\int_0^{\infty}k_{\xi}(\tau)\,d\tau. \qquad /31/$$

Если корреляционная функция процесса $\xi(t)$ характеризуется несколькими значениями постоянных времени, то в качестве τ_k следует брать наибольшее из них. Подставляя /4б/и /30/ в /31/, получим для нашего примера:

$$\tau_c = \frac{1}{1+R}\,\frac{L}{R}, \qquad \tau_k = \frac{2D}{D^2+4\omega_0^2}. \qquad /32/$$

Процесс $\phi(t)$, описываемый уравнением /4а/, не является в точности марковским. Приближенно $\phi(t)$ можно считать марковским процессом, если выполняется неравенство

$$\tau_c \gg \max(\mu,\ \tau_k). \qquad /33/$$

В нашем случае это будет:

$$\frac{1}{1+l}\,\frac{L}{R_N} \gg \max\left[CR_N,\ \frac{2D}{D^2+4\omega_0^2}\right] \qquad /34/$$

$$\text{или} \quad 1 \gg \max \left[\beta,\ \frac{R_N}{L_C} \frac{2D}{D^2 + 4\omega_0^2} \right], \qquad /35/$$

$$\text{где} \quad \beta = \frac{R_N^2 C}{L_C},\ L_C = \frac{\Phi_0}{2\pi I_C}.$$

Если условие /33/ удовлетворяется, то к процессу $\phi(t)$ можно применить математический аппарат марковских процессов, в частности, уравнение Ф.П.К. Итак, коэффициенты сноса и диффузии "эквивалентного" одномерного марковского процесса $\phi(t)$ будут:

$$a(\phi,t) = f(\phi) + \upsilon \frac{M_0}{2} g(\phi,t) \frac{\partial g(\phi,t)}{\partial \phi}, \qquad /36а/$$

$$\text{где} \quad M_0 = 4 \int_0^\infty k_\xi(\tau)\, d\tau = \frac{4D}{D^2 + 4\omega_0^2}, \qquad /36б/$$

$$\upsilon = \frac{2}{M_0} \int_0^\infty (1 - e^{-\tau/\mu})\, k_\xi(\tau)\, d\tau, \qquad /36в/$$

$$\text{и} \quad b(\phi,t) = \frac{M_0}{2} g^2(\phi,t). \qquad /37/$$

Очевидно, что с уравнением /4а/ мы поставили в соответствие обобщенное стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot\phi = f(\phi) + g(\phi,t)\, \xi^{(\upsilon)}(t), \quad 0 \le \upsilon \le 1. \qquad /38/$$

При $\upsilon=0.5$ получим симметризованные стохастические уравнения, а при $\upsilon=0$ - стохастическое дифференциальное уравнение Ито. Пользуясь правилом перехода от обобщенных стохастических дифференциальных уравнений к симметризованным, получим, что случайный процесс, поведение которого описывается уравнением /4а/ с малым параметром μ, может быть приближенно заменен одномерным марковским процессом $\phi(t)$,

удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot\phi = f(\phi) + \left[\upsilon - \frac{1}{2}\right] \frac{M_0}{2} g(\phi,t) \frac{\partial g(\phi,t)}{\partial \phi} + g(\phi,t)\,\theta(t), \qquad /39/$$

где $\theta(t)$ - белый шум, $\langle\theta(t_1)\,\theta(t_2)\rangle = \frac{M_0}{2}\,\delta(t_2 - t_1)$.

В нашем случае, подставляя /30/ в /36в/, получим:

$$\upsilon = \frac{1}{2}\ \frac{2}{\mu}\ \frac{1}{D}\ \frac{D\left(\frac{2}{\mu} + D\right) - 4\omega_0^2}{\left(\frac{2}{\mu} + D\right)^2 + 4\omega_0^2}. \qquad /40/$$

Теперь для процесса /39/ уравнение Ф.П.К. имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\phi,t) = -\frac{\partial}{\partial \phi}[a(\phi,t)P(\phi,t)] + \frac{\partial^2}{2\partial\phi^2}[b(\phi,t)P(\phi,t)], \qquad /41/$$

где $a(\phi,t)$ и $b(\phi,t)$ представлены выражениями /36/ и /37/.

Сравнив выражения /4а/ и /39/, можно заметить, что пренебречь первым членом уравнения /4а/ за счет малости параметра μ можно только в случае, когда $\upsilon=0.5$. В общем случае, когда $\upsilon\ne0.5$, этого сделать нельзя. Из /41/ видно что $\upsilon=0.5$, если удовлетворяются условия:

$$\begin{cases} \frac{2}{\mu} \gg D, & /42а/ \\ \frac{2}{\mu} \gg 4\frac{\omega_0^2}{D}. & /42б/ \end{cases}$$

Из /42а/ и /42б/ следует (см. рис. 3):

$$\tau_K \gg \mu. \qquad /43/$$

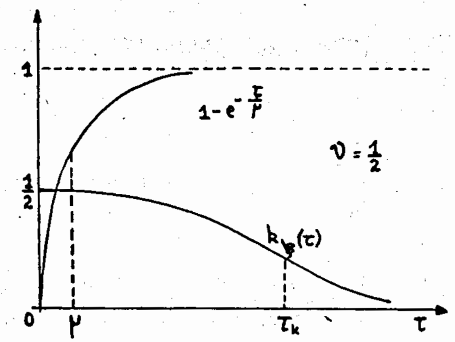

Рис.3

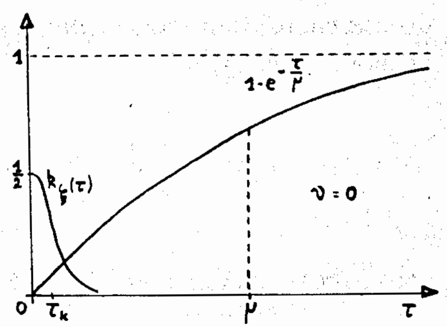

Рис.4

Второй предельный случай - когда

$$\frac{2}{\mu} \ll D\ . \qquad /44/$$

Из /40/ мы получаем $\upsilon = 0$. В этом случае, используя /32/, получаем $\tau_K \ll \mu$ (см. рис.4).

Возвращаясь к уравнению /20/, докажем, что бывают случаи, когда у него есть два различных решения, и оба физически возможны:

$$0 \le \Delta a_i^{(1)} < \Delta a_i^{(2)} \le a^1. \qquad /45/$$

В этих условиях мы можем преобразовать /21/,/12/ и /4в/:

$$V_i^{(m)} = V_i^{(m)}(\phi^i), \qquad /21'/$$

$$V^{(m)}(\phi,t) = QA\left[1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}t}\right] + V_i^{(m)}(\phi^i)\, e^{-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}t}, \qquad /12'/$$

$$g^{(m)}(\phi,t) = \frac{R_N}{L}\,\frac{2\pi}{\Phi_0}\, k\sqrt{L\, L_T}\; V^{(m)}(\phi,t), \text{ где } m = 1,2. \qquad /4в'/$$

Очевидно, $V_i^{(m)}(\phi^i)$ соответствует решениям $\Delta a_i^{(m)}$. В таком случае получаются два различных уравнения вида /4а/,/39/ и /41/ и это для одного и того же СКВИДа одновременно!

Пусть: 1) $\phi - \phi_{ex} = 2\pi p = l\sin\phi$, $-1/2\pi \le p \le +1/2\pi$, /46а/

2) после скачка ϕ -увеличивается на 2π, /46б/

3) $\omega_0 t = x$, $\phi_{ex}^0 = (2j+1)\pi$, j -целое число. /46в/

Учитывая /46/,/20/ принимает вид:

$$\Delta a_i^2(1-k^2\cos^2 x) - 2\Delta a_i[a^1 + k^2 2\pi(p+1)\cos x] - 4\pi^2k^2(2p+1) = 0 \qquad /47/$$

Известно, что у функции вида

$$h(\Delta a_i) = A(\Delta a_i)^2 + B(\Delta a_i) + C \qquad /48/$$

существует два решения уравнения $h(\Delta a_i) = 0$ в интервале $(0, a^1)$, если следующая система неравенств имеет решение:

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, & /а/ \\ h(\Delta a_i = a^1) > 0, & /б/ \\ C > 0. & /в/ \end{cases} \qquad /49/$$

В нашем случае /49/ примет вид

$$\begin{cases} -h(\Delta a = a^1) + k^2\cos^2 x\,[4\pi^2k^2p^2 - (a^1)^2] > 0, & /а/ \\ h\,(\Delta a = a^1) > 0, & /б/ \\ p < -\frac{1}{2}\ . & /в/ \end{cases} \qquad /50/$$

Из /50/ видно, что обязательным условием будет

$$(2\pi k p) > a^1, \qquad /51а/$$

где $a^1 = \sqrt{l^2-1} + \arcsin\frac{1}{l} - \frac{\pi}{2}$. /51б/

Очевидно, что при $l \gg 1$, $a^1 \simeq l$, так что условия /46а/и/51/ удовлетворяются одновременно только если $k > 1$, а это невозможно, так как $k \in [0;1]$. Поэтому мы будем искать решение системы /49/, учитывая условия

$$\begin{cases} l > 1, \\ l \not> 1. \end{cases}$$

В /50а/ и /50б/ входят четыре параметра:

$$0 \le a^1 \le 1; -\frac{1}{2\pi} \le p < \min\left[-\frac{1}{2}; -\frac{a^1}{2\pi k}\right];$$
$$\left[\frac{a^1}{1}\right]^2 \le k^2 \le 1; \quad -1 \le \cos x \le 1. \qquad /52/$$

Попытаемся решить /50а/:

$$(a^1)^2 + a^1[4\pi(p+1)k^2\cos x] + 4\pi^2k^2[k^2p^2\cos^2x+2p+1] > 0, \qquad /53а/$$

или $f(a^1,p,k^2,\cos x) > 0$. /53б/

Если в /53б/ три параметра принять за постоянные, а четвертый за переменную величину и сделать это для всех параметров по очереди, то получится следующее:

$$f(a^1,p,k^2,\cos x) = \begin{cases} A_1(a^1)^2 + B_1a^1 + C_1, & /54а/ \\ A_2p^2 + B_2p + C_2, & /54б/ \\ A_3(k^2)^2 + B_3k^2 + C_3, & /54в/ \\ A_4(\cos x)^2 + B_4(\cos x) + C_4, & /54г/ \end{cases}$$

где $A_s > 0 \quad (\forall)s = \overline{1,4}$; A_s, B_s, C_s – коэффициенты.

Найдем минимумы функции $f(a^1,p,k^2,\cos x)$ по каждому из четырех параметров:

$$\min_{a^1} f(a^1) = f(a^1_{min}),\ a^1_{min} = -\frac{B_1}{2A_1} = -2\pi(p+1)k^2\cos x, \qquad /55а/$$

$$\min_{p} f(p) = f(p_{min}),\ p_{min} = -\frac{B_2}{2A_2} = -\frac{a^1\cos x + 2\pi}{2\pi k^2\cos^2 x}, \qquad /55б/$$

$$\min_{k^2} f(k^2_{min}),\ k^2_{min} = -\frac{B_3}{2A_3} = -\frac{a^1(p+1)\cos x + \pi(2p+1)}{2\pi p^2\cos^2 x}, \qquad /55в/$$

$$\min_{\cos x} f(\cos x) = f(\cos x_{min}), \cos x_{min} = -\frac{B_4}{2A_4} = -\frac{a^1(p+1)}{2\pi k^2p^2}. \qquad /55г/$$

Теперь мы в состоянии вычислить масимумы этой функции:

$$\max_{a^1} f(a^1) = \max[f(0), f(a^1)], \qquad /56а/$$

$$\max_{p} f(p) = \max\left\{f\left(-\frac{1}{2\pi}\right), f\left[\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{a^1}{2\pi k}\right)\right]\right\}, \qquad /56б/$$

$$\max_{k^2} f(k^2) = \max\left\{f\left[\left(\frac{a^1}{1}\right)^2\right], f(1)\right\}, \qquad /56в/$$

$$\max_{\cos x} f(\cos x) = \max[f(-1), f(1)]. \qquad /56г/$$

Попытаемся решить /50б/:

$$(a^1)^2(1+k^2\cos^2x) - 4a^1\pi(p+1)k^2\cos x - 4\pi^2k^2(2p+1) > 0, \qquad /а/$$
/57/
или $g(a^1,p,k^2,\cos x) > 0$. /б/

Аналогично мы можем написать:

$$g(a^1,p,k^2,\cos x) = \begin{cases} A'_1(a^1)^2 + B'_1a^1 + C'_1, & /а/ \\ A'_2p + B'_2, & /б/ \\ A'_3k^2 + B'_3, & /в/ \\ A'_4(\cos x)^2 + B'_4(\cos x) + C'_4, & /г/ \end{cases} \qquad /58/$$

где A'_1, A'_4, < 0, $C'_1 > 0$, A'_s, B'_s, C'_s – коэффициенты, $s = \overline{1,4}$.

$$\max_{a^1} g(a^1) = g(a^1_{max}),\ a^1_{max} = -\frac{B'_1}{2A'_1} = -\frac{2\pi(p+1)k^2\cos x}{1+k^2\cos^2x}, \qquad /59а/$$

$$\max_{p} g(p)= g(p_{max}),\, p_{max}= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \text{если } a^1\cos x+2\pi > 0 \\ \min\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{a^1}{2\pi k}\right), & \text{если } a^1\cos x+2\pi<0, \end{cases} \qquad /59б/$$

$$\max_{k^2} g(k^2) = \max\left\{ g\left[\left[\frac{a^1}{l}\right]^2\right], g(1)\right\}, \qquad /59в/$$

$$\max_{\cos x} g(\cos x) = g(\cos x_{max}),\, \cos x_{max}= -\frac{B'_4}{2A'_4}= \frac{2\pi(p+1)}{a^1}. \qquad /59г/$$

Теперь мы в состоянии узнать имеет ли система неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} /50а/ \\ /50б/ \\ /50в/ \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(a^1,p,k^2,\cos x) > 0 \\ g(a^1,p,k^2,\cos x) > 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow 0 < \Delta a_i^{(1)} < \Delta a_i^{(2)} < a^1 \qquad /60/$$

решение. Существуют 4 параметра: $a^1, p, k, \cos x$, один из которых мы в дальнейшем будем считать переменной. Тогда три оставшиеся параметра примем за константы, имеющие заданные значения, и назовем их K_1, K_2, K_3. В роли переменной, которую мы назовем η, может выступать любой из этих четырех параметров. Вычислим $\max g(\eta)$ и $\max f(\eta)$ по формулам /59/ и /56/, соответственно, используя формулу /55/, чтобы узнать, какое положение имеет η_{min} относительно предельных значений переменной η /52/. Если

$$\min\,[\max g(\eta), \max f(\eta)] > 0, \qquad /61/$$

то /60/ имеет решение. Если нет, то изменяя хотя бы одну из констант K_1, K_2, K_3, добиваемся выполнения условия /61/. Как изменить эту константу? Уменьшить или увеличить? На этот вопрос легко ответить, зная при каком значении этой константы мы имеем max f и max g. Это известно для всех трех констант. Такую процедуру будем повторять с каждой константой, добиваясь выполнения условия /61/. Таким образом, мы нашли несколько возможных вариантов значений для группы параметров $(a^1, p, k^2, \cos x)$.

Приведем пример:

$$(a^1)_0 = 18.45, \quad p_0 \in [-3.1075, -3.1038], \qquad /62/$$
$$k_0^2 = 0.9, \quad \cos x_0 \in [0.627, 0.647].$$

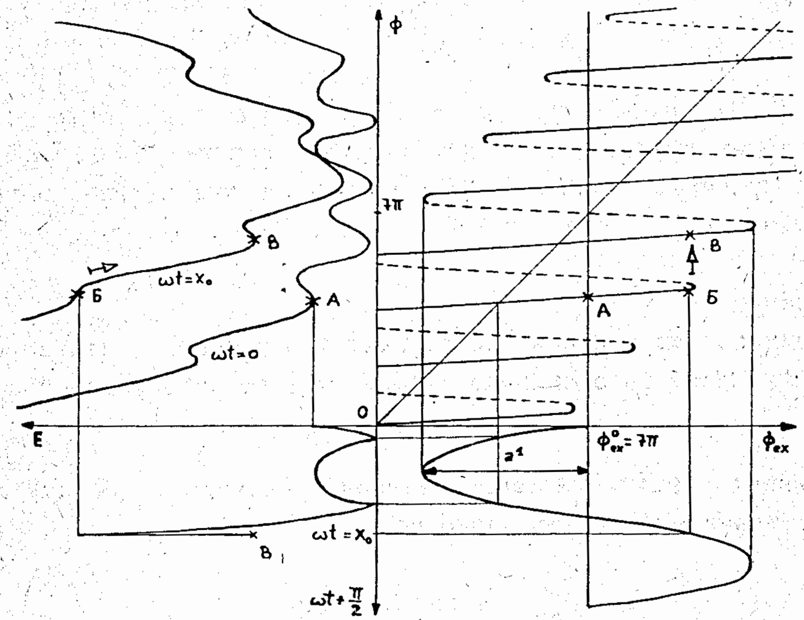

Рис.5 - характеристики расматриваемого СКВИДа.

В этом случае $l=20$ и $\phi^0_{ex}=7\pi$. Если скачок возникает около точки Б (рис.5) т.е. там, где условие /60/ выполняется, то существуют два различных значения $\Delta a_i: 0 < \Delta a_i^{(1)} < \Delta a_i^{(2)} < a^1$.

Примеры:

а) $p = -3.1075$, $\cos x = 0{,}647$ $\Rightarrow$ $\Delta a_i^{(1)} = 17.42$, $\Delta a_i^{(2)} = 17.05$

б) $p = -3{,}1078$, $\cos x = 0{,}627$ $\Rightarrow$ $\Delta a_i^{(1)} \cong a_i^1$, $\Delta a_i^{(2)} = 15.5$

в) $p = -3.1075$, $\cos x = 0.637$ $\Rightarrow$ $\Delta a_i^{(1)} = 18.16$, $\Delta a_i^{(2)} = 16.05$

Так как скачок является вероятностным процессом вследствие воздействия шума, то вероятность процесса Б $\Rightarrow$ В, $P(a_0^1, p_0, k_0^2, \cos\ x_0)$ отлична от нуля. Таким образом, можно написать:

$$P(a_0^1, p_0, k_0^2, \cos x_0) = P^{(1)}(a_0^1, p_0, k_0^2, \cos x_0) + P^{(2)}(a_0^1, p_0, k_0^2, \cos x_0), \qquad /63/$$

где $P^{(m)}(a_0^1, p_0, k_1^2, \cos\ x_0)$ - вероятность того, что скачок происходит именно тогда, когда группа параметров $(a^1, p\ , k^2, \cos x)$ принимает значения /62/ и после скачка падение величины a^1 будет $\Delta a_i^{(m)}$, где $m = 1,2$.

Замечание

До сих пор мы считали, что параметры p и cos x - независимые. Это допущение было сделано исходя из того, что уравнение

$$\phi - \phi_{ex} = l \sin \phi$$

не имеет аналитического решения. Очевидно, между этими параметрами существует зависимость:

$$\arcsin\left(-\frac{2\pi p}{e}\right) - \phi_{ex}^0 - a^1 \cos x = 2\pi p. \qquad /64/$$

Поэтому, после того как найдено решение нашей задачи:

$$0 < \Delta a_i^{(1)} < \Delta a_i^{(2)} < a^1,$$

то есть найдены значения для группы параметров $(a^1, p, k^2, \cos x)$, необходимо проверить удовлетворяют ли p и cosx условию /64/.

Пример:

$a_1 = 1.787$, $p = -0.501$, $k^2 = 0.9$, $\cos x \in [-1, \frac{1}{3}]$.

Если $\cos x = -\frac{1}{2}$ то $0 < \Delta a_1^{(1)} = 0.86$, $\Delta a_i^{(2)} = 0.105 < a^1$.

И все-таки /64/ не удовлетворяется, поэтому такое решение не имеет физического смысла!

Автор выражает признательность за помощь в подготовке статьи Распопиной Е.В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полушкин В.Н. - Препринт ОИЯИ, Р13-89-201, Дубна, 1989.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. - Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
3. Лихарев К.К., Ульрих Б.Т. - Системы с джозефсоновскими контактами. М.: МГУ, 1978.
4. Разевиг В.Д. - Известия вузов СССР. Радиофизика, 1976, т.19, №8, с. 1166.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1992 года.