

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P17-92-289

Ц.Ганцог<sup>1</sup>, Б.К.Мурзахметов<sup>2</sup>, Р.Танась<sup>3</sup>,  
А.В.Чижов

**ФАЗОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СМЕЩЕННОГО  
ФОКОВСКОГО И СМЕЩЕННОГО ХАОТИЧЕСКОГО  
СОСТОЯНИЙ**

Направлено в Оргкомитет IV Международного семинара  
по квантовой оптике, Минск

---

<sup>1</sup>Монгольский государственный университет, Улан-Батор,  
Монголия

<sup>2</sup>Институт ядерной физики АН Республики Казахстан,  
Алма-Ата, Казахстан

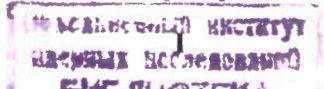
<sup>3</sup>Университет им.А.Мицкевича, Институт физики,  
Познань, Польша

Определение фазового распределения для квантового состояния является нетривиальной проблемой [1, 2]. Это связано с трудностью построения эрмитова оператора фазы. Недавно Пегг и Барнетт [3 – 5] показали, как можно построить такой оператор для квантованного электромагнитного поля. Формализм Пегга-Барнетта позволяет получить фазовое распределение для квантового состояния, используя собственные состояния эрмитова оператора фазы.

В квантовой оптике существует также и другой подход к проблеме описания фазы [6 – 8], где используются функции распределения квазивероятности, такие как  $P$ -функция Глаубера-Сударшана,  $Q$ -функция и функция Вигнера. Эти функции зависят от комплексного числа  $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$ , являющегося собственным значением оператора уничтожения. Интегрируя функции распределения квазивероятности по радиальной переменной  $|\alpha|$ , можно получить функции, периодичные по фазовому углу  $\theta$ . Для большинства известных состояний эти функции обладают всеми свойствами, требуемыми для фазового распределения [6 – 8]. В наших недавних работах мы сравнивали вышеупомянутые два подхода описания фазы для состояний света, распространяющегося в керровской среде [9] и генерируемого в многофотонной даун-конверсии [10], а также для смещенного фоковского состояния [11] и для сжатого фоковского и сжатого хаотического состояний [12].

Целью настоящей работы является сравнение этих подходов на примере смещенного фоковского состояния (СФС) и смещенного хаотического состояния (СХС). Фоковские состояния (хаотические состояния) определяются только числом фотонов (средним числом фотонов) и имеют равномерно распределенную фазу. В результате операции смещения они приобретают ненулевые средние значения амплитуды и фазы поля, после чего фазовые распределения становятся неравномерными. Поэтому исследование фазовых свойств СФС и СХС представляется полезным. Отметим, что СФС обладают интересными неклассическими свойствами, которые были подробно исследованы в работах [13, 14].

СФС определяется действием оператора смещения  $D(\alpha)$  на фоковское состо-



яние  $|N\rangle$ :

$$|\psi\rangle = |\alpha, N\rangle = D(\alpha)|N\rangle, \quad (1)$$

где

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a). \quad (2)$$

Разложение СФС (1) по базису фоковских состояний имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|D(\alpha)|N\rangle \\ &= \sum_n b_n e^{i\varphi_n} |n\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где для  $n \geq N$

$$b_n = \left(\frac{N!}{n!}\right)^{1/2} |\alpha|^{n-N} e^{-|\alpha|^2/2} L_N^{n-N}(|\alpha|^2) \quad (4)$$

и

$$\varphi_n = (n - N)\varphi. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi$  — фаза комплексного числа  $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$  и  $L_N^{n-N}(|\alpha|^2)$  — присоединенный полином Лагерра. Для  $n < N$

$$b_n = \left(\frac{n!}{N!}\right)^{1/2} (-1)^{N-n} |\alpha|^{N-n} e^{-|\alpha|^2/2} L_n^{N-n}(|\alpha|^2), \quad (6)$$

и фаза  $\varphi_n$  остается такой же, как в (5).

СХС определяется действием оператора смещения  $D(\alpha)$  на хаотическое состояние:

$$\rho_{d.th.} = D(\alpha)\rho_{th.}D^\dagger(\alpha) = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^N |\alpha, N\rangle \langle \alpha, N|, \quad (7)$$

где  $\bar{n}$  — среднее число фотонов в начальном хаотическом состоянии.

Как было показано в работах [9 – 11], фазовое распределение Пегга–Барнетта и распределения, получаемые интегрированием  $Q$ -функции и функции Вигнера, можно объединить в одну общую формулу:

$$P^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{\substack{n,k=0 \\ n>k}}^{\infty} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(s)}(n, k) \right\}, \quad (8)$$

где коэффициенты  $G^{(s)}(n, k)$  определяются следующим образом:

(а) для распределения Пегга–Барнетта  $P^{(PB)}(\theta)$

$$G^{(PB)}(n, k) = 1, \quad (9)$$

(б) для распределения  $P^{(Q)}(\theta) = \int_0^\infty Q(\beta)|\beta|d|\beta|$  [9, 10]

$$G^{(Q)}(n, k) = \frac{\Gamma((n+k)/2 + 1)}{\sqrt{n!k!}}, \quad (10)$$

(в) для распределения  $P^{(W)}(\theta) = \int_0^\infty W(\beta)|\beta|d|\beta|$  [11]

$$\begin{aligned} G^{(W)}(n, k) &= \sum_{m=0}^p (-1)^{p-m} 2^{(n-k+2m)/2} \\ &\times \sqrt{\binom{p}{m} \binom{q}{p-m}} G^{(Q)}(m, |n-k| + m), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$p = \min(n, k), \quad q = \max(n, k). \quad (12)$$

Все матрицы  $G^{(s)}(n, k)$  являются симметричными, а их диагональные элементы равны единице:

$$G^{(s)}(n, k) = G^{(s)}(k, n), \quad G^{(s)}(n, n) = 1. \quad (13)$$

Рассмотрим фазовое распределение  $P^{(Q)}(\theta)$ , связанное с  $Q$ -функцией. Так как для  $n \neq k$  коэффициенты  $G^{(Q)}(n, k) < 1$ , то  $P^{(Q)}(\theta)$  всегда шире, чем распределение Пегга–Барнетта  $P^{(PB)}(\theta)$  [10], и, следовательно, по сравнению с последним несет меньше фазовой информации. Браунштейн и Кэйвс [6] назвали  $P^{(Q)}(\theta)$  “классической” функцией распределения, поскольку  $Q$ -функция связана с одновременным измерением двух некоммутирующих наблюдаемых — процессом, неизбежно сопровождающимся дополнительным шумом. В случае фазового распределения  $P^{(W)}(\theta)$ , связанного с функцией Вигнера, недиагональные матричные элементы  $G^{(W)}(n, k)$  ( $n \neq k$ ) принимают значения как больше, так и меньше единицы, и их влияние на вид распределения не так тривиально, как в случае  $P^{(Q)}(\theta)$ . На рис. 1 приведены распределения  $P^{(PB)}(\theta)$ ,  $P^{(Q)}(\theta)$  и  $P^{(W)}(\theta)$  для СФС при значениях  $|\alpha| = 3$  и  $N = 2$ . Видно, что распределения  $P^{(PB)}(\theta)$  и  $P^{(W)}(\theta)$

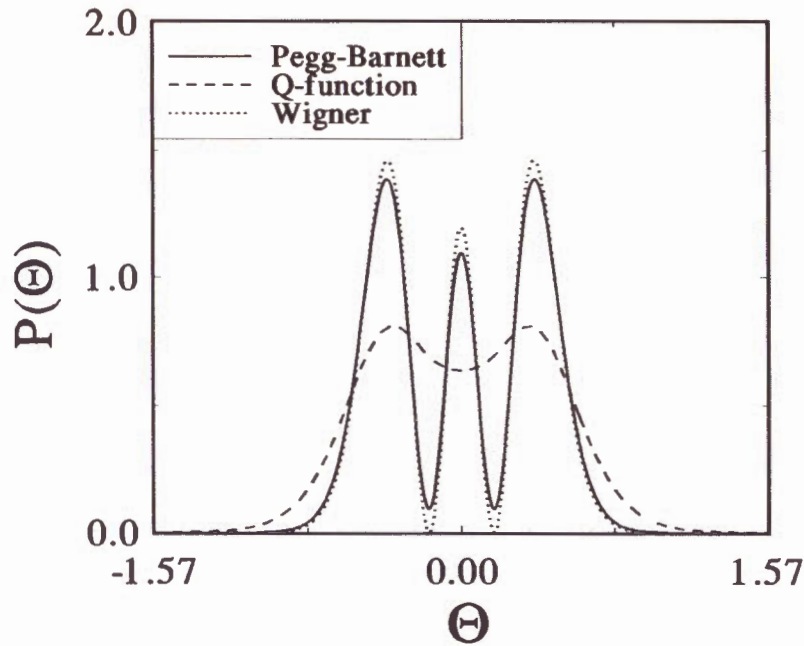


Рис. 1: Фазовые распределения  $P^{(PB)}(\theta)$ ,  $P^{(Q)}(\theta)$  и  $P^{(W)}(\theta)$  для смещенных фоковских состояний;  $|\alpha| = 3$ ,  $N = 2$

очень близки друг к другу и имеют  $N + 1$  максимум, тогда как  $P^{(Q)}(\theta)$  несколько шире и имеет лишь два максимума (заметим, что это справедливо для любых значений  $N \geq 1$ ). Чтобы объяснить такой вид фазовых распределений, рассмотрим  $Q$ -функцию и функцию Вигнера для СФС. Функции распределения квазивероятности для СФС получаются простым смещением соответствующих функций распределения для фоковских состояний:

$$Q_{dN}(\beta) = Q_N(\beta - \alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta - \alpha|^2} \frac{|\beta - \alpha|^{2N}}{N!}, \quad (14)$$

$$W_{dN}(\beta) = W_N(\beta - \alpha) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\beta - \alpha|^2) (-1)^N L_N(4|\beta - \alpha|^2), \quad (15)$$

где  $L_N(x)$  — полином Лагерра порядка  $N$ . На рис.2 приведены графики этих

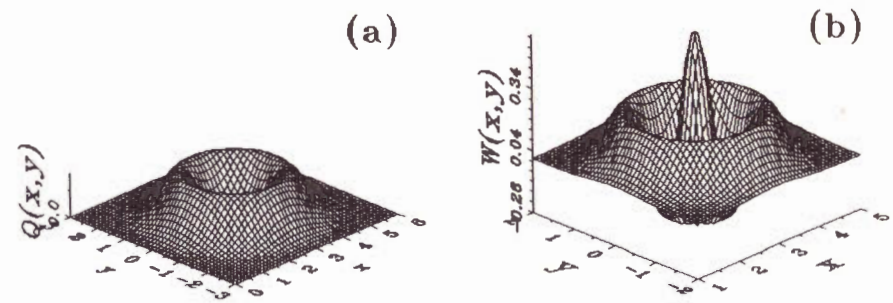


Рис. 2: (а)  $Q$ -функция и (б) функция Вигнера для смещенных фоковских состояний;  $x = \text{Re}(\beta - \alpha)$ ,  $y = \text{Im}(\beta - \alpha)$ ,  $\varphi = 0$ ,  $|\alpha| = 3$ ,  $N = 2$

функций для  $|\alpha| = 3$  и  $N = 2$ . Из (14) видно, что  $Q$ -функция принимает нулевое значение при  $|\beta - \alpha| = 0$  для  $N \geq 1$  (рис. 2(а)). Следовательно, распределение  $P^{(Q)}(\theta)$  имеет два максимума, которые соответствуют двум положениям азимутальной полуплоскости, когда площадь пересечения ее с  $Q$ -функцией принимает наибольшие значения. Это и есть концепция области перекрытия в фазовом пространстве [7], примененная для  $Q$ -функции. Поскольку функция Вигнера осциллирует в зависимости от  $N$  (рис. 2(б)), применение к ней этой идеи объясняет наличие  $N + 1$  пика в распределении  $P^{(W)}(\theta)$ . Таким образом, есть существенное различие в фазовой информации, содержащейся в распределениях  $P^{(Q)}(\theta)$  и  $P^{(W)}(\theta)$ . Из-за процедуры усреднения с весом  $G^{(Q)}(n, k)$

определенная часть фазовой информации в  $P^{(Q)}(\theta)$  теряется [10]. Распределения  $P^{(PB)}(\theta)$  и  $P^{(W)}(\theta)$  почти совпадают, и, по крайней мере в случае СФС, несут в основном одинаковую фазовую информацию. Это сходство согласуется с аргументами концепции области перекрывания в фазовом пространстве. Однако, так как функция Вигнера может принимать отрицательные значения, положительная определенность функции  $P^{(W)}(\theta)$  не гарантирована, в то время как для фазового распределения Пегга–Барнетта такой проблемы нет. Завершая рассмотрение фазовых распределений для СФС, отметим, что для этих состояний не существует хорошо определенной  $\mathcal{P}$ -функции Глаубера–Сударшана, и, следовательно, нельзя определить соответствующего фазового распределения  $P^{(P)}(\theta)$ .

Теперь кратко обсудим фазовые свойства СХС. Согласно определению (7), фазовые распределения для этого состояния можно получить суммированием соответствующих фазовых распределений для СФС по числу фотонов  $N$  с весом  $\bar{n}^N / (1 + \bar{n})^{N+1}$ .  $\mathcal{P}$ -функция для СХС получается простым смещением  $\mathcal{P}$ -функции для хаотического состояния:

$$\mathcal{P}_{\text{d.th.}}(\beta) = \mathcal{P}_{\text{th.}}(\beta - \alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} \exp\left(-\frac{|\beta - \alpha|^2}{\bar{n}}\right). \quad (16)$$

Интегрируя  $\mathcal{P}_{\text{d.th.}}(\beta)$  по радиальной переменной  $|\beta|$ , получаем фазовое распределение  $P^{(P)}(\theta)$ . На рис. 3 приведены фазовые распределения  $P^{(PB)}(\theta)$ ,  $P^{(Q)}(\theta)$ ,  $P^{(W)}(\theta)$  и  $P^{(P)}(\theta)$  для СХС при значениях  $|\alpha| = 3$  и  $\bar{n} = 0.3$ . Видно, что самым узким из этих распределений является  $P^{(P)}(\theta)$ , а самым широким (как и в случае СФС) —  $P^{(Q)}(\theta)$ , тогда как распределения  $P^{(W)}(\theta)$  и  $P^{(PB)}(\theta)$  практически совпадают. Однако, несмотря на указанные особенности, все они несут качественно одинаковую фазовую информацию. Если принять во внимание, что  $Q$ -функцию и функцию Вигнера для СХС можно получить заменой в формуле (16)  $\bar{n}$  на  $(\bar{n} + 1)$  и  $(\bar{n} + 1/2)$  соответственно, то легко интерпретировать такой вид фазовых распределений при помощи концепции области перекрывания в фазовом пространстве, так как и  $\mathcal{P}$ -функция, и  $Q$ -функция, и функция Вигнера имеют в этом пространстве одинаковую форму гауссовского купола, сдвинутого из начала координат на  $\alpha$ . При этом самым узким и высоким является купол  $\mathcal{P}$ -функции, а самым широким и низким — купол  $Q$ -функции. Пересекая эти ку-

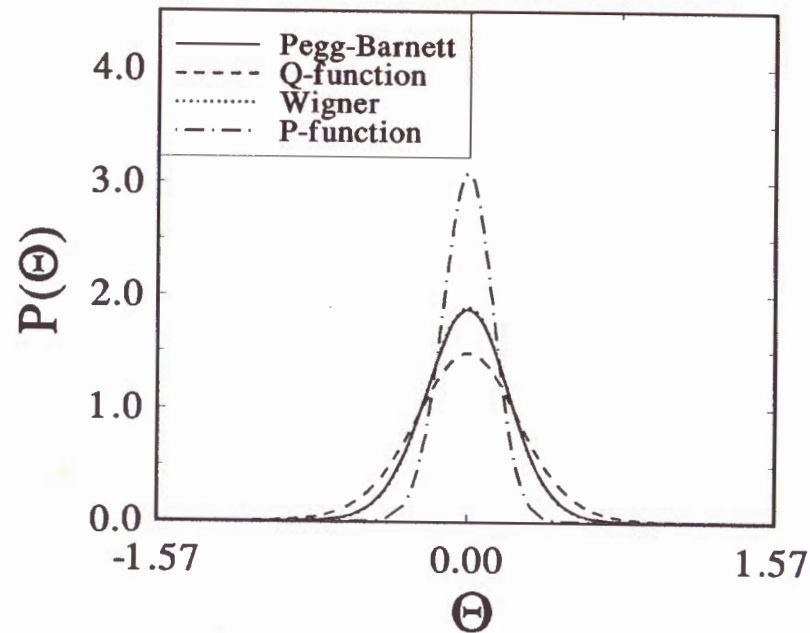


Рис. 3: Фазовые распределения  $P^{(PB)}(\theta)$ ,  $P^{(P)}(\theta)$ ,  $P^{(Q)}(\theta)$  и  $P^{(W)}(\theta)$  для смещенных хаотических состояний;  $|\alpha| = 3$ ,  $\bar{n} = 0.3$

пола азимутальной полуплоскостью под углом  $\theta$  и измеряя площади пересечения, можно получить соответствующие фазовые распределения. Отметим, что в пределе больших  $\bar{n}$  все рассматриваемые распределения становятся равномерными, т.е.  $P(\theta) = 1/2\pi$ .

## References

- [1] Carruthers P. and Nieto M. M. // *Rev. Mod. Phys.* 1968. V. 40. N 2. P. 411–440.
- [2] Barnett S. M. and Pegg D. T. // *J. Phys.* 1986. V. A19. N 18. P. 3849–3862.
- [3] Pegg D. T. and Barnett S. M. // *Europhys. Lett.* 1988. V. 6. N 6. P. 483–487.
- [4] Barnett S. M. and Pegg D. T. // *J. Mod. Opt.* 1989. V. 36. N 1. P. 7–19.
- [5] Pegg D. T. and Barnett S. M. // *Phys. Rev.* 1989. V. A39. N 4. P. 1665–1675.
- [6] Braunstein S. L. and Caves C. M. // *Phys. Rev.* 1990. V. A42. N 7. P. 4115–4119.
- [7] Schleich W., Horowicz R. J. and Varro S. // *Phys. Rev.* V. A40. N 12. P. 7405–7408.
- [8] Schleich W., Bandilla A. and Paul H. // *Phys. Rev.* 1992. V. A45. N 9. P. 6652–6654.
- [9] Tanaś R., Gantsog Ts., Miranowicz A. and Kielich S. // *J. Opt. Soc. Am.* 1991. V. B8. N 8. P. 1576–1582.
- [10] Tanaś R. and Gantsog Ts. // *Phys. Rev.* 1992 V. A45. N 7. P. 5031–5038.
- [11] Tanaś R., Murzakhmetov B. K., Gantsog Ts. and Chizhov A. V. // *Quantum Opt.* 1992. V. 4. N 1. P. 1–7.
- [12] Chizhov A. V., Gantsog Ts. and Murzakhmetov B. K. // *Preprint JINR, E17-92-271, Dubna, 1992.*
- [13] de Oliveira F. A. M., Kim M. S., Knight P. L. and Bužek V. // *Phys. Rev.* 1990. V. A41. N 5. P. 2645–2652.
- [14] Král P. // *J. Mod. Opt.* 1990. V. 37. N 5. P. 889–917.

Рукопись поступила в издательский отдел

8 июля 1992 года.

Ганцог Ц. и др.

P17-92-289

Фазовые распределения для смещенного  
фоковского и смещенного хаотического состояний

Исследованы фазовые свойства смещенного фоковского и смещенного хаотического состояний с использованием двух различных подходов к описанию фазы. Для смещенного фоковского состояния показано, что фазовое распределение Пегга - Барнетта и фазовое распределение, связанное с функцией Вигнера, близки друг к другу, тогда как фазовое распределение, связанное с Q-функцией, несет меньше фазовой информации. В случае смещенного хаотического состояния все фазовые распределения качественно похожи и в пределе большого среднего числа фотонов переходят в равномерное распределение. Результаты имеют ясную интерпретацию в терминах концепции области перекрытия в фазовом пространстве.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Gantsog Ts. et al.  
Phase Distributions of Displaced Number  
States and Displaced Thermal States

P17-92-289

Phase properties of displaced number states and displaced thermal states are studied. Phase distributions based on different phase approaches are obtained and illustrated graphically. It is shown for displaced number states that the Pegg - Barnett phase distribution and the phase distribution associated with the Wigner function are very close to each other, while the phase distribution associated with the Q function carries less phase information. In the case of displaced thermal states all phase distributions qualitatively resemble one another and turn into uniform distribution in the limit of large mean photon number. The results have clear interpretation in terms of the area-of-overlap in phase space.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992