92-104

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-92-104

А.Б.Гордиец, В.Хмельовски

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ БОЗОННАЯ МОДЕЛЬ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1992

Среди моделей нелинейного взаимодействия электромагнитного поля со средой важное место занимает модель так называемого параметрического усилителя [1,2]. В простейшем случае процесс синхронизированного по фазе вырожденного параметрического усиления может рассматриваться как взаимодействие полей с частотами 2ω и ω (см.[3]). Для описания такого процесса обычно используется модель с билинейным бозонным гамильтонианом, получаемым в предположении о том, что одно из действующих на среду полей является классическим [4]. Такая модельная задача может быть точно решена с помощью канонического преобразования Боголюбова; при этом удается получить условия сжатия квантовых флуктуаций электромагнитного поля [3,5,6] [1].

Вместе с тем, параметрическое усиление представляет собой процесс с кубической нелинейностью по Бозе-полям, описываемый гамильтонианом вида

$$H = 2\omega a^+a + \omega b^+b + \kappa(b^+ba + a^+b^+b), \tag{1}$$

$$[a,a^+] = [b,b^+] = 1,$$

$$[a^\#,b^\#] = 0.$$

Здесь константа связи κ определяется свойствами нелинейной среды [1,2]. Такой гамильтониан, очевидно, не

---

[1] *Относительно сжатия см.* [2,7].

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

может быть диагонализирован с помощью канонического преобразования Боголюбова. Вообще, решение модельных задач с бозонными гамильтонианами, содержащими кубичную нелинейность, представляет весьма сложную математическую проблему, а известные точные результаты [8,9] были получены для специальных моделей, описывающих рассеяние Рамана. Здесь мы покажем, что модельная задача с гамильтонианом (1) также может быть решена точно, и исследуем некоторые физические следствия.

Заметим прежде всего, что в системе, описываемой гамильтонианом (1), имеет место сохранение числа квантов поля с частотой ω:

$$b^+b \equiv N = \mathrm{const}\ I, \qquad (2)$$

$$[N,H] = 0.$$

Запишем уравнения движения для поля с частотой 2ω:

$$\begin{cases} i\dot{a} = 2\omega a + \kappa N, \\ i\dot{a}^+ = -2\omega a^+ - \omega N . \end{cases}$$

Их решение с учетом (2) имеет вид

$$\begin{cases} a(t) = a_F(t) + \gamma N(e^{-2i\omega t}-1), \\ a^+(t) = a_F^+(t) + \gamma N(e^{+2i\omega t}-1), \end{cases} \qquad (3)$$

$$\gamma = k/2\omega.$$

Здесь операторы $a_F^{\#}(t)$ описывают свободную эволюцию поля с частотой 2ω:

$$a_F(t) \equiv a(0)e^{-2i\omega t}.$$

Заметим, что каноническим преобразованием

$$c = a + \gamma N, \qquad c^+ = a^+ + \gamma N,$$

$$[c,c^+] = 1,$$

гамильтониан (1) приводится к виду

$$H = H_C + H_N,$$

$$H_C = 2\omega c^+c,$$

$$H_H = \omega N - 2\gamma^2 N^2,$$

где

$$[H_C,H_N] = 0.$$

Здесь первое слагаемое H_C соответствует энергии свободного Бозе-поля квазичастиц, описываемых операторами c^{*}, а второе слагаемое - энергии системы с так называемой керровской нелинейностью. Для последней имеет место явление сжатия [10].

Рассмотрим теперь эволюцию различных характеристик поля с частотой 2ω. Начнем со среднего числа фотонов. В силу (3) имеем

$$\langle a^+a\rangle_t = \langle a^+a\rangle_o + 2\gamma^2\langle N^2\rangle_o(1-\cos 2\omega t) + \gamma\langle N\rangle_o(\langle a^+ + a\rangle_o - \langle a_F^+ + a_F\rangle_t). \qquad (4)$$

Здесь

$$\langle\ldots\rangle_t = \mathrm{Tr}(\ldots\rho_o),$$

$$r_o = r_a \otimes r_b$$

и ρ_o - матрица плотности соответствующего поля в начальный момент времени t=0. Если начальное состояние поля с частотой 2ω является хаотическим или фоковским, то

$$\langle a^+ + a\rangle_o - \langle a^+_F + a_F\rangle = 0$$

и, следовательно,

$$\langle a^+a\rangle_t = \langle a^+a\rangle_o + 2\gamma\langle N^2\rangle_o(1-\cos 2\omega t), \qquad (5)$$

т.е. имеет место периодическое изменение среднего числа фотонов в моде с частотой 2ω. Подчеркнем, что максимальное число квантов с двойной частотой пропорционально квадрату числа квантов с частотой ω. Действительно,

$$\langle N^2\rangle_o = \langle N\rangle_o^2$$

в случае фоковского начального состояния поля с частотой ω,

$$\langle N^2\rangle_o = 2\langle N^2\rangle_o + \langle N\rangle_o$$

в случае хаотического состояния,

$$\langle N^2\rangle_o = \langle N\rangle_o^2 + \langle N\rangle_o$$

в случае когерентного состояния и т.д.

Рассмотрим теперь когерентное начальное состояние поля с частотой 2ω. Пусть такое состояние характеризуется параметром α:

$$a|a\rangle = a|a\rangle, \quad a\in\mathbb{C}.$$

Тогда из (4) получаем

$$\langle a^+a\rangle_t = |a|^2+2\gamma^2\langle N^2\rangle_o(1-\cos 2\omega t)+2\gamma\langle N\rangle_o|a|\{\cos(\psi-2\omega t)\}, \qquad (6)$$

где $\psi = \arg\alpha$.

Наконец, в случае, когда начальное состояние моды 2ω является сжатым [2,7], имеем

$$\langle a^+a\rangle_t = |a|^2 + \mathrm{sh}^2 r + 2\gamma^2\langle N^2\rangle_o(1-\cos 2\omega t) + 2|a|\langle N_o\rangle *$$
$$*\{[\cos\psi - \cos(\psi-2\omega t)]\mathrm{ch}r - [\cos(\psi-\phi) - \cos(\psi-\phi+2\omega t)]\mathrm{sh}r\}, \quad (7)$$

где $\alpha=|\alpha|e^{i\psi}$, r и ϕ – параметры сжатого состояния. Как нетрудно видеть, при $r=0$ соотношение (7) переходит в (6).

Найдем теперь дисперсию числа квантов моды 2ω:

$$V_t(a^+a) \equiv \langle(a^+a)^2\rangle_t - \langle a^+a\rangle_t^2.$$

Для этого вычислим $\langle(a^+a)^2\rangle_t$. Используя точные соотношения (3), получаем

$$\langle(a^+a)^2\rangle_t = \langle(a^+a)^2\rangle_o + \gamma N\{\langle a^+a[(a^++a) - (a_F^+ + a_F)]\rangle_o +$$
$$+\langle[(a^++a)-(a_F^+ + a_F)]a^+a\rangle_o\} + 4\gamma^2\langle N^2\rangle_o\langle a^+a\rangle_o(1-\cos 2\omega t)+$$
$$+\gamma^2\langle N^2\rangle_o\langle[(a_o^++a_o) - (a_F^+ + a_F)]\rangle_o^2 + 4\gamma^3\langle N^3\rangle_o\langle(a_o^++a_o)-$$
$$-(a_F^+ + a_F)\rangle_o + 4\gamma^4\langle N^4\rangle_o(1-\cos 2\omega t)^2. \qquad (8)$$

Отсюда с учетом (4) получаем

$$V_t(a^+a) = V_o(a^+a) + 4\gamma^4V_o(N^2)(1-\cos 2\omega t)^2+4\gamma^3(\langle N^3\rangle_o-\langle N^2\rangle_o*$$
$$*\langle N\rangle_o)\langle(a^++a) - (a_F^++a_F)\rangle_o(1-\cos 2\omega t) + \gamma\langle N\rangle_o\{\langle a^+a,(a^++a)-$$
$$-(a_F^++a_F)\rangle_o + \langle(a^++a) - (a_F^++a_F),a^+a\rangle_o\} + \gamma^2\langle N^2\rangle_o\langle[(a^++a)-$$
$$-(a_F^++a_F)]^2\rangle_o - \gamma^2\langle N\rangle_o^2\langle(a^++a) - (a_F^+ + a_F)\rangle_o^2, \qquad (9)$$

где

$$\langle A,B\rangle \equiv \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle.$$

Исследование дисперсии числа квантов моды 2ω начнем с простейшего случая, когда начальное состояние является вакуумным. Тогда

$$V_o(a^+a) = 0,$$
$$\langle(a^++a) - (a_F^+ + a_F)\rangle_o = 0,$$
$$\langle[(a^++a)^2 - (a_F^+ + a_F)]^2\rangle_o = 2(1-\cos 2\omega t),$$
$$\langle a^+a,(a^++a) - (a_F^+ + a_F)\rangle_o = \langle(a^++a) - (a_F^+ + a_F),a^+a\rangle_o = 0.$$

Поэтому

$$V_t(a^+a) = 4\gamma g^4V_o(N^2)(1-\cos 2\omega wt)^2 + 2\gamma g^2\langle N^2\rangle_o(1-\cos 2\omega wt). \quad (10)$$

Из (10) следует, что независимо от дисперсии $V_o(N^2)$ квадрата числа квантов моды ω дисперсия $V_o(a^+a)$ числа квантов моды 2ω положительна, если

$$\langle a^+a\rangle \neq 0,$$

т.е. для моментов времени, принадлежащих дополнению множества $\frac{2k\pi}{2\omega}$, $k=0,1,2,\ldots$ на вещественной оси. В остальных случаях

$$V_t(a^+a)=0.$$

Напомним, что распределение принято называть субпуассоновским, если [6]

$$V(a^+a) < \langle a^+a\rangle. \qquad (11)$$

Для рассматриваемого случая вакуумного начального состояния моды 2ω условие (11) имеет вид

$$V_o(N^2)(1-\cos 2\omega t)^2 < 0,$$

т.е. не выполняется ни для каких t. Следовательно, генерация фотонов моды 2ω с субпуассоновским распределением числа квантов при вакуумном начальном состоянии невозможна, независимо от состояния поля с частотой ω. С другой стороны, при условии

$$V_o(N^2) = 0 \qquad (12)$$

имеет место равенство

$$\forall t \qquad V_t(a^+a) = \langle a^+a\rangle_t,$$

соответствующее пуассоновскому распределению. Равенство (12) имеет место для начального фоковского состояния поля с частотой ω. Для других начальных состояний моды ω для фотонов, генерируемых в моде 2ω, реализуется суперпуассоновское распределение квантов.

Для дисперсии (9) в случае фоковского начального состояния моды 2ω имеем

$$V_t(a^+a) = 4\gamma_o^4 V\,(N^2)(1-\cos 2\omega t)^2 + (4n + 2)\gamma^2\langle N_o^2\rangle(1-\cos 2\omega t),$$

где $n=1,2,\ldots$ – начальное число фотонов. Условие (11) теперь принимает вид

$$4\gamma^4 V_o(N^2)(1-\cos 2\omega t)^2 + (4n+2)\gamma^2\langle N^2\rangle_o(1-\cos 2\omega t) < n,$$

что эквивалентно неравенству

$$\cos 2\omega t > \frac{n\langle N^2\rangle_o - \sqrt{n^2\langle N^2\rangle^2 + nV_o(N^2)}}{2\gamma^2 V_o(N^2)}, \qquad (13)$$

определяющему моменты времени, для которых реализуется субпуассоновское распределение в моде 2ω. Как нетрудно видеть из (13), для любого начального распределения в моде ω можно найти такие значения n, для которых будет возможной генерация фотонов моды 2ω с субпуассоновским распределением.

В случае хаотического начального состояния моды 2ω со средним числом квантов

$$\langle a^+a\rangle = \bar{n}$$

имеем

$$V_t(a^+a) = \bar{n}^2+\bar{n}+4\gamma^4 V_o(N^2)(1-\cos 2\omega t)^2+(4\bar{n} + 2)\gamma^2\langle N\rangle_o^2(1-\cos 2\omega t)$$

По аналогии с (13) для условия (11) получаем

$$\cos 2\omega t > \frac{n\langle N^2\rangle_o - \sqrt{\bar{n}V_o(N^2) - \bar{n}^2\langle N^4\rangle_o}}{2g^2 V_o(N^2)}. \qquad (14)$$

Отсюда следует, что субпуассоновское распределение фотонов в моде 2ω может реализоваться только при достаточно малом числе начальных квантов

$$\bar{n} < V_o(N^2)/\langle N^4\rangle_o.$$

Аналогичным образом можно найти условие реализации субпуассоновского распределения фотонов моды 2ω для когерентного и сжатого начальных состояний.

Перейдем теперь к исследованию проблемы сжатия квантовых флуктуаций квадратур поля на частоте 2ω. По определению квадратур [7] имеем

$$Q = (a^{+}+a)/2, \quad P = i(a^{+}-a)/2.$$

С учетом соотношений (3) имеем

$$\begin{cases} Q(t) = Q_F(t) + \gamma N(\cos 2\omega t-1), \\ P(t) = P_F(t) - \gamma N\sin 2\omega t, \end{cases} \qquad (15)$$

где

$$Q_F(t)=\frac{a_F^{+} + a_F}{2}, \quad P_F=i*\frac{a_F^{+} - a_F}{2}.$$

Отсюда для средних имеем

$$\begin{cases} \langle Q\rangle_t=\langle Q_F\rangle+\gamma\langle N\rangle_o(\cos 2\omega t-1), \\ \langle P\rangle_t=\langle P_F\rangle-\gamma\langle N\rangle_o\sin 2\omega t. \end{cases} \qquad (16)$$

С учетом соотношений (15), (16) для дисперсий квадратур поля с частотой 2ω получаем

$$\begin{cases} V_t(Q)=V(Q_F)+\gamma^2V_o(N)(\cos 2\omega t-1)^2, \\ V\ (P)=V(P\ )+\gamma^2V\ (N)\sin^2 2\omega t. \end{cases} \qquad (17)$$

Из соотношений (17) следует, что для любых моментов времени дисперсии квадратур моды 2ω, генерируемой в процесе взаимодействия (1), не меньше дисперсий, подчиняющихся закону эволюции свободного поля с частотой 2ω:

$$\forall\ t \quad V_t(Q) > V(Q_F), \quad V_t(P) > V(P_F).$$

Поэтому явление сжатия, определяемое условием [7]:

$$V(X) < 1/4, \quad X \doteq Q \text{ или } P,$$

может иметь место лишь в том случае, когда начальное состояние моды 2ω является сжатым. Рассмотрим для простоты в качестве начального состояния моды 2ω сжатое вакуумное состояние [7], характеризуемое параметрами ϕ, r. Тогда

$$\begin{cases} V(Q\ ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}sh^2r - \frac{1}{2}\cos(\phi-4\omega t)\ shr\ chr, \\ V(P_F) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}sh^2r - \frac{1}{2}\cos(\phi-4\omega t)\ shr\ chr\ . \end{cases}$$

Теперь для дисперсий (17) получаем

$$\begin{cases} V(Q_F) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}sh^2r-\frac{1}{2}\cos(\phi-4\omega t)shrchr + \gamma^2V_o(N)(\cos 2\omega t-1)^2, \\ V(P_A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}sh^2r-\frac{1}{2}\cos(\phi-4\omega t)shrchr + \gamma^2V_o(N)(\cos 2\omega t-1)^2. \end{cases}$$

Условие сжатия для компоненты Q в рассматриваемом случае имеет вид

$$sh^2r - \cos(\phi-4\omega t)\ shr\ chr + 2\gamma^2V_o(N)(\cos 2\omega t-1)^2 < 0. \qquad (18)$$

Необходимым условием реализации (18) является, очевидно,

$$\cos(\phi-4\omega t) > 0, \qquad (19)$$

откуда

$$4\phi + (4k+1)\pi > 8\omega t > 4\phi + (4k-1)\pi, \quad k=0,1,2,...$$

В противоположном случае сжатие квадратуры Q отсутствует, но может реализоваться сжатие квадратуры P. Далее, очевидно, наиболее благоприятным для получения сжатия случаем является ситуация, когда начальное состояние моды ω является фоковским, т.е. $V_o(N) = 0$. В этом случае необходимым и достаточным условием сжатия является неравенство (ср.(19))

$$\cos(\phi-4\omega t) > th(r),$$

причем при условии

$$\cos(\phi-4\omega t) > \cos\phi$$

первоначальное сжатие усиливается.

Рассмотрим теперь случай $V_o(N) > 0$. Пусть для простоты $\phi=0$. Тогда условие сжатия для квадратуры Q (18) принимает вид

$$2\cos^2 2\omega t(\gamma^2 V_o(N) - \mathrm{shr}\,\mathrm{chr}) - 4\gamma V_o^2(N)\cos 2\omega t + 2\gamma^2 V_o^2(N) + \mathrm{sh} r^2 + \mathrm{shr}\,\mathrm{chr} < 0.$$

Это квадратное относительно $\cos 2\omega t$ неравенство определяет моменты времени, для которых имеет место сжатие квантовых флуктуаций квадратуры Q моды 2ω.
В силу симметрии величин $V_t(Q)$ и $V_t(P)$ аналогичным образом может быть исследовано сжатие квадратуры P моды 2ω.

Таким образом, мы показали, что в предложенной здесь модели синхронизованного по фазе параметрического усилителя (1) может быть получено точное операторное решение (3), позволяющее определить эволюцию квантовых флуктуаций числа фотонов и квадратур одной из мод электромагнитного поля, участвующей в процессе взаимодействия. На основании полученного результата могут быть также вычислены любые другие характеристики как указанной моды, так и моды ω.

Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность А.С.Шумовскому за постановку задачи, а также А.В.Андрееву, В.И.Рупасову и В.С.Ярунину за полезные обсуждения.

Литература

1. Yariv A., LouisellW.H.-IEEE J.Quantum Electronics, 1966, v.QE-2, p.418
2. Yamamoto Y., Haus H.A. - Rev.Mod.Phys., 1986, v.58, p.1001
3. Yuen H.P. - Phys.Rev.A, 1976, v.13, p.2226
4. Mollow B.R., Glauber R.J. - Phys.Rev., 1967, v.160, p.1076;1097
5. Lu E.Y.C. - Phys.Rev.Lett., 1974, v.23, p.1397
6. Stoler D. - Phys.Rev.Lett., 1974, v.23, p.1397
7. Боголюбов Н.Н.(мл.),Козеровски М.,Чан Куанг,Шумовский А.С. ЭЧАЯ, 1988, т.19, с.831
8. Рупасов В.И. - ЖЭТФ, 1988, т.94, с.84
9. Carusotto S. - Phys.Rev.A, 1989, v.40, p.1848
10. Tanas' R. - Phys.Lett.A, 1989, v.141, p.217

Рукопись поступила в издательский отдел
10 марта 1992 года.