объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-90-33

Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев

К ТЕОРИИ КОНЕЧНОРАЗМЕРНОГО ПОДОБИЯ ПРИ НАЛИЧИИ "ОПАСНОЙ НЕСУЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ"

Направлено в "Journal of Statistical Physics"

1990

I. Введение

В соответствии с гипотезой конечноразмерного подобия (скейлинга при конечном размере) Фишера /I,2/ в окрестности критической температуры $T = T_c$ фазового перехода второго рода эффекты конечного размера L системы определяются безразмерным отношением L/ξ_∞, где ξ_∞ – объемная корреляционная длина, которая расходится при $t=(T-T_c)/T_c \to 0$ как $|t|^{-\nu}$. Известно, что при пространственных размерностях d выше верхней критической размерности d_u эта гипотеза не выполняется /3-6/. Как показывает анализ методом ренормализационной группы, нарушение этой гипотезы, так же как и нарушение соотношения гиперскейлинга, является следствием появления "опасной несущественной переменной" в теории при $d > d_u$. При выводе законов подобия для термодинамических функций ниже d_u используется предположение об аналитической зависимости этих функций от несущественных переменных, что при $d > d_u$ заведомо несправедливо /7,8/. В этом случае, как утверждается в работах /9-I0/, конечноразмерные эффекты определяются не отношением L/ξ_∞, а L/ℓ_∞, где величина ℓ_∞ называется термодинамической длиной. Для системы с конечной блочной геометрией, при $t \to 0$

$$\ell \sim |t|^{-(2\beta+\gamma)/d} \quad . \tag{I}$$

Из (I) видно, что, если гиперскейлинг справедлив, $2\beta+\gamma = d\nu$, термодинамическая длина совпадает с корреляционной длиной.

Изучение конечноразмерных эффектов в режиме среднего поля $(d > d_u)$ представляет практический интерес для систем с дальнодействующим потенциалом взаимодействия, $J(r) \sim r^{-d-\sigma}$ при $r \to \infty$, $\sigma > 0$, так как в этом случае $d_u = 2\sigma$ меньше физически реализуемых размерностей $d = 1,2,3$ при достаточно малом σ.

Целью настоящей работы является формулировка гипотезы обобщенного конечноразмерного подобия для систем с дальнодействующим потенциалом взаимодействия при размерности $d > d_u = 2\sigma$. Идеи, предложенные в /9/ для систем с близкодействующим взаимодействием ($\sigma = 2$) и блочной геометрией ($d' = 0$), развиваются для случая геометрии общего вида $L^{d-d'} \times \infty^{d'}$ с периодическими граничными условиями вдоль $d-d'$ измерений, по которым система конечна. С методической точки зрения удобно использовать точно решаемую среднюю сферическую модель с дальнодействующим взаимодействием в качестве основы для дальнейших обобщений.

2. Конечноразмерное подобие для средней сферической модели

В работе /11/ была предложена аналитическая техника для вычисления плотности свободной энергии для сферической модели на конечной решетке $\Lambda = L_1 \times \cdots \times L_d$ с периодическими граничными условиями. Рассматривалось парное взаимодействие $J(r)$, спадающее на больших расстояниях r как $r^{-d-\sigma}$, где $\sigma > 0$ -параметр. В этом случае фурье-образ потенциала эффективного взаимодействия

$$\hat{J}(\underset{\sim}{q}) = \sum_{\underset{\sim}{\ell} \in \Lambda} \tilde{J}_\Lambda(\underset{\sim}{\ell})\, e^{-i\underset{\sim}{\ell}\cdot\underset{\sim}{q}} , \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{q} = \{2\pi n_1/L_1, \dots, 2\pi n_d/L_d\}, \quad n_k \in \{-(L_k-1)/2, \dots, (L_k-1)/2\},$$

где $\tilde{J}(\underset{\sim}{\ell})$ учитывает взаимодействие с повторяющимися образами системы /I2/,

$$\tilde{J}_\Lambda(\underset{\sim}{\ell}) = \sum_{\underset{\sim}{t} \in \mathbf{Z}^d} J\left(\left[\sum_{k=1}^{d}(\ell_k - L_k t_k)^2\right]^{1/2}\right),$$

имеет длинноволновую асимптотику вида $(0<\sigma\leq 2)$

$$\hat{J}(\underset{\sim}{q}) \simeq \hat{J}(0)(1-\rho_\sigma|\underset{\sim}{q}|^\sigma), \quad |\underset{\sim}{q}| \to 0, \quad \rho_\sigma > 0. \tag{3}$$

В /I1/ вычислена и исследована плотность свободной энергии $f_L(t,h)$ при наличии внешнего магнитного поля $H \in \mathbb{R}^1$, $h = H/k_B T$, в случае гиперкубической геометрии $L_1 = \dots = L_d = L$. Следуя предложенному там методу, для случая системы с общей геометрией $L^{d-d'} \times \infty^{d'}$, для сингулярной части плотности свободной энергии в окрестности критической точки получаем

$$(k_B T)^{-1} f_L^{(s)}(t,h) \simeq \frac{1}{2}\rho_\sigma(K_c - K)\tilde{\phi} - \frac{1}{4}\rho_\sigma^2 |W'_{d,\sigma}(0)|\tilde{\phi}^2 -$$
$$- \frac{h^2}{2\rho_\sigma K\tilde{\phi}} - \frac{1}{2}\sigma\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{(d+1)/2}} L^{-d} {\sum_{\underset{\sim}{\ell}(d-d')}}' |\underset{\sim}{\ell}|^{-d} u_{d,\sigma}(L|\underset{\sim}{\ell}|\tilde{\phi}^{1/\sigma}). \tag{4}$$

Здесь символ $\underset{\sim}{\ell}(d-d')$ означает, что суммирование проводится по $\underset{\sim}{\ell} \in \mathbf{Z}^{d-d'}$, **штрих** над знаком суммы означает, что опущен член с $|\underset{\sim}{\ell}| = 0$, $K = \hat{J}(0)/k_B T$, $K_c = 1$. В (4) введена функция

$$\mathcal{U}_{d,\sigma}(z) = \int_0^\infty dx\,(1+x^2)^{-(d+1)/2}\, E_{\sigma,1}(-x^\sigma z^\sigma), \tag{5}$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

- функция типа Миттага - Леффлера (подробности см. в /II/). Параметр $\tilde{\phi} = \phi/\rho_\sigma$, $\phi = 2s/K - 1$, в (4) зависит линейно от сферического поля s и удовлетворяет среднему сферическому условию, которое в окрестности критической точки $K = 1$, $h = 0$ и при $d > 2\sigma$, $d' < \sigma$ принимает вид /I3/

$$|W'_{d,\sigma}(0)|\tilde{\phi} L^{d-\sigma} - D^{(0)}_{d',\sigma}(\tilde{\phi} L^\sigma)^{(d'-\sigma)/\sigma} + D^{(1)}_{d,\sigma}(\tilde{\phi} L^\sigma)^{(d-\sigma)/\sigma} +$$

$$+ 2 Y^{(s)}_{d,d',\sigma}(\tilde{\phi} L^\sigma) = \rho_\sigma t L^{d-\sigma} + \rho_\sigma^{-1} h^2 L^{d-\sigma} \tilde{\phi}^{-2}. \tag{7}$$

Это уравнение справедливо для всех размерностей d, таких, что $\sigma I < d < \sigma(I+1)$ при некотором целом $I \geq 2$; $W'_{d,\sigma}(0)$ - производная в точке $\tilde{\phi} = 0$ интеграла типа Ватсона

$$W_{d,\sigma}(\tilde{\phi}) = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi]^d} d^d q\, (\tilde{\phi} + |\underset{\sim}{q}|^\sigma)^{-1}, \tag{8}$$

которая определена и конечна при всех $d > 2\sigma$; $Y^{(s)}_{d,d',\sigma}(\cdot)$ - спин-волновая функция подобия, введенная Фишером и Привманом /I2/ при $d' = 1$. Константы $D^{(1)}_{d,\sigma}$ в (7) имеют следующий явный вид

$$D^{(I)}_{d,\sigma} = 2\pi(-1)^{I}\left[(4\pi)^{d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sigma \sin\frac{(d-\sigma I)\pi}{\sigma}\right]^{-1} . \tag{9}$$

Исследование /I4/ парной спин-спиновой корреляционной функции $G_L(\underset{\sim}{R};t,h)$ в системе с геометрией $L^{d-d'}\times\infty^{d'}$ показало, что при $\tilde{\phi}\to 0$ и $|\underset{\sim}{R}|\gg 1$ её ведущая асимптотика имеет вид

$$G_L(\underset{\sim}{R};t,h) \simeq D(T)|\underset{\sim}{R}|^{-d+\sigma} X(\tilde{\phi}^{1/\sigma}\underset{\sim}{R}, \tilde{\phi}^{1/\sigma}L) , \tag{I0}$$

где $\tilde{\phi}$ удовлетворяет уравнению (7). Этот результат позволяет ввести эффективную корреляционную длину

$$\xi_L(t,h) = [\tilde{\phi}_L(t,h)]^{-1/\sigma} \tag{II}$$

при любой пространственной размерности d . При $d>2\sigma$ и $L\to\infty$ сферическое условие (7) имеет решение $\tilde{\phi}L^{\sigma}\to 0$. Тогда, пренебрегая в (7) членами порядка $\mathcal{O}(\tilde{\phi}L^{\sigma})$, с учетом определения (II) получим следующее уравнение для $\xi_L = \tilde{\phi}_L^{-1/\sigma}$:

$$|W'_{d,\sigma}(0)|(L/\xi_L)^{\sigma}L^{d-2\sigma} - D^{(0)}_{d',\sigma}(L/\xi_L)^{-\sigma+d'} = \tag{I2}$$
$$= \rho_\sigma \tilde{t} L^{d-\sigma} + \rho_\sigma^{-1} h^2 L^{d+\sigma}(\xi_L/L)^{2\sigma} ,$$

где переменная

$$\tilde{t} = t - 2Y^{(s)}_{d,d',\sigma}(0)/\rho_\sigma L^{d-\sigma} \tag{I3}$$

учитывает конечноразмерный сдвиг критической температуры[7,15]. Очевидно, что решение уравнения (12) можно записать в виде

$$\xi_L = L\,\xi(\hat{t}L^{y_T}, hL^{y_H}, L^{y_u}), \tag{14}$$

где при $d > d_u = 2\sigma$

$$y_T = 1/\nu = \sigma, \quad y_H = \Delta/\nu = 3\sigma/2, \quad y_u = 2\sigma - d. \tag{15}$$

С другой стороны, вводя новые переменные

$$\xi_L^* = \xi_L L^{-1-q_1 y_u}, \quad t^* = \tilde{t} L^{y_T + q_2 y_u}, \quad h^* = hL^{y_H + q_3 y_u}, \tag{16}$$

где

$$q_1 = -(2\sigma - d')^{-1}, \quad q_2 = q_1 y_T, \quad q_3 = q_1 y_H, \tag{17}$$

решение того же самого уравнения (12) можно представить в эквивалентной форме

$$\xi_L = L^{1+q_1 y_u}\, \bar{\xi}(\tilde{t} L^{y_T + q_2 y_u}, hL^{y_H + q_3 y_u}). \tag{18}$$

Подчеркнем, что здесь $q_1 y_u > 0$, в явном противоречии с предположением работы[9]. Объяснение этого факта заключается в том, что неравенство [9] $q_1 y_u \leq 0$ справедливо только тогда, когда корреляционную длину можно определить через второй момент парной корреляционной функции. В случае же дальнодействия $(0<\sigma<2)$ роль эффективной корреляционной длины, масштабирующей большие расстояния в парной корреляционной функции, см. (10), играет величина $\tilde{\phi}^{-1/\sigma}$ /14/. Как известно, в критической точке эта величина может расти быстрее линейной степени L при $L\to\infty$, если $d>d_u$ /3,5,6,16/.

Рассмотрим теперь выражение (3) для плотности свободной энергии. Так как ввиду (18) $L\tilde{\phi}_L^{1/\sigma}\to 0$ при $L\to\infty$ и фиксированных t^*, h^*, то сумму в правой части (3) при $0<d'<\sigma$ и $d>2\sigma$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\sum_{\underset{\sim}{\ell}(d-d')}' |\underset{\sim}{\ell}|^{-d} u_{d,\sigma}(L|\underset{\sim}{\ell}|\tilde{\phi}^{1/\sigma}) \simeq u_{d,\sigma}(0)\sum_{\underset{\sim}{\ell}(d-d')}' |\underset{\sim}{\ell}|^{-d} -$$

$$-(L^\sigma\tilde{\phi})^{d'/\sigma}\frac{2\pi^{(d-d')/2}}{\Gamma\left(\frac{d-d'}{2}\right)}\int_0^\infty dr\, r^{-d'-1}[u_{d,\sigma}(0)-u_{d,\sigma}(r)] = \qquad (19)$$

$$= u_{d,\sigma}(0)\sum_{\underset{\sim}{\ell}(d-d')}' |\underset{\sim}{\ell}|^{-d} - \frac{\pi^{(d+1)/2}}{d'\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}|D^{(0)}_{d',\sigma}|(L^\sigma\tilde{\phi})^{d'/\sigma}.$$

Теперь, учитывая соотношения (14) и (18), для плотности свободной энергии (3) получаем два эквивалентные представления:

$$(k_B T)^{-1} f_L(t,h) \simeq L^{-d} f(\tilde{t}L^{y_T}, hL^{y_H}, L^{y_u}) \qquad (20)$$

и

$$(k_B T)^{-1} f_L(t,h) \simeq L^{-d^*}\bar{f}(\tilde{t}L^{y_T+q_2 y_u}, hL^{y_H+q_3 y_u}), \qquad (21)$$

где показатель d^*,

$$d^* = d + d' q_1 y_u \,, \tag{22}$$

связан с аномальной размерностью Фишера (I7).

3. <u>Общая гипотеза</u>

Полученные точные результаты для сферической модели можно интерпретировать в терминах зависимости функций конечномерного подобия от опасной переменной /I7/ u с показателем $y_u = d_u - d < 0$ при $d > d_u$:

$$f_L = L^{-d} f\left(tL^{y_T}, hL^{y_H}, uL^{y_u}\right)$$

$$\xi_L = L\,\xi\left(tL^{y_T}, hL^{y_H}, uL^{y_u}\right) \,, \tag{23}$$

где

$$f(x,y,z) = z^{d'q_1} \bar{f}\left(xz^{q_2}, yz^{q_3}\right),$$

$$\xi(x,y,z) = z^{q_1} \bar{\xi}\left(xz^{q_2}, yz^{q_3}\right). \tag{24}$$

Можно предположить, что в общем случае $O(n)$ моделей при $d > d_u$ показатели q_1, q_2, q_3 принимают значения (I7), где $y_T = 1/\nu = \sigma$, $y_H = \Delta/\nu = 3\sigma/2$.

Во-первых, следует подчеркнуть, что переменная u является опасной для плотности свободной энергии только при $d' > 0$. В этом случае нормировочный коэффициент для плотности свободной энергии, см. (2I) и (22), имеет смысл корреляционного объема

$$L^{d-d'}\xi_L^{d'} \sim L^{d+d'q_1y_u} = L^{d^*}. \tag{25}$$

В работе Биндера и др.[9] приведены три аргумента в пользу того, что $d^*=d$. Эти аргументы , однако, основываются на предположении о полностью конечной геометрии системы, т.е. что $d'=0$.

Во-вторых, заметим, что из (23) и (24) следует

$$\xi_L(t,h,u) = L^{1+q_1y_u}\,\bar{\xi}(tL^{y_T^*}, hL^{y_H^*}), \tag{26}$$

где

$$y_T^* = y_T + q_2y_u \ , \quad y_H^* = y_H + q_3y_u \ . \tag{27}$$

Существование термодинамического предела ξ_∞ для ξ_L приводит к условию, что при фиксированных $t>0$ и $ht^{-\Delta}$

$$\xi_\infty(t,h,u) \sim t^{-\nu}X(ht^{-\Delta}), \tag{28}$$

где

$$\Delta = y_H^*/y_T^* \ , \quad 1+q_1y_u = \nu y_T^* \tag{29}$$

и $X(\cdot)$ - некоторая универсальная функция. С учетом (29) соотношение (26) можно переписать в виде

$$\ell_L = L\,g(tL^{y_T^*}, hL^{y_H^*}) \ , \quad \ell_L = \xi_L^{1/\nu y_T^*} \ , \tag{30}$$

где введена новая характерная длина ℓ_L для конечной системы и функция $g(x,y)=[\bar{\xi}(x,y)]^{1/\nu y_T^*}$. Далее, из условия существования термодинамического предела ℓ_∞ для ℓ_L получаем, что

$$\ell_\infty(t,h,u) \sim t^{-1/y_T^*}\, \tilde{X}(h t^{-\Delta}) \,. \tag{31}$$

Дифференцируя соотношение конечноразмерного подобия для плотности свободной энергии по магнитному полю, можно показать, что

$$y_T^* = d^*/(\gamma+2\beta) \,, \quad y_H^* = d^*(\gamma+\beta)/(\gamma+2\beta) \,. \tag{32}$$

Поэтому, введенная нами характерная длина ℓ_∞, см. (31), при $d'=0$, когда $d^*=d$, совпадает с термодинамической длиной Биндера и др. /9,10/, см. (1). В общем случае геометрии $L^{d-d'} \times \infty^{d'}$ размерность d^* с учетом (17), (27) и (32) можно представить в виде

$$d^* = d - d'(d\nu - \gamma - 2\beta)/(d'\nu - \gamma - 2\beta) \,. \tag{33}$$

Очевидно, $d^*=d$ как при $d'=0$ и любом d, так и при $d < d_u$, когда справедливо соотношение гиперскейлинга $d\nu = \gamma + 2\beta$. Только в последнем случае длина ℓ_L совпадает с корреляционной длиной. В любом случае, как ниже, так и выше d_u, при $d'=0$ и при $d'>0$ (но $d'<d_\ell=\sigma$) характерная длина ℓ_L удовлетворяет универсальному уравнению конечноразмерного подобия (30), в котором показатели y_T^* и y_H^* определены выражениями (32) и (33).

Литература:

I. M.E. Fisher, in: Gritical Phenomena, M.S. Green, ed., Proc. Enrico Fermi Int. School of Physics, vol 51, pp. I-99 (Academic Press, New York, I97I).

2. M.E. Fisher, M.N. Barber. Phys. Rev. Lett. 28:I5I6 (I972).

3. E. Brezin, J. Physique 43: I5 (I982).

4. V. Privman, M.E. Fisher. J. Stat.Phys. 33 : 385 (I983).

5. J.M. Luck. Phys. Rev. B3I : 3069 (I985).

6. E. Brezin, J. Zinn - Justin. Nucl. Phys. B257: 867 (I985).

7. J. Shapiro, J. Rudnick, J. Stat. Phys. 43 : 5I (I986).

8. S. Singh,R.K.Pathria, Phys. Lett., AII8: I3I (I986).

9. K. Binder, M. Nauenberg, V. Privman, A.P. Young, Phys. Rev. B3I: I498 (I985).

IO. K. Binder, Ferroelectrics 73 : 43 (I987).

II. J.G. Brankov, J. Stat Phys. 56: 309 (I989).

I2. M.E. Fisher, V. Privman. Commun. Math. Phys., IO3 : 527, (I986).

I3. J.G. Brankov , N.S. Tonchev. J. Stat. Phys. (to be published).

I4. J.G. Brankov, D.M. Danchev. Commun. Math. Phys. (to be published).

I5. J.G. Brankov, N.S. Tonchev. J. Stat Phys. 52: I43 (I988).

I6. S. Singh, R.K. Pathria. Phys. Rev. B34 : 2045 (I986).

I7. M.E. Fisher. in Renormalization Group in Gritical Phenomena and Quantum Field Theory. Proc. of a Coference, J.D. Gunton and M.S. Green, Eds.(Temple University Press, Philadelphia, I974).

Рукопись поступила в издательский отдел
I7 января I990 года.