объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-90-310

Х.О.Абдуллоев*, А.В.Маханьков, Х.Х.Муминов*

ВАКУУМ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА КАК БОГОЛЮБОВСКИЙ КОНДЕНСАТ МАГНОНОВ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

*Таджикский государственный университет, Душанбе, ТаджССР

1990

В течение последних нескольких лет пристальное внимание исследователей привлекает изучение магнетиков. Интерес этот в значительной мере стимулирован как новыми экспериментальными данными, так и развитием новых методов нелинейной математической физики.

Основным объектом исследований здесь является модель ферромагнетика Гейзенберга, описывающая широкий класс магнетиков. Она позволяет исследовать поведение квантовой системы, сводя ее к задаче на собственные значения. В работах [2-3] изучался вопрос о квазиклассическом поведении модели Гейзенберга. Цель настоящей работы заключается в изучении коллективных возбуждений квазичастиц (магнонов) над вакуумом в модели ферромагнетика Гейзенберга с анизотропией типа "легкая плоскость" в рамках квантовой задачи.

Рассмотрим гамильтониан, описывающий ферромагнетик Гейзенберга с анизотропией типа "легкая плоскость" ($\delta<0$):

$$\hat{H} = -\sum_j \left\{ \hat{\bar{S}}_j \hat{\bar{S}}_{j+1} + \delta \hat{S}^z_j \hat{S}^z_{j+1} \right\}. \tag{I}$$

Для его бозонизации используем преобразование Холштейна-Примакова

$$\hat{S}^+_j = \sqrt{2S}\sqrt{1 - \frac{a^+_j a_j}{2S}}\, a_j ,$$

$$\hat{S}^-_j = \sqrt{2S}\, a^+_j \sqrt{1 - \frac{a^+_j a_j}{2S}} ,$$

$$\hat{S}^z_j = S - a^+_j a_j ,$$

где в качестве оси квантования выбрана ось OZ. Преобразуем гамильтониан (I), учитывая члены до четвертого порядка по a^+_j и

a_j включительно. После упорядочения бозе-операторов получим

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_2 + \hat{H}_4 , \tag{2}$$

где

$$\hat{H}_0 = -\sum_j s^2 [\, 1 + \delta \,],$$

$$\hat{H}_2 = -\sum_j s \left[(a^+_{j+1} a_j + a^+_j a_{j+1}) - (a^+_j a_j + 2\delta a^+_j a_j + a^+_j a_{j+1}) \right],$$

$$\hat{H}_4 = \sum_j \Big\{ \frac{1}{4} \left[(a^+_{j+1})^2 a_j a_{j+1} + a^+_j a^+_{j+1} a_j^2 + (a^+_j)^2 a_{j+1} a_j + a^+_{j+1} a^+_j a^2_{j+1} \right] -$$

$$- a^+_{j+1} a^+_j a_{j+1} a_j - \delta (a^+_j)^2 a_j^2 \Big\} .$$

Для выделения бозе-конденсата нам нужно перейти в импульсное представление, используя преобразование Фурье следующего вида [I]:

$$a^+_j = \sum_k a^+_k e^{-ia_0 j},$$

$$a_j = \sum_k a_k e^{ia_0 j}.$$

Тогда $\hat{H}_2$ можно записать в виде

$$\hat{H}_2 = -2s \sum [\, \cos(ka_0) - 1 - \delta \,] a^+_k a_k ,$$

а выражение для $\hat{H}_4$ с учетом эрмитовости бозе-операторов примет вид

$$\hat{H}_4 = \sum_{q,p,k} \Big\{ \frac{1}{2} [\cos(pa_0) + \cos(q-k) a_0] - \cos(ka_0) - \delta \Big\} a^+_{p+k} a^+_{q-k} a_p a_q .$$

Перейдем теперь к процедуре выделения конденсата в приближении Боголюбова [4] :

$a^+_k \sim a_k \sim \sqrt{S}$ (при k=0), то есть

$$a^+_k = \sqrt{S}\, \Delta(k) + b^+_k ,$$

$$a_k = \sqrt{S}\, \Delta(k) + b_k ,$$

где
$$\Delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Используя эти выражения, можно привести гамильтониан (2) к виду

$$\hat{H} = -s^2 N [\, 1 + \delta \,] + s^2 \delta + s \sum_k \Big\{ 2 [\, 1 - \cos(ka_0) - \delta \,] b^+_k b_k +$$
$$+ \frac{1}{2} [\, 1 - \cos(ka_0) - 2\delta \,] (b^+_k b^+_{-k} + b_k b_{-k}) \Big\} . \tag{3}$$

Выразим гамильтониан (3) через операторы K_1, K_2, K_0 группы SU(1,1):

$$K_1 = \frac{1}{2} (b^+_k b^+_{-k} + b_k b_{-k}),$$

$$K_2 = -\frac{i}{2} (b^+_k b^+_{-k} - b_k b_k),$$

$$K_0 = \frac{1}{2} (b^+_k b_k + b^+_{-k} b_{-k} + 1),$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\, K_1 , K_2 \,] = -i K_0 ,$$

$$[\, K_2 , K_0 \,] = i K_1 ,$$

$$[\, K_0 , K_1 \,] = i K_2 .$$

В результате получим

$$\hat{H} = -s^2 N [1 + \delta] + s^2 \delta + s \sum_k \Big\{ \mu_k \Big(K_0^{(k)} - \frac{1}{2} \Big) + K_1^{(k)} \Big\} (1 - \cos(ka_0) - 2\delta), \tag{4}$$

где

$$\mu_k = 2\frac{1-\cos(ka_0)-\delta}{1-\cos(ka_0)-2\delta}\,, \qquad cth\,\theta_k = -\mu_k\,. \tag{5}$$

Введем

$$E_k = (1-\cos(ka_0)-2\delta)\,\mathrm{cosech}\,\theta_k\,. \tag{6}$$

совершим поворот на угол θ_k в пространстве алгебры su(1,1) (теоретико-групповой аналог преобразования Боголюбова) и получим ограниченный снизу дискретный спектр энергии

$$\hat{\tilde{H}} = s\sum_k\left\{E_k\tilde{K}_0^{(k)} - (1-\cos(ka_0)-\delta)\right\} - s^2N(1+\delta)+s^2\delta. \tag{7}$$

Угол поворота θ_k, определяемый из (5), можно также записать в виде

$$th\,\theta_k = \frac{1}{2} - \frac{\delta/2}{1-\cos ka_0-\delta}\,. \tag{8}$$

Поскольку $|th\theta_k|<1$, то из выражения (8) следует неравенство

$$-1 < \frac{\Delta}{k^2-\Delta} < 3, \tag{9}$$

где $\Delta = \dfrac{2\delta}{a_0^2}$.

Только при выполнении этого условия можно диагонализовать гамильтониан (3), т.е. совершить групповое вращение и получить спектр энергии. Правая часть неравенства (9) дает нам условие

$$\Delta < \frac{3}{4}k^2,$$

а левая часть $-k^2<0$ выполняется всегда.

Выражение (7) можно переписать в виде

$$\hat{H} = -s^2N(1+\delta)+s^2\delta + \tag{10}$$
$$+ s\sum_k\left\{\sqrt{4(1-\cos(ka_0)-\delta)^2-(1-\cos(ka_0)-2\delta)^2}\,K_0^{(k)} - (1-\cos ka_0-\delta)\right\}.$$

Третье слагаемое позволит нам вычислить дисперсию

$$\omega_k = 2\sqrt{1-\cos(ka_0)}\sqrt{\frac{3}{4}(1-\cos(ka_0))-\delta}\,. \tag{11}$$

Разлагая в этом равенстве тригонометрическую функцию в ряд до квадратичных членов, получим боголюбовскую дисперсию

$$\omega_k = ka_0^2\sqrt{\frac{3}{4}k^2-\Delta}\,, \tag{12}$$

которая полностью совпадает с дисперсией [2], получающейся из гамильтониана, оборванного на членах четвертого порядка.

Оператор Казимира $\hat{C}_k^2$ есть

$$\hat{C}_{\vec{k}}^2 = (K_0^{(k)})^2 - (K_1^{(k)})^2 - (K_2^{(k)})^2 = \frac{1}{4}(\Delta_k^2-1) = q_k(q_k-1),$$

где

$$\Delta_k = b_k^+ b_k - b_{-k}^+ b_{-k}\,.$$

Представление SU(1,1) с энергией, ограниченной снизу, есть $T^+(q_k)$-серия [5]. Поэтому для k-го узла решетки получим

$$T^+ = \prod_k T^+(q_k), \qquad q_k = \frac{1}{2}(1+|\Delta_k|).$$

Тогда обобщенное когерентное состояние находится с помощью оператора

$$\mathcal{D} = \prod_k \otimes\, \mathcal{D}^+(q_k)$$

и

$$K_0^k\,|[n]\rangle = (n_k+q_k)\,|[n]\rangle\,,$$

где

$$|[n]\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle.$$

И теперь для спектра энергии из (3) будем иметь

$$E([n]) = \sum_k\left\{E_k\left(n_k+\frac{1}{2}|\Delta_k|+\frac{1}{2}\right)-(1-\cos(ka_0)-\delta)\right\} - \tag{13}$$
$$-s^2N(1+\delta)+s^2\delta,$$

причем собственной функцией гамильтониана является SU(1,1)-обобщенное когерентное состояние.

Получившийся физический вакуум не совпадает с референтным вакуумом $|\Psi_o\rangle$. Физический вакуум есть

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \prod_K R(\theta_K)\,|\Psi_o\rangle .$$

Его энергия получается из (13) при

$$n_K = \Delta_K = 0, \quad q_K = \frac{1}{2},$$

$$E([o]) = \frac{1}{2}\sum_K \left[E_K - 2(1-\cos(Ka_o)-\delta)\right] - s^2 N(1+\delta) + s^2\delta .$$

Это означает, что вакуум легкой плоскости в рассматриваемом приближении есть боголюбовский конденсат

$$|\Psi_o\rangle = \prod_K R_K(\theta_K)\,|\tilde{\Psi}_o\rangle = \prod_K e^{-i\theta_K K_2^{(K)}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle ,$$

$$|\tilde{\Psi}_o\rangle = |\Psi_o\rangle ,$$

где θ_K определяется из формулы (8).

Отметим, что идеи, положенные в основу данной работы, обсуждались в (6).

Вывод

Даже в квазиклассическом приближении $s \gg 1$ основное состояние легкоплоскостной модели представляет собой упорядоченные вдоль оси спонтанного намагничения (бозе-конденсат) спины, колеблющиеся вблизи этого классического положения равновесия (боголюбовский конденсат). Это явление аналогично известному явлению AWB в антиферромагнетике, на что нам было указано В.Г.Маханьковым и О.К.Пашаевым, за что мы им благодарны.

Литература

[1] А.И.Ахиезер,В.Г.Барьяхтар,С.В.Пелетминский. Спиновые волны. М., Наука, 1967, с.368.

[2] A.V.Makhankov,V.G.Makhankov. Phys.Stat.Sol.(b), 1988,145,669.

[3] Х.О.Абдуллоев,А.В.Маханьков. Препринт ОИЯИ Р17-88-165, Дубна,1988.

[4] Н.Н.Боголюбов. Изв.АН СССР, сер.физ., 1947, т.11, 1,77.

[5] А.М.Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применение.М,Наука,1987,с.269.

[6] В.Г.Маханьков,О.Пашаев. Препринт ОИЯИ Р17-85-565, Дубна,1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 мая 1990 года.

Абдуллоев Х.О., Маханьков А.В., Муминов Х.Х. P17-90-310
Вакуум ферромагнетика Гейзенберга
как боголюбовский конденсат магнонов

В рамках квантовой задачи исследуются коллективные возбуждения магнонов в модели ферромагнетика с анизотропией типа "легкая плоскость". Показано, что "легкоплоскостной" вакуум анизотропной модели Гейзенберга есть боголюбовский конденсат магнонов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1990

Перевод авторов

Abdulloev Kh.O., Makhan'kov A.V., P17-90-310
Muminov Kh.Kh.
Vacuum of Heisenberg Ferromagnet as
Bogolubov's Magnon Condensate

Within the framework of quantum problem collective magnon excitations in a ferromagnet model with anisotropy of "easy plane" type are studied. It has been shown that the easy-plane vacuum of Heisenberg anisotropic model is Bogolubov's magnon condensate.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1990