объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-90-243

Й.Г.Бранков

ВЫВОД КОНЕЧНОРАЗМЕРНОГО ПОДОБИЯ ДЛЯ СРЕДНЕПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Направлено в "Journal of Physics A"

1990

I. Введение

В строгой теории фазовых переходов и критических явлений существует подход, основанный на дифференциальных неравенствах в частных производных для параметра порядка, см., например, /I-3/. Этот подход ведет свое начало от известных неравенств Гриффитса – Хёрста – Шермана /4/ и их обобщений /5/. С его помощью можно провести строгий анализ глобальной фазовой структуры конкретных модельных систем, вывести неравенства для критических показателей и т.д., даже при отсутствии точных решений. Как указывает М. Айзенман /1/, эффективность методов изучения систем с бесконечным числом степеней свободы с помощью дифференциальных неравенств в частных производных по немногим существенным переменным, по-видимому, связана с существованием ренормгрупповых преобразований Каданова – Вильсона /6,7/.

В нашей работе /8/ впервые было показано, что для некоторых простейших моделей, типа модели Хусими – Темперли – Изинга, можно получить точные дифференциальные уравнения в частных производных для параметра порядка конечной системы. Здесь мы обобщим это рассмотрение на весь класс моделей, описываемых гамильтонианом вида

$$\mathcal{H}_N(\{\sigma_i\}) = -\frac{J}{2N}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j - H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\ , \qquad (I)$$

где $\{\sigma_i\in\mathbb{R}^1,\ i=1,\dots,N\}$ – динамические переменные, $J\geqslant 0$ – константа взаимодействия, $H\in\mathbb{R}^1$ – внешнее магнитное поле. Р.С. Эллис и Ч.М. Ньюман /9/ рассмотрели класс моделей, для которых совместное вероятностное распределение спинов $\{\sigma_i\}$ определяется мерой μ_ρ на $\mathbb{R}^N$ вида

$$\mu_\rho(dx_1,\dots,dx_N|K,h) = \qquad (2)$$

$$=\left[Z_N^{(\rho)}(K,h)\right]^{-1}\exp\left\{\frac{K}{2N}\Big(\sum_{i=1}^{N}x_i\Big)^2 + h\sum_{i=1}x_i\right\}\mu_0(dx_1,\dots,dx_N|\rho)\ .$$

Здесь $K=J/k_BT$, $h=H/k_BT$ – безразмерные термодинамические параметры, μ_0 – свободная мера, имеющая факторизованный вид

$$\mu_0(dx_1,\dots,dx_N|\rho) = \prod_{i=1}^{N}\rho(dx_i)\ , \qquad (3)$$

где ρ – произвольная борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^1$, которая удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{x^2}\rho(dx) < \infty\ . \qquad (4)$$

Коэффициент нормировки $Z_N^{(\rho)}(K,h)$ в (2) представляет собой статистическую сумму модели (I).

Мы не будем ограничиваться здесь факторизованными свободными мерами вида (3), а включим в рассмотрение сферическую модель /I0/, для которой

$$\mu_o^{(s)}(dx_1,\dots,dx_N) \sim \delta\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\Big)\prod_{i=1}^{N} dx_i\ , \tag{5}$$

где dx – мера Лебега на $\mathbb{R}^1$ и ее обобщения в духе работ /II,I2/.

Введем формальные переменные "время" t и "пространственная координата" x согласно соотношениям

$$t = K - K_c\ ,\quad x = -h\ , \tag{6}$$

где $K_c > 0$ – некоторая константа, которая будет определена ниже, и рассмотрим удельную намагниченность конечной системы

$$m_N^{(\rho)}(t,x) := \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\Big)\mu_\rho(dx_1,\dots,dx_N\,|\,K_c+t,-x)\ . \tag{7}$$

Дифференцируя (7) по переменным t и x, с учетом явного вида (2) меры μ_ρ, получим, что $m_N^{(\rho)}(t,x)$ удовлетворяет хорошо изученному эволюционному уравнению Бюргерса, см., например, /I3/:

$$\frac{\partial}{\partial t} m + m\frac{\partial}{\partial x} m = \frac{1}{2N}\frac{\partial^2}{\partial x^2} m\ . \tag{8}$$

Заметим, что диффузионный коэффициент в уравнении (8) обратно пропорционален числу частиц в системе N. Различные модели рассматриваемого обобщенного класса Хусими – Темперли отличаются только начальным условием

$$m_N^{(\rho)}(t=-K_c\,,x) \equiv \Phi_N^{(\rho)}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i\Big)\exp\Big(-x\sum_{i=1}^{N} x_i\Big)\mu_o(dx_1,\dots,dx_N\,|\,\rho)\Big/ Z_N^{(\rho)}(0,-x)\ , \tag{9}$$

которое зависит от выбора свободной меры μ_o.

На основе уравнения Бюргерса (8) с начальным условием $\Phi_N^{(\rho)}(x) = -\operatorname{th} x$ в момент времени $t=-1$, что соответствует модели Хусими – Темперли – Изинга, в нашей работе /8/ была проведена аналогия между появлением фазового перехода первого рода по полю

в термодинамическом пределе при $K \geq K_c = 1$ и развитием ударной волны в момент времени $t=0$, когда в правой части уравнения (8) взят предел $N \to \infty$. Действительно, анализ показывает, что крутизна фронта решения $m = m_N(t,x)$ уравнения (8) с данным начальным условием максимальна в точке $x=0$, где она пропорциональна начальной магнитной восприимчивости системы. На интервале времен $-1 < t < 0$ эволюция начального условия такова, что крутизна фронта остается конечной и при переходе к термодинамическому пределу $N \to \infty$. В момент $t=0$, однако, крутизна фронта в точке $x=0$ (начальная магнитная восприимчивость) неограниченно возрастает, когда $N \to \infty$, т.е. с обращением в нуль коэффициента диффузии в (8). Далее, при временах $t>0$ и в пределе $N \to \infty$ нелинейный рост крутизны приводит к опрокидыванию волны, т.е. к образованию ударной волны, соответствующей скачку удельной намагниченности при прохождении магнитного поля $h=-x$ через нуль.

В работе /8/ вопрос о существовании автомодельных решений уравнения Бюргерса и их связи с теорией конечноразмерного подобия при фазовых переходах не рассматривался. Это является основной задачей настоящей работы. В следующем разделе 2 мы получим закон термодинамического подобия для намагниченности, исходя из автомодельных решений задачи Коши (8),(9) в пределе $N \to \infty$. В разделе 3 выводится однопараметрическое семейство законов конечноразмерного подобия в окрестности критической точки, которые совместимы с уравнением Бюргерса. Показано, что сренеполевой закон конечноразмерного подобия определяется однозначно начальным условием в термодинамическом пределе. В разделе 4 дано краткое обсуждение результатов.

2. Автомодельные решения и термодинамические законы подобия

Гипотеза термодинамического подобия (скейлинга), см., например, /I4/, предсказывает, что в окрестности критической точки $t=0$, $x=0$, см. (6), удельная намагниченность бесконечной системы $m = m_\infty(t,x)$ является обобщенно-однородной функцией переменных t и x вида

$$m_\infty(t,x) \simeq |t|^\beta\, v_\pm(x|t|^{-\Delta})\ , \tag{I0}$$

где ветви $v_\pm(\cdot)$ функции подобия, соответствующие $t \lessgtr 0$, могут быть различными. Здесь и далее β и $\Delta = \beta+\gamma$ –стандартные критические показатели /I4/. Заметим, что переменная t, см. (6), отличается знаком от общепринятого обозначения, поэтому высокотемпературная область $T_c < T \leq \infty$ соответствует отрицательным значениям $-K_c \leq t < 0$, а низкотемпературная область $0 \leq T < T_c$ – положительным значениям $0 < t \leq \infty$.

Так как $m = m_\infty(t,x)$ удовлетворяет уравнению (8) в пределе $N \to \infty$:

$$\frac{\partial}{\partial t} m + m \frac{\partial}{\partial x} m = 0 , \qquad (11)$$

то очевидно, что если гипотеза скейлинга верна, то (10) должно быть среди автомодельных, или хотя бы локально автомодельных (в окрестности $t=0$, $h=0$), решений уравнения (11). Рассмотрим этот вопрос более подробно.

1. Высокотемпературная область $-K_c \leq t < 0$. В этом случае ищем автомодельные решения уравнения (11) вида

$$m = (-t)^{\beta} v_+(\xi) \quad , \quad \xi = x(-t)^{-\Delta} , \qquad (12)$$

с произвольными положительными показателями β и Δ. Подставляя (12) в (11), для неизвестной функции $v_+(\xi)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[(-t)^{\beta+1-\Delta} v_+ + \Delta \xi] v_+' - \beta v_+ = 0. \qquad (13)$$

Очевидно, для того, чтобы это уравнение определяло функцию одной переменной ξ, должно выполняться условие автомодельности

$$\Delta = \beta + 1 . \qquad (14)$$

Так как по определению $\Delta = \beta + \gamma$, то отсюда следует, что автомодельные решения уравнения (11) существуют только при среднеполевом значении $\gamma = 1$ критического показателя для магнитной восприимчивости. Интегрируя уравнение (13) при условии (14), получаем, что $v_+ = v_+(\xi)$ определяется как неявная функция ξ из уравнения

$$|v_+| = A\,|v_+ + \xi|^{\beta/(\beta+1)} , \qquad (15)$$

в котором $A > 0$ – произвольная постоянная интегрирования. Показатель $\beta > 0$ пока произволен.

Учтем теперь, что намагниченность m, см. (12), должна удовлетворять начальному условию (9) в пределе $N \to \infty$. Отсюда получаем следующее условие на функцию $v_+(\cdot)$:

$$(K_c)^{\beta} v_+(x K_c^{-\beta-1}) = \Phi_\infty^{(\rho)}(x) . \qquad (16)$$

Укажем, например, что в случае модели Хусими – Темперли – Изинга имеем /8/

$$\Phi_N^{(I)}(x) = -th\, x , \qquad (17)$$

а в случае сферической модели Хусими – Темперли получаем /15/

$$\Phi_N^{(S)}(x) = \int_{R^N} \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i\Big)\, \delta\Big(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\Big) \exp\Big(-x\sum_{i=1}^N x_i\Big)\, dx_1 \ldots dx_N =$$

$$= -I_{\frac{N}{2}}(Nx)/I_{\frac{N-2}{2}}(Nx) = -\frac{2x}{(1+4x^2)^{1/2}+1} + O(N^{-1}) . \qquad (18)$$

Очевидно, что ни $\Phi_\infty^{(I)}(x)$, ни $\Phi_\infty^{(S)}(x)$ не удовлетворяют, вообще говоря, условию, которое накладывает на них уравнение (15) при $t = -K_c$:

$$|\Phi_\infty^{(\rho)}(x)| = A\,|K_c \Phi_\infty^{(\rho)}(x) + x|^{\beta/(\beta+1)} . \qquad (19)$$

Более того, из (19) следует, что функция $\Phi_\infty^{(\rho)}(x)$ должна расходиться при $x \to \infty$, тогда как в действительности $\Phi_\infty^{(\rho)}(x) \to \mp m_0(\infty)$ при $x \to \pm\infty$, где $m_0(\infty)$ – намагниченность насыщения на один спин. Следовательно, модели из рассматриваемого класса Хусими – Темперли не имеют глобально автомодельных решений вида (12). Рассмотрим поэтому локальные свойства решений задачи Коши при $x \to 0$. Ограничиваясь случаем симметричной меры $\mu_0(dx_1,\ldots,dx_N|\rho)$, когда $\Phi_N^{(\rho)}(-x) = -\Phi_N^{(\rho)}(x)$, и предполагая аналитичность $\Phi_\infty^{(\rho)}(x)$ в точке $x = 0$, рассмотрим разложение

$$\Phi_\infty^{(\rho)}(x) = \frac{\partial \Phi_\infty^{(\rho)}(0)}{\partial x} x + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \Phi_\infty^{(\rho)}(0)}{\partial x^3} x^3 + \cdots \quad (x \to 0) . \qquad (20)$$

Тогда условию (19) можно удовлетворить, если положить

$$\beta = \frac{1}{2} \; , \; K_c^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi_\infty^{(\rho)}(0) > 0 \; , \; A^3 = K_c^{-4}\left|\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Phi_\infty^{(\rho)}(0)\right|^{-1} . \qquad (21)$$

Для коэффициентов при высших степенях x получим систему рекуррентных соотношений.

Таким образом, из условия, чтобы автомодельное решение (I2) удовлетворяло локально начальному условию (20) в окрестности точки $x=0$, следует среднеполевое значение $\beta=\frac{1}{2}$ для критического показателя намагниченности. Кроме того, мы выразили параметры K_c и A через величины, зависящие от конкретной модели.

II. Низкотемпературная область $0<t\le\infty$. В этом случае ищем автомодельные решения уравнения (II) вида

$$m=t^{\beta}v_{-}(\xi)\ ,\quad \xi=xt^{-\Delta}\ , \tag{22}$$

с произвольными положительными показателями β и Δ. Подставляя (22) в (II), для неизвестной функции $v_{-}(\xi)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, сравни с (I3),

$$[t^{\beta+1-\Delta}v_{-}-\Delta\xi]v_{-}'+\beta v_{-}=0. \tag{23}$$

Условием автомодельности по-прежнему является равенство (I4), откуда следует $\gamma=1$. Функция $v_{-}=v_{-}(\xi)$ определяется как неявная функция ξ из уравнения, сравни с (I5),

$$|v_{-}|=A|v_{-}-\xi|^{\beta/(\beta+1)}, \tag{24}$$

где $A>0$ – произвольная постоянная интегрирования. Так как $t=0$ является точкой неаналитичности, теперь естественным образом возникает новая задача Коши с "начальным" (при обращении хода течения времени) условием, соответствующим пределу бесконечно сильного взаимодействия $t\to\infty$ (или нулевой температуры $K\to 0$). В этом пределе намагниченность должна стремиться к ступенчатой функции:

$$\lim_{t\to\infty} m_{\infty}(t,x)=-\operatorname{sign}(x)\,m_0(\infty), \tag{25}$$

где $m_0(\infty)$ – намагниченность насыщения на один спин. Из (22) и (25) следует, что при $\xi\to 0^{\pm}$ функция $v_{-}(\xi)$ должна иметь неаналитическое поведение вида

$$v_{-}(\xi)\simeq-\operatorname{sign}(\xi)\,m_0(\infty)|\xi|^{\beta/(\beta+1)}. \tag{26}$$

Функции с таким асимптотическим поведением, однако, не могут удовлетворить уравнению (24) при $|\xi|\to 0$, т.е. снова получаем, что глобальное автомодельное решение задачи Коши (II), (25) не существует. Очевидно, что сужение рассмотрения до окрестности линии $\{0<t\le\infty,\ h=0\}$ уже не является достаточным. Для удовлетворения требования автомодельности необходимо поставить начальное условие ближе к критической точке $(t=0^{+}, h=0)$, что приводит к необходимости привлечения феноменологических соображений для определения его вида. С учетом существования спонтанной намагниченности $m_{\infty}(t,0^{\pm})=\mp m_0(t)$ и начальной восприимчивости $\chi_{\infty}(t,0^{\pm})=\chi_0(t)$ при $t>0$ и $H\to 0^{\pm}$ примем, что при достаточно малом фиксированном $t_0>0$ и $H\to 0^{\pm}$ имеет место начальное условие вида

$$m_{\infty}\Big(t_0,\frac{H}{k_BT_0}\Big)\simeq\operatorname{sign}(H)\,m_0(t_0)+\chi_0(t_0)H+O(H^3). \tag{27}$$

Заметим, что при $t_0\to 0$

$$m_0(t_0)\sim t_0^{\beta}\to 0,\qquad \chi_0(t_0)\sim t_0^{-\gamma}\to\infty\qquad (t_0\to 0^{+}), \tag{28}$$

в соответствии с определением критических показателей $\beta>0$ и $\gamma>0$. Далее, (24) удобно записать в эквивалентном виде уравнения состояния для намагниченности (22):

$$|tm-x|=\left|\frac{m}{A}\right|^{(\beta+1)/\beta}. \tag{29}$$

Подставляя начальное условие (27) в уравнение (29) при $t=t_0$ и $x\to 0$ и сравнивая члены одного порядка по полю H, получаем

$$m_0(t_0)\simeq A^{\beta+1}t_0^{\beta}\ ,\quad (k_BT_0)\chi_0(t_0)\simeq\beta t_0^{-1}. \tag{30}$$

Следовательно, автомодельное решение (22) удовлетворяет локальному начальному условию (27) при любом значении $\beta>0$ критического показателя для намагниченности и среднеполевом значении $\gamma=1$ критического показателя для восприимчивости. Но для того, чтобы обвязать начальное условие (27) с термодинамическими функциями для рассматриваемого класса моделей Хусими – Темперли, следует положить

$$\beta=\frac{1}{2}\ ,\quad A=\Big[\lim_{t\to 0} t\,m_0^2(t)\Big]^{1/3}. \tag{31}$$

Тогда выражения (30) для спонтанной намагниченности и начальной восприимчивости приобретают асимптотический вид, предсказываемый теорией среднего поля.

2. Вывод конечноразмерного подобия из уравнения Бюргерса

Рассмотрим вопрос о том, какая информация о законах конечноразмерного подобия в окрестности критической точки содержится в самом виде дифференциального уравнения для параметра порядка конечной системы, см. (8), и какая - в начальном условии (9).

В соответствии с гипотезой В. Привмана /I6/, см. также /I7/, будем искать решения уравнения Бюргерса (8) в виде обобщенно- однородных функций

$$m = N^{-p} w(N^q t, N^r x) \tag{32}$$

с произвольными положительными показателями p, q и r. Вводя соответствующие переменные

$$w = N^p m \ , \quad x_1 = N^q t \ , \quad x_2 = N^r x, \tag{33}$$

уравнение Бюргерса (8) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w + N^{-p-q+r} w \frac{\partial}{\partial x_2} w = \frac{1}{2} N^{-1-q+2r} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} w \ . \tag{34}$$

Так как функция $w(x_1, x_2)$, см. (32), не зависит явно от N, то условием существования такого автомодельного решения являются равенства

$$q = 1-2p \ , \quad r = 1-p \ , \tag{35}$$

где $0 < p < 1/2$ - пока произвольный параметр. Следовательно, наиболее общий закон конечноразмерного подобия, допускаемого уравнением Бюргерса, имеет вид

$$m_N(t,x) = N^{-p} w(N^{1-2p} t, N^{1-p} x) \ , \quad 0 < p < \frac{1}{2} \ , \tag{36}$$

где функция $w(x_1, x_2)$ является решением не зависящего от N уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w + w \frac{\partial}{\partial x_2} w = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} w \ . \tag{37}$$

Рассмотрим теперь начальное условие (9), которое в новых переменных (33) принимает вид

$$w(x_1 = -K_c N^{1-2p}, x_2) = N^p \Phi_N^{(p)}(N^{p-1} x_2) \ . \tag{38}$$

Для исследования (38) при $N \to \infty$ нам необходимо знать асимптотику функции $w(x_1, x_2)$ при $x_1 \to -\infty$. С этой целью заметим, что при любом фиксированном $t \neq 0$ предел $N \to \infty$ в выражении (36) для намагниченности должен приводить к термодинамическому результату (I0), а это возможно только тогда, когда

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_1 \to \pm\infty} \simeq |x_1|^\beta v_\mp (x_2 |x_1|^{-\beta-1}), \tag{39}$$

и, кроме того, при условии, что p и β удовлетворяют равенствам

$$1-p = (1-2p)(\beta+1) \ , \quad (1-2p)\beta = p \ . \tag{40}$$

Отсюда однозначно определяем

$$p = \beta/(1+2\beta), \tag{4I}$$

или, с учетом $\beta = 1/2$, получаем $p = 1/4$. Теперь легко проверить, что начальное (38) при фиксированном x_2 и $N \to \infty$ сводится к равенству

$$(K_c)^\beta v_+(0) = \Phi_\infty^{(p)}(0) \ , \tag{42}$$

которое выполняется в силу условия (I6) при $x = 0$.

4. Обсуждение

Мы вывели общий вид однопараметрического семейства (36) законов конечноразмерного подобия, допускаемых уравнением Бюргерса. Примечательно, что значение критического показателя для намагниченности $\beta = 1/2$, а отсюда, см. (4I), и значение $p = 1/4$,определяется лишь степенью второго члена в тейлоровском разложении (20) начального условия и не зависит от деталей модели, т.е. от конкретного выбора свободной меры μ_o . Если вместо (20) имеет место разложение вида

$$\Phi_\infty^{(p)}(x) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_\infty^{(p)}(0)\right] x + \frac{1}{(2k+1)!}\left[\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}\Phi_\infty^{(p)}(0)\right] x^{2k+1} + \cdots \ , \tag{43}$$

то для показателей β и p получим соответственно

$$\beta = \frac{1}{2K}, \quad p = \frac{1}{2K(K+1)}. \qquad (44)$$

В термодинамическом пределе уравнение (II) описывает точную эволюцию профиля намагниченности $\{m_\infty(t,x), x \in \mathbb{R}^1\}$ при изменении константы взаимодействия $K = K_c + t$. Естественным образом возникают две задачи Коши. В высокотемпературной области $0 \le K < K_c$ начальному моменту времени $t = -K_c$ соответствует система невзаимодействующих спинов, профиль намагниченности которой $\{m_\infty(-K_c, x) = \Phi_\infty^{(\rho)}(x), x \in \mathbb{R}^1\}$ заключает в себе информацию о предельной свободной мере μ_0 на $\mathbb{R}^\infty$. В случае, когда μ_0 факторизуется /9/, см. (3), термодинамический предел для системы невзаимодействующих частиц является тривиальным, начальное условие (9) не зависит от числа частиц и несет в себе информацию только о свойствах одночастичной меры ρ. Тогда уравнение (II) связывает автомодельное поведение системы взаимодействующих частиц в окрестности критической точки с тривиальным поведением системы свободных частиц. В этом смысле эволюционное уравнение (II) соответствует ренормгрупповому потоку от окрестности критической точки к тривиальной неподвижной точке, характеризуемой нулевым значением константы взаимодействия. Аналогичным образом, в низкотемпературной области $K_c < K \le \infty$ эволюционное уравнение (II) соответствует ренормгрупповому потоку от окрестности критической точки к другой тривиальной неподвижной точке, характеризуемой бесконечно большим значением константы взаимодействия.

В обоих случаях автомодельность является локальным свойством решения задачи Коши. Роль начальных условий состоит в редукции однопараметрического семейства автомодельных решений эволюционного уравнения до единственного представителя. Классы критической универсальности определяются качественным поведением начального условия в окрестности нулевого магнитного поля, а в низкотемпературной области – и асимптотическим поведением параметра порядка по температуре, при приближении к критической точке.

Для любой конечной системы класса Хусими – Темперли однопараметрическое семейство решений (36) уравнения Бюргерса зависит аналитическим образом от температуры $-K_c \le t < \infty$ и магнитного поля $x \in \mathbb{R}^1$, за исключением бесконечно удаленной точки $(t=\infty, x=0)$. Редукция параметра $p \in (0, \frac{1}{2})$ соответствующего семейства законов конечноразмерного подобия до значения $p = \beta/(1+2\beta)$ диктуется существованием термодинамического предела для намагниченности. Явный вид функции конечноразмерного подобия $w(x_1, x_2)$ можно легко определить, исходя

из известного интегрального представления решения задачи Коши для уравнения Бюргерса, см., например, /13/.

Литература

1. M. Aizenman. Physica 140A (1986) 225-231.
2. M. Aizenman, R. Fernandez. J. Stat. Phys. 44 (1986) 393-454.
3. M. Aizenman, D.J. Barsky, R. Fernandez. J. Stat. Phys. 47 (1987) 343-374.
4. R.B. Griffiths, C.A. Hurst, S. Shenman. J. Math. Phys., 11 (1970) 790-795.
5. J.L. Lebowitz. Commun. Math. Phys. 35 (1974) 87-92.
6. L.P. Kadanoff. Physics 2 (1966) 263-272.
7. K.G. Wilson. Phys. Rev. B4 (1971) 3174-3205.
8. J.G. Brankov, V.A. Zagrebnov. J. Phys. A16 (1983) 2217-2224.
9. R.S. Ellis, C.M. Newman. J. Stat. Phys. 19 (1978) 149-161.
10. T.H. Berlin, M. Kac. Phys. Rev. 86 (1952) 821-835.
11. G.V. Bettney, R.M. Mazo. J. Math. Phys. 11 (1970) 1147-1149.
12. W.W. Barrett, M. Kac. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72 (1975) 4723-4724.
13. G.B. Whitham. Linear and Nonlinear Waves. John Wiley and sons, New York. 1974.
14. Ш. Ма. Современная теория критических явлений. Мир, М., 1980.
15. Й.Г. Бранков. Препринт ОИЯИ, Р17-90-73, Дубна, 1990
16. V.Privman. Physica 123A (1984) 428-442.
17. R. Botet, R. Inllien. Phys. Rev. B28 (1983) 3955-3967.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1990 года.