89-82

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-89-82

А.Е.Патрик

МОДЕЛЬ КЮРИ - ВЕЙССА - ИЗИНГА В СЛУЧАЙНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ: ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Направлено в журнал "Acta Physica Polonica"

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Кюри - Вейсса - Изинга /КВИ/ обладает одной замечательной особенностью. Несмотря на простоту исследования ее термодинамических свойств, последние весьма нетривиальны. Известно, что включение случайного внешнего поля чрезвычайно усложняет исследование даже одномерной модели Изинга. Поэтому представляется интересным исследование влияния случайного поля на такую, относительно простую модель, как модель КВИ. Модель КВИ исследована достаточно подробно. В частности, в работе /1/ проведено изучение структуры предельных гиббсовских распределений. Ниже мы будем существенно опираться на предложенную в /1,2/ идеологию.

Поскольку исследование случайных полей - предмет теории случайных процессов, то в работе сделана попытка изложить проблему и провести исследование, используя, как нам кажется, наиболее приемлемый для этих целей "вероятностный" язык. Для удобства мы приведем ниже наиболее важные определения /см. также книгу /3/ /.

Определение В1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ - два измеримых пространства. Будем говорить, что функция $X = X(\omega) : \Omega \to E$ есть случайный элемент, если для любого $B \in \mathcal{E}$ множество $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство и $\underset{\sim}{\xi}^{\omega} = \{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots}$ - случайная последовательность /то есть E в определении В1 в данном случае пространство односторонних бесконечных последовательностей, а $\mathcal{E}$ есть $B(R^{\infty})$ борелевская σ-алгебра в этом пространстве/, а $\theta_k \underset{\sim}{\xi}^{\omega}$ - случайная последовательность $\{\xi_i\}_{i=k,k+1,\ldots}$. Случайная последовательность $\underset{\sim}{\xi}^{\omega}$ называется стационарной, если для любого $k \geq 1$ распределения вероятностей $\theta_k \underset{\sim}{\xi}^{\omega}$ и $\underset{\sim}{\xi}^{\omega}$ совпадают: $P(\omega : (\xi_1; \xi_2; \ldots) \in B) = P(\omega : (\xi_{k+1}; \xi_{k+2}; \ldots) \in B)$ для любого $B \in \mathcal{B}(R^{\infty})$. Множество $A \in \mathcal{F}$ называется инвариантным по отношению к последовательности $\underset{\sim}{\xi}^{\omega}$, если существует такое множество $B \in \mathcal{B}(R^{\infty})$, что для любого $n \geq 1$ выполняется $A = \{\omega : (\xi_n; \xi_{n+1}; \ldots) \in B\}$.

Определение В2. Стационарная последовательность $\underset{\sim}{\xi}^{\omega}$ называется эргодической, если мера любого инвариантного множества равна либо 0, либо 1.

Если некоторое свойство имеет место для всех элементов $\omega \in \tilde{\Omega} \subset \Omega$ и $P(\tilde{\Omega}) = 1$, мы будем говорить, что это свойство имеет место почти наверное /или с вероятностью 1/, и кратко писать (P- п.н.).

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведены определения гамильтониана модели КВИ в случайном внешнем поле /КВИ - $\underset{\sim}{h}$/, распределения Гиббса модели КВИ-$\underset{\sim}{h}$ и предельного гиббсовского распределения модели. В разд. 3 изложен метод описания предельных гиббсовских распределений. В разд. 4 сделана попытка описания структуры предельного гиббсовского распределения модели КВИ-$\underset{\sim}{h}$. В разд. 5 определен случайный элемент - плотность свободной энергии модели - и доказана теорема о структуре данного случайного элемента.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbf{Z}^d$ - множество упорядоченных наборов из d целых чисел. Всякую функцию $\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda} = \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda}$, определенную на Λ, подмножестве $\mathbf{Z}^d$, и принимающую значения во множестве $\{+1; -1\}$, будем называть спиновой конфигурацией в конечном объеме, если множество Λ имеет конечную мощность /card $\Lambda < \infty$/, и спиновой конфигурацией бесконечной системы, если $\Lambda = \mathbf{Z}^d$. Аналогично, функцию $\underset{\sim}{h}^{\Lambda} = \{h_i\}_{i \in \Lambda}$, определенную на Λ и принимающую значения во множестве действительных чисел, будем называть конфигурацией внешнего поля в конечном объеме Λ, если card $\Lambda < \infty$, и бесконечной конфигурацией внешнего поля, если $\Lambda = \mathbf{Z}^d$. Множество всех спиновых конфигураций в объеме Λ /card $\Lambda < \infty$ либо $\Lambda = \mathbf{Z}^d$/ обозначим Ω_Λ, а множество всех конфигураций внешнего поля в том же объеме обозначим E_Λ. Пусть W_Λ и $\mathcal{E}_\Lambda$ /card $\Lambda < \infty$/ - множества всех подмножеств соответственно Ω_Λ и E_Λ. Через $W_{\mathbf{Z}^d}$ будем обозначать сигма-алгебру, порожденную всеми цилиндрическими множествами в $\Omega_{\mathbf{Z}^d}$, то есть множествами вида $\{\underset{\sim}{\sigma} \in \Omega_{\mathbf{Z}^d} : \underset{\sim}{\sigma} = \{\sigma_i\}_{i \in \mathbf{Z}^d};\ \sigma_{i_1} = \sigma_{i_2} = \ldots = \sigma_{i_p} = -\sigma_{i_{p+1}} = -\sigma_{i_{p+2}} = \ldots = -\sigma_{i_{p+k}} = 1\}$, где $0 \le p, k < \infty$, а через $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}^d}$ - сигма-алгебру, порожденную всеми цилиндрическими множествами в $E_{\mathbf{Z}^d}$, то есть множествами вида $\{\underset{\sim}{h} \in E_{\mathbf{Z}^d} : \underset{\sim}{h} = \{h_i\}_{i \in \mathbf{Z}^d};\ h_{i_1} \in B_1, \ldots, h_{i_n} \in B_n\}$, где $1 \le n < \infty$, а B_k - борелевские множества числовой прямой. Зададим некоторую биекцию $i(t)$ множества положительных целых чисел $\mathbf{Z}^+$ на множество $\mathbf{Z}^d$. Пусть $\{F_{t_1;\ldots;t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}$, где $t_\alpha \in \mathbf{Z}^+$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \ge 1$- заданное согласованное семейство конечномерных функций распределения. Условие согласованности выражается формулой

$$F_{t_1;\ldots;t_k}(x_1, \ldots, x_k) = F_{t_1;\ldots;t_n}(x_1, \ldots, x_k, +\infty, \ldots, +\infty),$$

где $k < n$. Тогда теорема Колмогорова о существовании процесса[3] гарантирует существование вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и случайной последовательности $\underset{\sim}{h}(\omega) = \{h_{i(t)}\}_{t \in Z^+}(\omega)$, $\omega \in \Omega$ /то есть функции $\underset{\sim}{h}(\omega)$, определенной на Ω и принимающей значения в E_{Z^d}, такой, что для любого $B \in \mathcal{E}_{Z^d}$ множество $\{\omega : \underset{\sim}{h}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ /, таких, что

$$P\{\omega : h_{i(t_1)} \le x_1; \dots ; h_{i(t_n)} \le x_n\} = F_{t_1;\dots;t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Вероятность любого множества из $\mathcal{E}_\Lambda$ определим как вероятность цилиндрического множества из $\mathcal{E}_{Z^d}$ с основанием в $\mathcal{E}_\Lambda$.

Предположим, что набор $\{F_{t_1;\dots;t_n}\}$ таков, что $\underset{\sim}{h}(\omega)$ - эргодическая случайная последовательность. Более никаких ограничений на зависимость случайных величин h_i, то есть непосредственно на $F_{t_1;\dots;t_n}$, $n \ge 2$, налагаться не будет. В зависимости от вида F_{t_1} термодинамика модели, которую мы собираемся исследовать, будет претерпевать качественные изменения.

Рассмотрим декартово произведение $\Omega_\Lambda \times E_\Lambda$ и функцию $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda, \underset{\sim}{h}^\Lambda)$ на нем, определенную формулой

$$H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda, \underset{\sim}{h}^\Lambda) = -\frac{J}{2|\Lambda|} \sum_{i,j \subseteq \Lambda} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in \Lambda} h_i \sigma_i. \qquad /1/$$

Формулу /1/ можно рассматривать как определение класса функций на Ω_Λ, а E_Λ - как множество индексов. Обозначим указанный класс символом $\mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$ и введем алгебру подмножеств $\mathcal{K}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$ этого множества

$$\mathcal{K}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda) = \{\{H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda ; \underset{\sim}{h}^\Lambda) \in \mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda) : \underset{\sim}{h}^\Lambda \in B\} : B \in \mathcal{E}_\Lambda\}.$$

Рассмотрим отображение $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda, \underset{\sim}{h}^\Lambda(\cdot)) : \Omega \to \mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$. Очевидно, что $\{\omega : H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda ; \underset{\sim}{h}^\Lambda(\omega)) \in C\} \in \mathcal{F}$, если $C \in \mathcal{K}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$. Следовательно, $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda ; \underset{\sim}{h}^\Lambda(\cdot))$ - случайный элемент. Распределение вероятностей случайного элемента $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda ; \underset{\sim}{h}^\Lambda(\cdot))$ определяется обычным образом: $P_{H_\Lambda}(C) = P(\{\omega : H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda ; \underset{\sim}{h}^\Lambda(\omega)) \in C\})$.

<u>Определение 1</u>. Гамильтонианом модели Кюри - Вейсса - Изинга в случайном внешнем поле /КВИ-$\underset{\sim}{h}$/ в объеме Λ (card $\Lambda < \infty$) назовем случайный элемент $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda, \underset{\sim}{h}^\Lambda(\cdot))$.

Заданием гамильтониана какой-либо решеточной системы, по существу, производится превращение измеримого пространства $(\Omega_\Lambda, W_\Lambda)$ в вероятностное $(\Omega_\Lambda, W_\Lambda, P_\Lambda)$, поскольку вероятностная мера P_Λ определяется на множествах из W согласно анзацу Гиббса:

$$P_\Lambda(U_\Lambda) = Z_\Lambda^{-1} \sum_{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda \in \Omega_\Lambda} \exp(-\beta H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)), \qquad /2/$$

где $\theta = \beta^{-1}$ - температура системы, а Z_Λ - статистическая сумма, то есть $Z_\Lambda = \sum_{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda \in \Omega_\Lambda} \exp(-\beta H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda))$, card $\Lambda < \infty$. Согласно формуле /2/, мы можем определить вероятностную меру $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)$ для каждого гамильтониана из $\mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$, тем самым мы определим некоторый класс вероятностных мер, который мы будем обозначать $\mathcal{P}_\Lambda$. Введем $\mathcal{Z}_\Lambda$ - алгебру подмножеств $\mathcal{P}_\Lambda$:

$$\mathcal{Z}_\Lambda = \{\{P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot) \in \mathcal{P}_\Lambda : \underset{\sim}{h}^\Lambda \in B\} : B \in \mathcal{E}\},$$

и рассмотрим отображение $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega) : \Omega \to \mathcal{P}_\Lambda$. Очевидно, что $\{\omega : P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}$, если $C \in \mathcal{Z}_\Lambda$. Следовательно, $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega)$ также является случайным элементом, распределение вероятностей которого $P_{P_\Lambda}(C)$ определяется следующим образом:

$$P_{P_\Lambda}(C) = P(\{\omega : P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega) \in C\}).$$

<u>Определение 2</u>. Распределением Гиббса модели КВИ-$\underset{\sim}{h}$ в конечном объеме Λ назовем случайный элемент $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega)$. Случайные величины $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda; \underset{\sim}{h}^\Lambda(\omega))$ и $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega)$ имеют конечные области значений, и их структура очевидным образом соотносится со структурой случайной величины $\underset{\sim}{h}^\Lambda(\omega)$, поэтому и $H_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda; \underset{\sim}{h}^\Lambda(\omega))$, и $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega)$, в известном смысле, как случайные величины, тривиальны.

Одной из основных задач статистической механики является построение предельных распределений Гиббса по заданному семейству распределений $P_\Lambda(\cdot)$. Если мы выполним эту задачу для семейства $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)(\omega)$ для всех элементов $\omega \in \Omega$, то мы получим некоторое множество Π предельных распределений Гиббса $P^{\underset{\sim}{h}}(\cdot)$. Зададим сигма-алгебру S подмножеств Π

$$S = \{\{P^{\underset{\sim}{h}}(\cdot)(\omega) \in \Pi : \underset{\sim}{h} \in C\} : C \in \mathcal{F}\}$$

и распределение вероятностей $P_\Pi(\cdot)$, определенное для каждого множества Q из S,

$$P_\Pi(Q) = P\{\omega : P^{\underset{\sim}{h}}(\cdot)(\omega) \in Q\}.$$

Рассмотрим отображение $\Pi(\cdot) : \Omega \to \Pi$.

Определение 3. Предельным распределением Гиббса модели КВИ-$\underset{\sim}{h}$ назовем случайный элемент $\Pi(\cdot)$.

Итак, нам необходимо построить множество Π.

3. МНОЖЕСТВО ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этом разделе будет сформулирован и доказан ряд утверждений, каждое из которых выполняется, если конфигурация внешнего поля $\underset{\sim}{h}$ принадлежит некому множеству $A \in \mathcal{E}_{\mathbf{Z}^d}$, вероятность которого равна 1. Ранее были описаны вероятностные пространства $(\Omega_\Lambda, W_\Lambda, P_\Lambda)$ для случая конечного Λ. Если же $\Lambda = \mathbf{Z}^d$, то для превращения измеримого пространства $(\Omega_{\mathbf{Z}^d}, W_{\mathbf{Z}^d})$ в вероятностное, так, чтобы мера $P_{\mathbf{Z}^d}$ была в некотором смысле гиббсовским распределением, требуется значительно больше усилий. Более того, как правило, решить данную задачу в явном виде не удается. Исключение составляет лишь небольшое число моделей, в число которых входит и модель КВИ.

Теория меры дает нам рецепт построения вероятностной меры на $(\Omega_{\mathbf{Z}^d}, W_{\mathbf{Z}^d})$. Для этого, как известно, достаточно задать семейство вероятностных пространств $\{(\Omega_\Lambda; W_\Lambda; P_\Lambda)\}_{\Lambda \subset \mathbf{Z}^d}$ $\operatorname{card}\Lambda \to \infty$, вероятностные меры в которых удовлетворяют условию согласованности: $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, $A \in W_{\Lambda_1}$

$$P_{\Lambda_1}(A) = P_{\Lambda_2}(\{\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda_2} = \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda_2} : \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda_1} \in A\}). \qquad /3/$$

Тогда теорема Колмогорова о продолжении меры /3/ гарантирует нам существование единственной вероятностной меры P на $(\Omega_{\mathbf{Z}^d}, W_{\mathbf{Z}^d})$, такой, что

$$P\{\underset{\sim}{\sigma} = \{\sigma_i\}_{i \in \mathbf{Z}^d} : \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda} \in W_\Lambda\} = P_\Lambda\{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda : \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda} \in W_\Lambda\}.$$

Нетрудно убедиться, что определяемое формулой /2/ семейство вероятностных мер не удовлетворяет условию /3/. Поэтому необходима некоторая другая процедура построения мер.

Заметим, что если мы зададим некоторое Λ и вероятностную меру $P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}\Lambda}(\cdot)$, определяемую согласно формуле /2/, то для всех $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$ семейство вероятностных мер

$$P_{\bar{\Lambda}}^{\underset{\sim}{h}\Lambda}(C) = P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}\Lambda}(\{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda = \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda} : \{\sigma_i\}_{i \in \bar{\Lambda}} \in C\} \equiv Q_c) =$$

$$= \sum_{\sigma^\Lambda \in Q_c} P_\Lambda^{\underset{\sim}{h}\Lambda}(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda), \quad C \in W_{\bar{\Lambda}} \qquad /4/$$

является согласованным. Для рассматриваемых нами вероятностных пространств $(\Omega_\Lambda, W_\Lambda, P_\Lambda)$ в частном случае одноточечного подмножества C множества $\Omega_{\bar\Lambda}$ формула /4/ имеет вид

$(C = \{(\bar\sigma_i)_{i\in\bar\Lambda}\})$

$$P_{\bar\Lambda}^{\tilde h^\Lambda}(\sigma_i = \bar\sigma_i\,;\, i\in\bar\Lambda) = Z_\Lambda^{-1} \sum_{\substack{\sigma_k=\pm1\\ k\in\Lambda\setminus\bar\Lambda}} \exp[-\beta H(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)]\Big|_{\sigma_i=\bar\sigma_i,\, i\in\bar\Lambda} .$$

Увеличивая Λ, мы будем иметь возможность охватить все большее число множеств $\bar\Lambda$. Можно ожидать, что в некотором смысле существует предел $\lim\limits_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_{\bar\Lambda}^{\tilde h^\Lambda}(C) \equiv P_{\bar\Lambda}^{\tilde h}(C)$. Более точно, можно ожидать, что при фиксированных значениях температуры и параметров $H(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$ для любого множества $C\in W_\Lambda$ существует такое число $P_{\bar\Lambda}^{\tilde h^\Lambda}(C)$, что модуль $|P_{\bar\Lambda}^{\tilde h^\Lambda}(C) - P_{\bar\Lambda}^{\tilde h}(C)| \to 0$ при $\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d$. Если это так, то справедлива

<u>Лемма 1</u>. $\{P_{\bar\Lambda}^{\tilde h}(\cdot)\}_{\bar\Lambda\subset \mathbf{Z}^d}$, $\operatorname{card}\bar\Lambda<\infty$ - согласованное семейство вероятностных мер.

<u>Доказательство:</u>

$$P_{\bar\Lambda_1}^{\tilde h}(C) = \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_{\bar\Lambda_1}^{\tilde h^\Lambda}(C) = \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_{\bar\Lambda_2}^{\tilde h^\Lambda}(\{\underset{\sim}{\sigma}^{\bar\Lambda_2} = \{\bar\sigma_i\}_{i\in\bar\Lambda_2}:$$

$$\{\bar\sigma_i\}_{i\in\bar\Lambda_1}\in C\}) = P_{\bar\Lambda_2}^{\tilde h}(\{\underset{\sim}{\sigma}^{\bar\Lambda_2} = \{\bar\sigma_i\}_{i\in\bar\Lambda_2} : \{\bar\sigma_i\}_{i\in\bar\Lambda_1}\in C\}),$$

Итак, для задания вероятностной меры на $(\Omega_{\mathbf{Z}^d}; W_{\mathbf{Z}^d})$ достаточно найти пределы $P_{\bar\Lambda}^{\tilde h}(C) \equiv \lim\limits_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_{\bar\Lambda}^{\tilde h^\Lambda}(C)$ для всех $C\in W_{\bar\Lambda}$, $\bar\Lambda\subset \mathbf{Z}^d(\operatorname{card}\bar\Lambda<\infty)$.

Определим корреляционные функции обычным образом:

$$\langle\sigma_T\rangle_\Lambda \equiv \sum_{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda} P_\Lambda^{\tilde h^\Lambda}(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)\,\sigma_T\,;\quad \sigma_T \equiv \prod_{i\in T}\sigma_i,\quad T\subset\Lambda. \qquad /5/$$

Здесь $\{P_\Lambda^{\tilde h^\Lambda}\}_{\Lambda\subset \mathbf{Z}^d}$ - семейство /несогласованных/ вероятностных мер, определенных формулой /2/.

Лемма 2. Для нахождения пределов $P^{\underset{\sim}{h}}_{\Lambda_1}(C)$ достаточно найти пределы $\lim\limits_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} \langle\sigma_T\rangle_\Lambda$ для всех $T\subset\Lambda_1$. А именно, имеет место равенство

$$P^{\underset{\sim}{h}}_{\Lambda_1}(\{\underset{\sim}{\sigma}:\sigma_i=\bar{\sigma}_i,\ i\in\Lambda_1\})=\sum_{T\subset\Lambda_1} k_T(\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda_1})\cdot\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda .$$

Доказательство: Заметим, что любое цилиндрическое множество $\Psi_c=\{\underset{\sim}{\sigma}:\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}\in C\}$ представимо в виде конечной суммы непересекающихся множеств $\Psi_c=\bigcup\limits_{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda\in C}\{\underset{\sim}{\sigma}:\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}=\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda\}$. Поэтому

$$P^{\underset{\sim}{h}}_{\Lambda}(\Psi_c)=\sum_{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda\in C}P^{\underset{\sim}{h}}_{\Lambda}\{\underset{\sim}{\sigma}:\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}=\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda\} .$$

Следовательно, для доказательства леммы достаточно доказать ее для множеств Ψ_c вида $\{\underset{\sim}{\sigma}:\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}=\{\bar{\sigma}_i\}_{i\in\Lambda}\}$, то есть для случая, когда C - одноточечное подмножество множества Ω_Λ. Для такого сорта множеств имеем

$$P^{\underset{\sim}{h}}_{\Lambda_1}(\{\underset{\sim}{\sigma}:\sigma_i=\bar{\sigma}_i,\ i\in\Lambda_1\})=\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d}P^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}_{\Lambda}(\{\underset{\sim}{\sigma}:\sigma_i=\bar{\sigma}_i,\ i\in\Lambda_1\})=$$

$$=\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d}\sum_{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda}\prod_{i\in\Lambda_1}[(\sigma_i+\bar{\sigma}_i)/2]\cdot P^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}_{\Lambda}(\{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda\})=$$

$$=\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d}\sum_{T\subset\Lambda_1}k_T(\bar{\underset{\sim}{\sigma}}^{\Lambda_1})\langle\sigma_T\rangle_\Lambda=\sum_{T\subset\Lambda_1}k_T(\bar{\underset{\sim}{\sigma}}^{\Lambda_1})\cdot\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda .$$

Такой способ построения предельных гиббсовских распределений был впервые предложен Р.А.Минлосом /4/ .

Отметим, что процедура задания согласованного семейства вероятностных мер, вообще говоря, не однозначна. В самом деле, пусть заданы множества $\Lambda_3\subset\Lambda_2\subset\Lambda_1$, $\operatorname{card}\Lambda_1<\infty$. Для всех $\Lambda_3\subset\Lambda_2$ мы можем определить согласованное семейство вероятностных мер не только способом, указанным формулой /4/, но и, например, следующим образом:

$$P^{\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1}}_{\Lambda_3}(C)=P^{\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1}}_{\Lambda_1}(\{\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda_1}:\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2}=\{\bar{\sigma}_i\}_{i\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2},\ \{\sigma_i\}_{i\in\Lambda_3}\in C\}),$$

где $\{\bar\sigma_i\}_{i\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2}$ - некоторый набор +1 и -1, а $C\in W_{\Lambda_3}$. Данному способу определения вероятностных мер естественно дать следующую физическую интерпретацию. Рассматриваемая нами система находится в сосуде Λ_2, а в области $\Lambda_1\setminus\Lambda_2$ задано граничное условие $\sigma_i=\bar\sigma_i$, $i\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2$. Способ /4/ построения мер при данной интерпретации соответствует так называемым пустым граничным условиям. Можно ожидать, что различным граничным условиям и различным способам устремления Λ_2 и Λ_1 к Z^d будут соответствовать различные семейства распределений $\{P^{\underset{\sim}{h}}_{\Lambda_3}(C)\}_{\Lambda_3\subset Z^d}$.

Приступим к исследованию корреляционных функций. Для любого гамильтониана из класса $\mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$ имеем согласно формулам /1/, /2/ и /5/,

$$<\sigma_T>_\Lambda=Z_\Lambda^{-1}\cdot\sum_{\sigma_i=\pm1,\,i\in\Lambda}\ \prod_{j_1\in T}\sigma_{j_1}\exp\Big(\frac{\beta J}{2|\Lambda|}\sum_{i,j\in\Lambda}\sigma_i\sigma_j+\beta\sum_{i\in\Lambda}h_i\sigma_i\Big).$$

Учитывая, что $\sum_{i,j\in\Lambda}\sigma_i\sigma_j=\big(\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i\big)^2$ и воспользовавшись формулой $\exp(\frac{1}{2}ax^2)=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{1}{2}y^2+x\sqrt{a}\,y)\,dy$, мы можем выполнить суммирование под знаком интеграла и получить следующее выражение

$$<\sigma_T>_\Lambda=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}dx\exp(-\frac{1}{2}x^2)\cdot\prod_{j\in T}\operatorname{th}(\beta h_j+x\sqrt{\frac{\beta J}{|\Lambda|}})\prod_{j\in\Lambda}\operatorname{ch}(\beta h_j+x\sqrt{\frac{\beta J}{|\Lambda|}})}{\int_{-\infty}^{+\infty}dx\exp(-\frac{1}{2}x^2)\prod_{j\in\Lambda}\operatorname{ch}(\beta h_j+x\sqrt{\frac{\beta J}{|\Lambda|}})}.$$

Производя замену переменной интегрирования $x=\sqrt{|\Lambda|\beta J}\,y$ и вводя обозначение $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)=\frac{1}{2}Jy^2-\frac{1}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda}\ln\operatorname{ch}\beta(Jy+h_j)$, получим следующее представление для $<\sigma_T>_\Lambda$

$$<\sigma_T>_\Lambda=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}dy\exp(-\beta|\Lambda|\cdot f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda))\cdot\prod_{j\in T}\operatorname{th}\beta(h_j+Jy)}{\int_{-\infty}^{+\infty}dy\exp(-\beta|\Lambda|\cdot f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda))}. \qquad /6/$$

Формула /6/ соответствует способу /4/ построения согласованного семейства вероятностных мер, другие способы построения мер приводят к аналогичному /6/ выражению. Необходимо лишь к неоднородной конфигурации $\{h_j\}$ добавить однородную составляющую h°, зависящую, возможно, от $|\Lambda|$. Лемма 2 устанавливает связь между $\lim\limits_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} \langle \sigma_T \rangle_\Lambda$ и $\lim\limits_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_{\Lambda_1}^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)$, однако для любого гамильтониана из семейства $\mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$ мы можем получить непосредственно для $P_{\Lambda_1}^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\cdot)$ удобное для предельной процедуры выражение.

Лемма 2а. Для любого гамильтониана из семейства $\mathcal{H}_\Lambda(\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda)$ имеет место следующее представление для

$$P_{\Lambda_1}^{\underset{\sim}{h}^\Lambda}(\{\underset{\sim}{\sigma}^\Lambda : \sigma_i = \bar{\sigma}_i,\ i \in \Lambda_1\}) \equiv M:$$

$$M = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)\}\cdot \prod\limits_{j\in\Lambda} \exp \beta[\bar{\sigma}_j(Jy+h_j) - \frac{1}{\beta}\ln\operatorname{ch}\beta(Jy+h_j)]\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)\}dy}. \qquad /7/$$

Доказательство. Данное представление получается аналогично формуле /6/.

Выражения в правых частях равенств /6/ и /7/ можно привести для единообразия к виду

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)\}\, g(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1})\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)\}dy} \equiv R(\beta;\underset{\sim}{h}^\Lambda),$$

где $g(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1})$ - некоторая не зависящая от Λ функция. Таким образом, наша задача состоит в исследовании предела $R(\beta;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ при стремлении Λ к $\mathbf{Z}^d$.

Заметим, что функция $g(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1})$ в обоих случаях не превосходит 1. Фиксируем $a > 0$, тогда, используя теорему Лагранжа, получим следующее тождество

$$\int_{-\infty}^{-a} \exp[-\frac{\beta}{2}|\Lambda|(Jy^2 - \frac{2}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \ln\mathrm{ch}\,\beta(h_j + Jy)]dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} \exp[-\frac{\beta}{2}|\Lambda|(Jy^2 - \frac{2}{\beta|\Lambda|}\ln\mathrm{ch}\,\beta h_j -$$

$$- \frac{2Jy}{|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \mathrm{th}\,\beta(Jy^*(y) + h_j))]dy \equiv N,$$

где $y^*(y)$ - некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0 \le y^*(y) \le y$. Очевидно, что справедливо двойное неравенство

$$0 \le N \le \int_{-\infty}^{-a} \exp[-\frac{\beta}{2}|\Lambda|\, J(y^2 - 2|y|)]dy \cdot \prod_{j\in\Lambda} \mathrm{ch}\,\beta h_j .$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{-a} \exp[-\frac{\beta}{2}|\Lambda|\, J(y^2 - 2|y|)]dy = \int_{-\infty}^{-a} \exp[-\frac{\beta}{2}(|\Lambda| - |\Lambda|_o) \cdot$$

$$\times J(y^2 - 2|y|] \cdot \exp[-\frac{\beta}{2}|\Lambda|_o J(y^2 - 2|y|)]dy \le \int_{-\infty}^{-a} \exp[-\frac{\beta}{2}|\Lambda|_o \times$$

$$\times J(y^2 - 2|y|)]dy \cdot \exp[-\frac{\beta}{2}(|\Lambda| - |\Lambda|_o)\, J(a^2 - 2a)]$$

для любого $|\Lambda|_o$, удовлетворяющего неравенству $0 < |\Lambda|_o < |\Lambda|$, $a \ge 2$, то

$$N \le \sqrt{\frac{4\pi}{\beta|\Lambda|_o J}}\exp[-\frac{\beta J}{2}(|\Lambda| - |\Lambda|_o)(a^2 - 2a) + \frac{\beta J|\Lambda|_o}{2}] \cdot \prod_{j\in\Lambda} \mathrm{ch}\,\beta h_j .$$

Пусть случайная последовательность такова, что существует число $C < \infty$, для которого почти наверное выполняется $h_j \le C$ при всех $j \in \mathbf{Z}^d$. Тогда мы можем выбрать такое значение a, что $N \to 0$ (P-п.н.) при $|\Lambda| \to \infty$ с экспоненциальной скоростью. Очевидно, что существует интервал (γ_1, γ_2), на котором функция $f_\Lambda(y; \underset{\sim}{h}^\Lambda) \le 0$, поэтому если предел $\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d} R(\beta; \underset{\sim}{h}^\Lambda)$ существует, то выполняется

$$\lim_{\Lambda\uparrow Z^d} R(\beta;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) = \lim_{\Lambda\uparrow Z^d} \frac{\int_{-a}^{a} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})\} g(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1})\,dy}{\int_{-a}^{a} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})\}dy}$$

с вероятностью 1.

Данный предел можно попытаться вычислить с помощью метода Лапласа, для этого необходимо иметь информацию о точках минимума функции $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$.

Лемма 3. Пусть существует N точек $y_1,\dots,y_N$, в которых реализуется абсолютный минимум функции $r(y) = 1/2\,Jy^2 - \beta^{-1} M \ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_1)$ при фиксированных значениях β; J, вторая производная $r''(y)$ положительна в этих точках, и общее число точек экстремума конечно. Если, кроме того, математическое ожидание по распределению поля h_1 $M|\ln\operatorname{ch}\beta(Jy + h_1)| < \infty$, то найдется число $|\Lambda|_1$, такое, что для всех $|\Lambda| > |\Lambda|_1$ имеется не менее N точек минимума $y_1^{(\Lambda)},\dots,y_N^{(\Lambda)}$ функции $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$ (Р-п.н.); абсолютный минимум $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$ достигается на некотором подмножестве этих точек (Р-п.н.); $\lim y_i^{(\Lambda)} = y_i$, $i = 1,\dots,N$ (Р-п.н.); существует такое число $\Delta > 0$, что для всех $|\Lambda| > |\Lambda|_1$ выполняется $|f_\Lambda(y^*;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) - f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda})| > \Delta$ для любой точки минимума y^* функции $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$, не попавшей в число указанных N точек минимума (Р-п.н.).

Доказательство. По условию, вторая производная функции $r(y)$ непрерывна и положительна в точках $y_1,\dots,y_N$, следовательно, найдется такое δ, что положительность $r''(y)$ имеет место в δ-окрестностях точек $y_1,\dots,y_N$. Очевидно, что при таком выборе δ первая производная $r'(y)$ имеет разные знаки в точках $y_i - \delta$ и $y_i + \delta$, $i = 1,\dots,N$. В силу равномерной сходимости с вероятностью 1 на любом конечном отрезке функции

$$\partial_y f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) \quad \text{к} \quad \partial_y r(y) \quad \text{и} \quad \partial_{yy} f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) \quad \text{к} \quad \partial_{yy} r(y)$$

при $\Lambda\uparrow Z^d$ /см. Добавление/ $\partial_{yy} f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$ положительна в указанных δ-окрестностях, а $\partial_y f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$ имеет в точках $y_i - \delta$ и $y_i + \delta$, $i = 1,\dots,N$, разные знаки для всех Λ, таких, что $|\Lambda| > |\Lambda|_2$. Следовательно, для указанных Λ в каждой из названных δ-окрестностей существует единственная точка $y_i^{(\Lambda)}$, в которой $\partial_y f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) = 0$, а $\partial_{yy} f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) > 0$. Все это гарантирует нам, что в точке $y_i^{(\Lambda)}$ функция $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ имеет минимум (P-п.н.) . В силу конечности числа точек экстремума функции $r(y)$ существует такое $\Delta_1 > 0$, что

$$r(y_1) \le -\Delta_1 + r(y). \qquad /8/$$

для всех y, не принадлежащих указанным δ-окрестностям точек y_i, $i = 1,\ldots,N$. Отсюда и из равномерной сходимости (P-п.н.) $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ к $r(y)$ следует, что абсолютный минимум $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ реализуется на некотором подмножестве точек $y_1^{(\Lambda)},\ldots,y_N^{(\Lambda)}$ для всех $\Lambda: |\Lambda| > |\Lambda|_3$ (P-п.н.) . Если кроме упомянутых N точек минимума существуют еще точки минимума функции $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$, то они лежат вне указанных δ-окрестностей. Следовательно, в силу неравенства /8/ и равномерной (P-п.н.) сходимости $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ мы можем указать такое Δ, что для всех Λ, таких, что $|\Lambda| > |\Lambda|_4$, выполняется $f_\Lambda(y^*;\underset{\sim}{h}^\Lambda) - f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^\Lambda) > \Delta$ (P-п.н.) , где y^*- произвольная точка минимума $f(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$, лежащая вне δ-окрестностей точек $y_i^{(\Lambda)}$. Заметим, наконец, что мы можем уменьшать δ до произвольного положительного значения, при этом положительность второй производной $\partial_{yy} f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ в δ-окрестностях точек минимума и различие знаков $\partial_y f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ на границах указанных δ-окрестностей мы всегда можем гарантировать для всех Λ, таких, что $|\Lambda| > |\Lambda|_4$, ввиду упомянутой выше сходимости и наличия этих свойств у функций $\partial_{yy} r(y)$ и $\partial_y r(y)$. Для завершения доказательства леммы заметим, что фигурирующее в ее формулировке значение $|\Lambda|_1$ надо выбрать равным $\max(|\Lambda|_2, |\Lambda|_3, |\Lambda|_4)$.

Итак, некоторая информация о точках минимума $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^\Lambda)$ получена.

Теорема 1. Пусть:

1. Функция $r(y) = \frac{1}{2} Jy^2 - \beta^{-1} M \ln \operatorname{ch} \beta (Jy + h_1)$ при некоторых значениях β, J имеет единственный абсолютный минимум в точке y^*. Тогда $\lim\limits_{\Lambda \uparrow Z^d} R(\beta;\underset{\sim}{h}^\Lambda) = g(y^*;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1})$ (P-п.н.) .

2. Функция $r(y)$ имеет N абсолютных минимумов в точках $y_1^*,\ldots,y_N^*$. Тогда для достаточно больших значений $|\Lambda|$ имеет место формула (P-п.н.)

$$R(\beta;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\exp[-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda})]\left[\dfrac{g(y_i^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda})}{\sqrt{\partial_{yy} f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda})}} + O(|\Lambda|^{-1/2})\right]}{\sum\limits_{k=1}^{N} \exp[-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y_k^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda})]\cdot[(\partial_{yy} f_\Lambda(y_k^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda}))^{-1/2} + O(|\Lambda|^{-1/2})]},$$

где $y_i^{(\Lambda)}$ сходятся к y_i^* при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$.

Доказательство. Лемма 3 утверждает, что с вероятностью 1 существует такое число $|\Lambda|_1$, что для всех Λ, таких, что $|\Lambda| > |\Lambda|_1$, абсолютный минимум функции $f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$ достигается только в одной точке. Обозначим ее $y^{(\Lambda)}$. Кроме того, лемма 3 утверждает, что $y^{(\Lambda)} \to y^*$ при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$. Применяя метод Лапласа к интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})\} g(y;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1})\, dy = I,$$

получим

$$I = \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda})\}\cdot\sqrt{2\pi}\times$$

$$\times[(|\Lambda|\beta\partial_{yy} f_\Lambda(y^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda}))^{-1/2}\cdot g(y^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1}) + O(|\Lambda|^{-1})].$$

Следовательно,

$$R(\beta;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) = \frac{g(y^{(\Lambda)};\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1}) + O(|\Lambda|^{-1/2})}{1 + O(|\Lambda|^{-1/2})},$$

а значит

$$\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} R(\beta;\underset{\sim}{h}^{\Lambda}) = g(y^*;\underset{\sim}{h}^{\Lambda_1}) \qquad (P\text{ – п.н.}).$$

В случае 2 лемма 3 утверждает, что для достаточно больших Λ на роль точек абсолютного минимума могут претендовать только N точек, обозначим их $y_1^{(\Lambda)},\ldots,y_N^{(\Lambda)}$, причем $\lim\limits_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} y_i^{(\Lambda)} = y_i^*$

(P–п.н.). Выражение для $R(\beta;\underset{\sim}{h}^{\Lambda})$ получается теперь непосредственным применением метода Лапласа.

4. СТРУКТУРА СЛУЧАЙНОГО ЭЛЕМЕНТА П(·)

Множество П, играющее роль множества значений случайного элемента П(·), находится во взаимно однозначном соответствии с множеством наборов согласованных вероятностных мер $\{P_{\Lambda}^{\underset{\sim}{h}}(\cdot): \Lambda \subset \mathbf{Z}^d\}$, которое мы умеем описывать, по крайней мере, для случая 1 теоремы 1. Согласно этой теореме, каждой конфигурации $\underset{\sim}{h}$ в этом случае будет соответствовать свое семейство $\{P_{\Lambda}^{\underset{\sim}{h}}(\cdot):\Lambda \subset \mathbf{Z}^d\}$. Поскольку если конфигурации $\underset{\sim}{h}^{(1)}$ и $\underset{\sim}{h}^{(2)}$ имеют различные значения h_k в к-м узле, то, по крайней мере, $P^{\underset{\sim}{h}^{(1)}}_{\{k\}}(\cdot)$ и $P^{\underset{\sim}{h}^{(2)}}_{\{k\}}(\cdot)$ различаются. Это говорит о том, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством П и множеством $E_{\mathbf{Z}^d}$.

Поэтому можно сказать, что структура случайного элемента П(·) в случае 1 подобна структуре случайной последовательности $\underset{\sim}{h}$. Все сказанное, разумеется, верно с вероятностью 1. Случай 2 теоремы 1 будет обсуждаться в следующей работе.

5. ПЛОТНОСТЬ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Как мы уже упоминали, каждой конфигурации внешнего поля $\underset{\sim}{h}$ соответствует некоторое семейство гамильтонианов $H_{\Lambda}(\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda}; \underset{\sim}{h}^{\Lambda})$, $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$, где

$$\underset{\sim}{h}^{\Lambda} \equiv \underset{\sim}{h}\setminus\Lambda = \{h_i^{\Lambda},\ i \in \Lambda: \underset{\sim}{h} = \{\bar{h}_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d},\ h_i^{\Lambda} = \bar{h}_i\}.$$

По этому семейству мы можем определить плотность свободной энергии:

$$f^{\omega}(\beta) = -\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} \frac{1}{\beta|\Lambda|} \ln \sum_{\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda}} \exp[-\beta H_{\Lambda}(\underset{\sim}{\sigma}^{\Lambda}; \underset{\sim}{h}^{\Lambda})].$$

Тем самым мы получим семейство Ф функций от температуры и параметров гамильтониана. Введем сигма-алгебру подмножеств этого множества, которую будем обозначать символом G, $G = \{\{f^{\omega}(\beta) \in \Phi : \underset{\sim}{h} \in C\} : C \in \mathfrak{F}\}$ и распределение вероятностей $P_{\Phi}(\cdot)$ на G, $P_{\Phi}(Q) = P\{\omega : f^{\omega}(\beta) \in Q\}$ для любого $Q \in G$. Рассмотрим отображение $\Phi(\cdot) : \Omega \to \Phi$.

Определение 4. Плотностью свободной энергии модели КВИ-$\underset{\sim}{h}$ назовем случайный элемент $\Phi(\cdot)$.

Структура данного случайного элемента оказывается особенно простой /самоусреднение предельной плотности свободной энергии/.

Теорема 2. Пусть при некоторых значениях β, J для функции $r(y)$ имеется N точек $y_1^*, \ldots, y_N^*$ абсолютного минимума. Тогда множество Φ содержит функцию

$$f(\beta) = \frac{Jy^{*2}}{2} - \frac{1}{\beta} M \ln 2 \operatorname{ch} \beta(Jy^* + h_1),$$

где $y^* = y_i^*$ для некоторого i, и

$$P_\Phi(\{f(\beta) = \frac{Jy^{*2}}{2} - \frac{1}{\beta} M \ln 2 \operatorname{ch} \beta(Jy^* + h_1)\}) = 1.$$

Доказательство. Согласно лемме 3, найдется такое значение $|\Lambda|_1$, что для всех $|\Lambda| > |\Lambda|_1$ имеется N точек, в которых может реализоваться абсолютный минимум функции $f_\Lambda(y; \underset{\sim}{h}^\Lambda)$ (P-п.н.); обозначим их $y_1^{(\Lambda)}, \ldots, y_N^{(\Lambda)}$. Для $f(\beta)$ имеем следующее представление /см. формулу /6//

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} |\Lambda|^{-1} \ln \{\sqrt{\frac{2|\Lambda|\beta J}{\pi}} \cdot \int_{-a}^{a} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y; \underset{\sim}{h}^\Lambda)\} dy\}.$$

Мы изменим пределы интегрирования, руководствуясь соображениями, использованными при выводе представления для $R(\beta; \underset{\sim}{h}^\Lambda)$. Метод Лапласа дает нам следующее равенство

$$\int_{-a}^{a} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y; \underset{\sim}{h}^\Lambda)\} dy = \sum_{i=1}^{N} \exp\{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda)\}.$$

$$\times [(2\pi)^{1/2} (|\Lambda| \beta \partial_{yy} f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda))^{-1/2} + O(|\Lambda|^{-1})],$$

следовательно,

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} |\Lambda|^{-1} \ln \sum_{i=1}^{N} \{\exp[-\beta|\Lambda| f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda)] \cdot [1 + O(|\Lambda|^{-1/2})]\},$$

Мы здесь воспользовались конечностью $\partial_{yy} f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda)$.

$$f(\beta) = \frac{J}{2} y_1^{*2} - M \ln 2 \operatorname{ch} \beta (J y_1^* + h_1) - \frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} |\Lambda|^{-1} \ln(1 +$$

$$+ \sum_{i=2}^{N} \exp\{-\beta|\Lambda|(f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda) - f_\Lambda(y_1^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda))\} \cdot [1 + O(|\Lambda|^{-½})]).$$

Покажем, что последнее слагаемое есть ноль. Так как

$$\ln(1 + \sum_{i=1}^{N} x_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \ln(1 + x_i), \quad x_i \geq 0,$$

то

$$0 \leq |\Lambda|^{-1} \ln(1 + \sum_{i=2}^{N} \exp\{-\beta|\Lambda|(f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda) - f_\Lambda(y_1^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda))\} \cdot [1 + O(|\Lambda|^{-½})]) \leq$$

$$\leq |\Lambda|^{-1} \sum_{i=2}^{N} \ln(1 + \exp\{-\beta|\Lambda|(f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda) - f_\Lambda(y_1^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda))\} \cdot [1 + O(|\Lambda|^{-½})]).$$

Далее

$$\lim_{|\Lambda| \to \infty} |\Lambda|^{-1} \ln(1 + \exp\{-\beta|\Lambda|(f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda) - f_\Lambda(y_1^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda))\}) =$$

$$= -\beta \lim_{|\Lambda| \to \infty} (f_\Lambda(y_i^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda) - f_\Lambda(y_1^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda)) = 0.$$

Последнее равенство имеет место ввиду сходимости $y_i^{(\Lambda)} \to y_i^*$ и равномерной (P – п.н.) сходимости $f_\Lambda(y^{(\Lambda)}; \underset{\sim}{h}^\Lambda) \rightrightarrows r(y)$ при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$. Итак, почти для всех конфигураций $\underset{\sim}{h}$ имеет место

$$f(\beta) = \frac{J}{2} y^{*2} - M \ln 2 \operatorname{ch} \beta (J y^* + h_1),$$

следовательно,

$$P_\Phi(\{f(\beta) = \frac{J y^{*2}}{2} - M \ln 2 \operatorname{ch} \beta (J y^* + h_1)\}) = 1.$$

Для внесения полной ясности в рассматриваемые вопросы необходимо знать распределение случайной величины h_1. Этому и некоторым другим вопросам будет посвящена следующая работа.

В заключение хочу выразить благодарность моему научному руководителю В.А.Загребнову за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

ДОБАВЛЕНИЕ

Ниже мы будем использовать эргодическую теорему Биркгофа - Хинчина, поэтому сформулируем интересующую нас часть ее в виде отдельного предложения /см. также[3] /.

Предложение Д1. Пусть $\underset{\sim}{h} = \{h_i\}_{i\in \mathbf{Z}^+}$ - эргодическая случайная последовательность с $M|h_1| < \infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i = Mh_1 \quad (P - \text{п.н.}).$$

Лемма Д1. Пусть $M|\ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_1)| < \infty$ и

$$A_y = \{\omega \in \Omega : \frac{1}{\beta|\Lambda|} \sum_{j\in\Lambda} \ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_j(\omega)) \not\to \beta^{-1} M \ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_1(\omega))\}.$$

Тогда $P(\bigcup_{y\in K} A_y) = 0$ для любого $K \subset \mathbf{R}^1$.

Доказательство. В силу монотонности $P(\cdot)$ лемма будет полностью доказана, если мы докажем ее для частного случая $K = \mathbf{R}^1$. Прежде всего отметим, что $\{\ell_n \equiv \ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_{i(n)})\}_{n\in \mathbf{Z}^+}$ - эргодическая последовательность. В самом деле, если в пространстве односторонних числовых последовательностей существует такое борелевское подмножество L, что множество $A_L = \{\omega : \{\ell_n(\omega)\}_{n\in\mathbf{Z}^+} \in L\}$ инвариантно относительно последовательности $\{\ell_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$, то $A_L = \{\omega : \{h_{i(n)}\}_{n\in\mathbf{Z}^+} \in \tilde{L}\}$, где $\tilde{L}$ - полный прообраз L при отображении $\{h_{i(n)}\}_{n\in\mathbf{Z}^+} \to \{\ell_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$. Так как $\ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_{i(n)})$ - непрерывная функция аргумента $h_{i(n)}$, то $\tilde{L}$ - также борелевское множество, и нетрудно убедиться, что A_L инвариантно относительно $\{h_{i(n)}\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$. Следовательно, $P(A_L) = 0$ или 1, в силу эргодичности $\{h_{i(n)}\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$. В силу эргодичности $\{\ell_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ для любого y с вероятностью 1

$$\frac{1}{\beta|\Lambda|} \sum_{j\in\Lambda} \ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_j) \to \beta^{-1} M \ln \operatorname{ch}\beta(Jy + h_1).$$

Таким образом, $P(A_y = 0)$ для каждого y. Пусть Y - счетное плотное подмножество в $\mathbf{R}^1$, тогда очевидно $P(\bigcup_{y\in Y} A_y) = 0$ и

$\bigcup_{y\in Y} A_y \subset \bigcup_{y\in \mathbf{R}^1} A_y$. Покажем, что из того, что $\omega \in \overline{\bigcup_{y\in Y} A_y}$, следует что $\omega \in \overline{\bigcup_{y\in \mathbf{R}} A_y}$ /здесь $\bar{A}$ означает дополнение к множеству A в Ω/.

Действительно, пусть $\omega \in \overline{\bigcup_{y\in Y} A_y}$ и $y \in \mathbf{R}^1$, а $\tilde{y}$ - некоторый элемент Y, тогда

$$\left| \frac{1}{\beta|\Lambda|} \sum_{j\in\Lambda} \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_j(\omega)) - \frac{1}{\beta} M \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_1) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta|\Lambda|} \sum_{j\in\Lambda} \left| \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_j(\omega)) - \ln \operatorname{ch} \beta(J\tilde{y} + h_j(\omega)) \right| + \left| \frac{1}{\beta|\Lambda|} \sum_{j\in\Lambda} \ln \operatorname{ch} \beta(J\tilde{y} + \right.$$

$$\left. + h_j(\omega)) - \frac{1}{\beta} M \ln \operatorname{ch} \beta(J\tilde{y} + h_1) \right| + \frac{1}{\beta} \left| M \ln \operatorname{ch} \beta(J\tilde{y} + h_1) - M \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_1) \right|.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства можно сделать меньше любого наперед заданного $\epsilon > 0$ при $|y - \tilde{y}| < \delta_1$ в силу

$$\beta^{-1} \left| \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_j(\omega)) - \ln \operatorname{ch} \beta(J\tilde{y} + h_j(\omega)) \right| =$$

$$= |y - \tilde{y}| \cdot J \cdot \left| \operatorname{th} \beta(Jy^* + h_j(\omega)) \right| \leq J \cdot |y - \tilde{y}|,$$

второе меньше любого $\epsilon > 0$ для всех $|\Lambda| > |\Lambda|_\epsilon$ в силу $\omega \in \overline{\bigcup_{y\in Y} A_y}$

Третье слагаемое меньше ϵ при $|y - \tilde{y}| < \delta_2$ в силу непрерывности $M \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_1)$ как функции аргумента y. Неравенство $|y - \tilde{y}| < \delta_2$ может быть удовлетворено для всех y и $\delta_2 > 0$ в силу специального выбора множества Y, а значит

$$\frac{1}{\beta|\Lambda|} \sum_{j\in\Lambda} \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_j(\omega)) \to \frac{1}{\beta} M \ln \operatorname{ch} \beta(Jy + h_1),$$

то есть $\omega \in \overline{\bigcup_{y\in \mathbf{R}} A_y}$. Следовательно, $\overline{\bigcup_{y\in Y} A_y} \subset \overline{\bigcup_{y\in \mathbf{R}} A_y}$, а значит

$\bigcup_{y\in Y} A_y = \bigcup_{y\in \mathbf{R}} A_y$.

Лемма Д2. Последовательность $\phi_\Lambda(y) = \frac{1}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy + h_j)$ сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]$ к $M \ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy + h_1) = \phi(y)$ с вероятностью 1.

Доказательство. Для любого $\omega \in \overline{\bigcup_{y\in[a;b]} A_y}$ мы имеем поточечную сходимость $\phi_\Lambda(y) \to \phi(y)$ для всех $y \in [a, b]$. Заметим, что для любого ω последовательность ϕ_Λ равномерно равностепенно непрерывна, поскольку

$$\left|\frac{1}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy' + h_j) - \frac{1}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy'' + h_j)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} |\ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy' + h_j) - \ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy'' + h_j)| \le J\cdot|y' - y''|.$$

Отсюда, в силу известной теоремы математического анализа, следует равномерная сходимость $\phi_\Lambda(y)$ к $\phi(y)$ на любом конечном отрезке. Поскольку лемма Д1 утверждает, что $P(\overline{\bigcup_{y\in[a;b]} A_y}) = 1$, то утверждение леммы Д2 полностью доказано.

Замечание Д1. Точно таким же способом, как это сделано для последовательности $\{\frac{1}{\beta|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \ln \mathrm{ch}\, \beta(Jy + h_j)\}_\Lambda$, можно доказать аналогичное утверждение о равномерной сходимости с вероятностью 1 последовательностей $\{\frac{J}{|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \mathrm{th}\, \beta(Jy + h_j)\}_\Lambda$ и $\{\frac{\beta J^2}{|\Lambda|}\sum_{j\in\Lambda} \mathrm{ch}^{-2}\beta(Jy + h_j)\}_\Lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. - ТМФ, 1986, 66, с.109.
2. Angelescu N., Zagrebnov V.A. - J. Stat. Phys., 1985, 41, p.323.
3. Ширяев А.Н. - Вероятность. М.: Наука, 1980.
4. Минлос Р.А. - Функциональный анализ и его прил., 1967, 1, №2, с.60; 1967, 1, №3, с.40.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1989 года.