89-777

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17-89-777

А.А.Бакасов, Е.К.Башкиров*, В.Хмельовски

ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ КВАДРАТУРНЫХ КОМПОНЕНТ ДВУХМОДОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУХБОЗОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

*Куйбышевский государственный университет

1989

I. Цели работы

В предыдущей работе /I/ рассмотрена простейшая микроскопическая модель одномодовой системы с двухбозонным самодействием. Были найдены начальные условия, реализующие стационарное сжатие, а также определена явная временная зависимость моментов второго порядка от времени.

Естественным последующим шагом является исследование двухмодовой модели с двухбозонным взаимодействием между модами. Помимо нахождения явной зависимости моментов второго порядка, в том числе и операторов дисперсий квадратурных компонент, от времени и начальных условий, интерес представляет выяснение возможности стационарного сжатия в такой модели, а также построение кроссовера между этой моделью и моделью, рассмотренной в /I/. Сразу отметим, что исследование, проведенное в настоящей работе, показало невозможность как стационарного сжатия в двухмодовой модели, так и кроссовера между одномодовой /I/ и двухмодовой моделями (см. обсуждение в разделе 4).

Реализация стационарного сжатого состояния, отличного от известных динамических сжатых состояний /2-4/, более вероятна для систем со смешанным фотон-фононным взаимодействием /5,6/, нежели для квантово-оптических систем /I/, что также делает весьма уместным исследование двухмодовой модели. В разное время рассматривались различные задачи о явной временной эволюции дисперсий квадратурных компонент (см., к примеру, /7-9/), однако задача о нахождении стационарного сжатия не ставилась. И, конечно, надо отметить, что помимо решения операторной задачи в представлении Гейзенберга, можно использовать представление Шредингера, основываясь, например, на результатах, полученных в теории коррелированных состояний /10/.

2. Гамильтониан и формальные соотношения

Рассмотрим задачу о временной эволюции дисперсий квадратурных компонент двухмодовой системы с модельным гамильтонианом

$$H = \omega_a a^+ a + \omega_b b^+ b + f^* a b + f a^+ b^+ . \qquad (1)$$

Здесь $a^+(a)$ и $b^+(b)$ – операторы рождения (уничтожения) двух различных мод бозе-полей с частотами ω_a и ω_b соответственно, а f – константа взаимодействия.

Определим для исходных полей квадратурные комопоненты

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+),\\
&X_3 = \frac{1}{2}(b + b^+), \quad X_4 = \frac{1}{2i}(b - b^+);\\
&[X_1, X_2] = \frac{i}{2}, \quad [X_3, X_4] = \frac{i}{2}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Невырожденное преобразование к новым операторам имеет вид

$$
A = \mu a + \nu b^+, \quad B = \nu a^+ + \mu b, \quad |\mu|^2 - |\nu|^2 \neq 0, \tag{3}
$$

где μ и ν – комплексные числа.

Для новых полей квадратурные компоненты вводятся аналогичным образом:

$$
\begin{aligned}
&Y_1 = \frac{1}{2}(A + A^+), \quad Y_2 = \frac{1}{2i}(A - A^+),\\
&Y_3 = \frac{1}{2}(B + B^+), \quad Y_4 = \frac{1}{2i}(B - B^+);\\
&[Y_1, Y_2] = \frac{i}{2}, \quad [Y_3, Y_4] = \frac{i}{2}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Определим также следующие операторные столбцы

$$
X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\},
$$

связанные соотношением

$$
Y = U_1 X, \tag{5}
$$

где матрица прямого преобразования U_1 равна

$$
U_1 = \begin{pmatrix}
\mathrm{Re}\,\mu & -\mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\,\nu & \mathrm{Im}\,\nu\\
\mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\,\mu & \mathrm{Im}\,\nu & -\mathrm{Re}\,\nu\\
\mathrm{Re}\,\nu & \mathrm{Im}\,\nu & \mathrm{Re}\,\mu & -\mathrm{Im}\,\mu\\
\mathrm{Im}\,\nu & -\mathrm{Re}\,\nu & \mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\,\mu
\end{pmatrix} \tag{6}
$$

Обратное преобразование имеет вид

$$
X = U_1^{-1} Y, \tag{7}
$$

где

$$
U_1^{-1} = \frac{1}{|\mu|^2 - |\nu|^2}
\begin{pmatrix}
\mathrm{Re}\,\mu & \mathrm{Im}\,\mu & -\mathrm{Re}\,\nu & -\mathrm{Im}\,\nu\\
-\mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\,\mu & -\mathrm{Im}\,\nu & \mathrm{Re}\,\nu\\
-\mathrm{Re}\,\nu & -\mathrm{Im}\,\nu & \mathrm{Re}\,\mu & \mathrm{Im}\,\mu\\
-\mathrm{Im}\,\nu & \mathrm{Re}\,\nu & -\mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\,\mu
\end{pmatrix}. \tag{8}
$$

Операторы флуктуаций исходных и вспомогательных полей есть

$$
\Delta X_i = X_i - \langle X_i \rangle, \quad \Delta Y_i = Y_i - \langle Y_i \rangle, \tag{9}
$$

где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по состоянию или матрице плотности. Для определения временной эволюции дисперсий квадратурных компонент исходных полей представляется удобным ввести следующие операторные столбцы:

$$
\begin{aligned}
\Delta X^2 = \{&\Delta X_1^2, \Delta X_2^2, \Delta X_3^2, \Delta X_4^2, \Delta X_1\Delta X_2 + \Delta X_2\Delta X_1, \Delta X_1\Delta X_3 +\\
&+ \Delta X_3\Delta X_1, \Delta X_1\Delta X_4 + \Delta X_4\Delta X_1, \Delta X_2\Delta X_3 + \Delta X_3\Delta X_2,\\
&\Delta X_2\Delta X_4 + \Delta X_4\Delta X_2, \Delta X_3\Delta X_4 + \Delta X_4\Delta X_3\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta Y^2 = \{&\Delta Y_1^2, \Delta Y_2^2, \Delta Y_3^2, \Delta Y_4^2, \Delta Y_1\Delta Y_2 + \Delta Y_2\Delta Y_1, \Delta Y_1\Delta Y_3 +\\
&+ \Delta Y_3\Delta Y_1, \Delta Y_1\Delta Y_4 + \Delta Y_4\Delta Y_1, \Delta Y_2\Delta Y_3 + \Delta Y_3\Delta Y_2,\\
&\Delta Y_2\Delta Y_4 + \Delta Y_4\Delta Y_2, \Delta Y_3\Delta Y_4 + \Delta Y_4\Delta Y_3\}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Используя (5)-(9), получим соотношения, связывающие операторы моментов второго порядка (10),(11)

$$
\Delta Y^2 = U_2 \Delta X^2, \tag{12}
$$

$$
\Delta X^2 = U_2^{-1} \Delta Y^2, \tag{13}
$$

$$
U_2 = \begin{pmatrix}
\mathrm{Re}^2\mu & \mathrm{Im}^2\mu & \mathrm{Re}^2\nu & \mathrm{Im}^2\nu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu \\
\mathrm{Im}^2\mu & \mathrm{Re}^2\mu & \mathrm{Im}^2\nu & \mathrm{Re}^2\nu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & -\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\nu \\
\mathrm{Re}^2\nu & \mathrm{Im}^2\nu & \mathrm{Re}^2\mu & \mathrm{Im}^2\mu & \mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu & \mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu \\
\mathrm{Im}^2\nu & \mathrm{Re}^2\nu & \mathrm{Im}^2\mu & \mathrm{Re}^2\mu & -\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu & \mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu & -\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu \\
2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu & -2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu & 2\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & -2\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}^2\mu-\mathrm{Im}^2\mu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu+\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu+\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu+\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu+\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Re}^2\nu+\mathrm{Im}^2\nu \\
2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & -2\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu & 2\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Re}\mu & -2\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu-\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu & \mathrm{Re}^2\mu+\mathrm{Re}^2\nu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu+\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu+\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}^2\mu+\mathrm{Im}^2\nu & -\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu+\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu \\
2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu & 2\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu & 2\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu & 2\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu-\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu+\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}^2\mu+\mathrm{Im}^2\nu & -\mathrm{Im}^2\mu-\mathrm{Re}^2\nu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu-\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Re}\mu+\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu \\
2\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu & 2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu & 2\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu & 2\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu+\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu+\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Im}^2\mu-\mathrm{Re}^2\nu & \mathrm{Re}^2\mu+\mathrm{Im}^2\nu & -\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu-\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & -\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu-\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu \\
2\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu & -2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & 2\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu & -2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & -\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\nu+\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}^2\mu+\mathrm{Im}^2\nu & \mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu-\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu-\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}^2\mu+\mathrm{Re}^2\nu & \mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu-\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu \\
2\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu & -2\mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\nu & 2\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\mu & -2\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Re}^2\nu+\mathrm{Im}^2\nu & \mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu+\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Re}\mu-\mathrm{Im}\mu\,\mathrm{Im}\nu & \mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Im}\mu-\mathrm{Re}\mu\,\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\nu\,\mathrm{Re}\mu+\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\mu & \mathrm{Re}^2\mu-\mathrm{Im}^2\mu
\end{pmatrix} \quad (14)
$$

Теперь, следуя работе /1/, мы можем формально записать $\Delta^2 X(t)$ как функцию времени и начальных условий $\Delta X^2(t_0)$ следующим образом. Предположим, что временная эволюция $\Delta Y^2(t)$ как функция начальных условий $\Delta Y^2(t_0)$ определяется матрицей $U_y(t,t_0)$:

$$\Delta Y^2(t) = U_y(t,t_0)\,\Delta Y^2(t_0)\,. \qquad (15)$$

Поскольку соотношения (12),(13) справедливы для всех моментов времени, то, применяя их к обеим частям равенства (15), получим формальное выражение, определяющее временную эволюцию величин $\Delta X^2(t)$ через матрицы прямого и обратного преобразований к вспомогательным операторам ΔY^2 :

$$\Delta X^2(t) = U_2^{-1}\,U_y(t,t_0)\,U_2\,\Delta X^2(t_0)\,. \qquad (16)$$

3. Явные выражения, определяющие временную эволюцию дисперсий квадратурных компонент

Выберем параметры преобразования Боголюбова (3) в следующем виде /11/:

$$\mu = \mathrm{ch}\,\varphi\,, \quad \nu = \mathrm{sh}\,\varphi\, e^{i\psi}, \qquad (17)$$

где

$$\mathrm{th}\,\varphi = D = \frac{1}{2|f|}\left\{\omega_a + \omega_b - \sqrt{(\omega_a+\omega_b)^2 - 4|f|^2}\right\},$$

$$\psi = \arg f\,. \qquad (18)$$

Поскольку $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$, то преобразование (3) является каноническим: $[A,A^+] = [B,B^+] = 1$, $[A,B] = 0$, а матрицы преобразований U_1 и U_2 унитарными.

Гамильтониан (1) в представлении (17),(18) является диагональным

$$H = \Omega_A A^+A + \Omega_B B^+B + E_0\,, \qquad (19)$$

где

$$\Omega_A = \frac{1}{2}\left\{\omega_a - \omega_b + \sqrt{(\omega_a+\omega_b)^2 - 4|f|^2}\right\},$$

$$\Omega_B = \frac{1}{2}\left\{\omega_b - \omega_a + \sqrt{(\omega_a+\omega_b)^2 - 4|f|^2}\right\},$$

$$E_0 = \frac{D^2}{D^2-1}\sqrt{(\omega_a+\omega_b)^2 - 4|f|^2}\,. \tag{20}$$

Матричные элементы U_2 и U_2^{-1} при данной параметризации выражаются через константы гамильтониана (I) следующими соотношениями:

$$\mathrm{Re}\,\mu = \frac{1}{\sqrt{1-D^2}}, \quad \mathrm{Im}\,\mu = 0,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu = \frac{D\cos\psi}{\sqrt{1-D^2}}, \quad \mathrm{Im}\,\nu = \frac{D\sin\psi}{\sqrt{1-D^2}}\,. \tag{21}$$

Для диагонального гамильтониана (I9) операторы флуктуаций эволюционируют как координаты и импульсы двух невзаимодействующих гармонических осцилляторов:

$$\Delta Y_1(t) = \Delta Y_1(t_0)\cos\Omega_A(t-t_0) + \Delta Y_2(t_0)\sin\Omega_A(t-t_0),$$

$$\Delta Y_2(t) = -\Delta Y_1(t_0)\sin\Omega_A(t-t_0) + \Delta Y_2(t_0)\cos\Omega_A(t-t_0),$$

$$\Delta Y_3(t) = \Delta Y_3(t_0)\cos\Omega_B(t-t_0) + \Delta Y_4(t_0)\sin\Omega_B(t-t_0), \tag{22}$$

$$\Delta Y_4(t) = -\Delta Y_3(t_0)\sin\Omega_B(t-t_0) + \Delta Y_4(t_0)\cos\Omega_B(t-t_0).$$

Используя формулы (22), нетрудно найти матрицу эволюции $U_y(t,t_0)$. Отличные от нуля элементы матрицы $U_y(t,t_0)$ имеют вид:

$$[U_y(t,t_0)]_{1,1} = [U_y(t,t_0)]_{2,2} = 1/2\,(1+\cos 2\Omega_A(t-t_0)),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{1,2} = [U_y(t,t_0)]_{2,1} = 1/2\,(1-\cos 2\Omega_A(t-t_0)),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{1,5} = -[U_y(t,t_0)]_{2,5} = 1/2\,\sin 2\Omega_A(t-t_0), \tag{23}$$

$$[U_y(t,t_0)]_{5,1} = -[U_y(t,t_0)]_{5,2} = -\sin 2\Omega_A(t-t_0),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{5,5} = \cos 2\Omega_A(t-t_0),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{3,3} = [U_y(t,t_0)]_{4,4} = 1/2\,(1+\cos 2\Omega_B(t-t_0)),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{3,4} = [U_y(t,t_0)]_{4,3} = 1/2\,(1-\cos 2\Omega_B(t-t_0)),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{3,10} = -[U_y(t,t_0)]_{4,10} = 1/2\,\sin 2\Omega_B(t-t_0),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{10,3} = -[U_y(t,t_0)]_{10,4} = -\sin 2\Omega_B(t-t_0),$$

$$[U_y(t,t_0)]_{10,10} = \cos 2\Omega_B(t-t_0).$$

Теперь, используя формулы (I2)-(I4), (I6) и (23), мы можем найти окончательные выражения для временной эволюции операторных величин $\Delta x^2(t)$. После громоздких вычислений получаем для дисперсий квадратурных компонент исходных полей $\Delta x^2(t)$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Delta x_1^2(t) = {} & K_0 + K_1\cos 2\Omega_A(t-t_0) + K_2\cos 2\Omega_B(t-t_0)\\ & + K_3\sin 2\Omega_A(t-t_0) + K_4\sin 2\Omega_B(t-t_0)\\ & + K_5\sin(\Omega_A+\Omega_B)(t-t_0) + K_6\sin(\Omega_A-\Omega_B)(t-t_0)\\ & + K_7\cos(\Omega_A+\Omega_B)(t-t_0) + K_7\cos(\Omega_A-\Omega_B)(t-t_0),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}K_0 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\Big\{ & (1+D^4)(\Delta x_1^2(t_0)+\Delta x_2^2(t_0)) + 2D^2(\Delta x_3^2(t_0) +\\ & + \Delta x_4^2(t_0)) + D(1+D^2)(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\\ & + \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_1 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\Big\{ & \Delta x_1^2(t_0) - \Delta x_2^2(t_0) + D^2\cos 2\psi(\Delta x_3^2(t_0) - \Delta x_4^2(t_0))\\ & + D(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\\ & - \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\\ & + D\sin 2\psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\Big\},\end{aligned} \tag{25}$$

$$K_2 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\{D^4(\Delta x_1^2(t_0)+\Delta x_2^2(t_0)) + D^2\cos 2\Psi(\Delta x_3^2(t_0)$$

$$-\Delta x_4^2(t_0)) + D^3(\cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S$$

$$-\sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S)$$

$$+ D^2\sin 2\Psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\},$$

$$K_3 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\{D^2\sin 2\Psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) + (\Delta x_1(t_0)\Delta x_2(t_0))_S$$

$$+ D(\sin\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S$$

$$+ \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S$$

$$- D^2\cos 2\Psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\},$$

$$K_4 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\{-D^2\sin 2\Psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) - D^4(\Delta x_1(t_0)\Delta x_2(t_0))_S$$

$$- D^3(\sin\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S +$$

$$+ \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S)$$

$$+ D^2\cos 2\Psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\},$$

$$K_5 = \frac{D}{2(1-D^2)}\{\sin\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S$$

$$- \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\},$$

$$K_6 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\{-2D^2\sin 2\Psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) - 2D^2(\Delta x_1(t_0)\Delta x_2(t_0))_S$$

$$- D(1+D^2)(\sin\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S$$

$$+ \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S)$$

$$- 2D^2\cos 2\Psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\},$$

$$K_7 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\{-2D^2(\Delta x_1^2(t_0)+\Delta x_2^2(t_0)+\Delta x_3^2(t_0)+\Delta x_4^2(t_0))$$

$$- D(1+D^2)(\cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S$$

$$+ \sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S)\},$$

$$K_8 = \frac{1}{2(1-D^2)^2}\{-2D^2(\Delta x_1^2(t_0)-\Delta x_2^2(t_0)) - 2D^2\cos 2\Psi(\Delta x_3^2(t_0)$$

$$-\Delta x_4^2(t_0)) - D(1+D^2)(\cos\Psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\Psi$$

$$\times(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S - \sin\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S$$

$$+ \cos\Psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S) - 2D^2\sin^2\Psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S\};$$

$$\Delta x_2^2(t) = P_0 + P_1\cos 2\Omega_A(t-t_0) + P_2\cos 2\Omega_B(t-t_0)$$

$$+ P_3\sin 2\Omega_A(t-t_0) + P_4\sin 2\Omega_B(t-t_0) \qquad (26)$$

$$+ P_5\sin(\Omega_A+\Omega_B)(t-t_0) + P_6\sin(\Omega_A-\Omega_B)(t-t_0)$$

$$+ P_7\cos(\Omega_A+\Omega_B)(t-t_0) + P_8\cos(\Omega_A-\Omega_B)(t-t_0),$$

$$
\begin{aligned}
P_0 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & (1+D^4)(\Delta x_1^2(t_0)+\Delta x_2^2(t_0)) + 2D^2(\Delta x_3^2(t_0) \\
& + \Delta x_4^2(t_0)) + D(1+D^2)(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& - \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0)) \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & -\Delta x_1^2(t_0)+\Delta x_2^2(t_0) - D^2\cos 2\psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) \\
& - D(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& - \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& - D^2\sin 2\psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & -D^4(\Delta x_1^2(t_0)-\Delta x_2^2(t_0)) - D^2\cos 2\psi(\Delta x_3^2(t_0) \\
& -\Delta x_4^2(t_0)) - D^3(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& - \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& - D^2\sin 2\psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & -D^2\sin 2\psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) \\
& - (\Delta x_1(t_0)\Delta x_2(t_0))_S - D(\sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& - \cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& + \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S) + D^2\cos 2\psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \},
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

$$
\begin{aligned}
P_4 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & D^2\sin 2\psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) \\
& + D^4(\Delta x_1(t_0)\Delta x_2(t_0))_S + D^3(\sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& - \cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& + \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S) - D^2\cos 2\psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_5 = \frac{D}{2(1-D^2)} \{ & \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& - \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S - \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_6 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & 2D^2\sin 2\psi(\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) + 2D^2 \\
& \times (\Delta x_1(t_0)\Delta x_2(t_0))_S + D(1+D^2)(\sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& - \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& - \cos\psi(\Delta x(t_0)\Delta x_4(t_0))_S) - 2D^2\cos 2\psi(\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_7 = \frac{1}{2(1-D^2)^2} \{ & -2D^2(\Delta x_1^2(t_0)+\Delta x_2^2(t_0)+\Delta x_3^2(t_0)+\Delta x_4^2(t_0)) \\
& - D(1+D^2)(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \\
& + \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S) \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_8 = \frac{1}{2(1-D^2)} \{ & 2D^2(\Delta x_1^2(t_0)-\Delta x_2^2(t_0)) + 2D^2\cos 2\psi \\
& \times (\Delta x_3^2(t_0)-\Delta x_4^2(t_0)) + D(1+D^2)(\cos\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& + \sin\psi(\Delta x_1(t_0)\Delta x_4(t_0))_S - \sin\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_3(t_0))_S \\
& + \cos\psi(\Delta x_2(t_0)\Delta x_4(t_0))_S) + 2D^2\sin 2\psi \\
& \times (\Delta x_3(t_0)\Delta x_4(t_0))_S \}.
\end{aligned}
$$

Здесь использовано обозначение $(\Delta X_i \Delta X_j)_S = \Delta X_i \Delta X_j + \Delta X_j \Delta X_i$. Выражения для $\Delta X_3^2(t)$ и $\Delta X_4^2(t)$ получаются при одновременной замене $\Delta X_1^2(t_0) \leftrightarrow \Delta X_3^2(t_0)$, $\Delta X_2^2(t_0) \leftrightarrow \Delta X_4^2(t_0)$ и $\Omega_A \leftrightarrow \Omega_B$ в выражениях для $\Delta X_1^2(t)$ и $\Delta X_2^2(t)$ соответственно. Мы ограничились явной записью временной эволюции величин $\Delta X_i^2(t)$ и не привели выражений для $(\Delta X_i(t) \Delta X_j(t))_S$ $(i \neq j)$, также вычисленных нами, ввиду чрезмерной громоздкости указанных формул. Вычисление этих величин мы предоставляем заинтересованному читателю, необходимые соотношения (I2),(I6) и (23) нами приведены.

4. О невозможности стационарного сжатия в квадратурах исходных полей

Полученные явные выражения (24)-(27) для временной эволюции дисперсий квадратурных компонент $\Delta X^2(t)$ могут быть использованы для строгого исследования вопроса о возможности стационарного сжатия исходных полей в рамках рассматриваемой модели. Стационарное сжатие возможно, если равны нулю коэффициенты K_i, P_i $(i = 1, \ldots, 8)$ при временных функциях в выражениях (24),(26). Однако решение получаемой системы уравнений выглядит сложной задачей. Вместе с тем существует более простой способ нахождения условий стационарности дисперсий квадратурных компонент. Действительно, мы легко можем отыскать начальные условия $\Delta Y^2(t_0)$, определяющие стационарное поведение дисперсий квадратурных компонент вспомогательных полей $\Delta Y^2(t)$, а затем воспользоваться не зависящим от времени преобразованием (I3). В результате получим начальные условия для квадратурных компонент $\Delta X^2(t_0)$, обеспечивающие стационарность поведения дисперсий исходных полей. Уравнения, задающие стационарные начальные условия для вспомогательных полей, легко находятся с помощью формул (22)

$$\Delta Y_2^2(t_0) = \Delta Y_1^2(t_0), \quad \Delta Y_4^2(t_0) = \Delta Y_3^2(t_0),$$
$$(\Delta Y_i(t_0) \Delta Y_j(t_0))_S = 0 \qquad (i \neq j;\ i,j = 1,2,3,4). \tag{28}$$

Теперь, используя преобразование U_2^{-1}, обратное преобразованию (I4), получаем начальные условия, соответствующие стационарной эволюции моментов второго порядка для исходных полей $\Delta X^2(t_0)$:

$$\Delta X_2^2(t_0) = \Delta X_1^2(t_0), \quad \Delta X_4^2(t_0) = \Delta X_3^2(t_0),$$

$$(\Delta X_1(t_0) \Delta X_2(t_0))_S = (\Delta X_3(t_0) \Delta X_4(t_0))_S = 0,$$

$$(\Delta X_1(t_0) \Delta X_3(t_0))_S = -(\Delta X_2(t_0) \Delta X_4(t_0))_S =$$
$$= -\frac{2D\cos\psi}{1+D^2}\left(\Delta X_1^2(t_0) + \Delta X_3^2(t_0)\right),$$

$$(\Delta X_1(t_0) \Delta X_4(t_0))_S = (\Delta X_2(t_0) \Delta X_3(t_0)) =$$
$$= -\frac{2D\sin\psi}{1+D^2}\left(\Delta X_1^2(t_0) + \Delta X_3^2(t_0)\right). \tag{29}$$

В формулах (29) два начальных значения являются произвольными, а все остальные стационарные моменты второго порядка выражаются через выбранные два, например, через $\Delta X_1^2(t_0)$ и $\Delta X_3^2(t_0)$. Анализ указанных соотношений позволяет сделать следующие выводы:

I) Флуктуации дисперсий квадратурных компонент каждого из исходных полей одинаковы при стационарной эволюции. Это означает, что стационарное сжатие в рамках рассматриваемой модели невозможно.

2) В стационарном состоянии отличны от нуля только функции корреляций флуктуаций для разных полей, в то время как для одного и того же поля указанные величины равны нулю. Этот факт обусловлен структурой гамильтониана (I), в котором есть взаимодействие между модами, но нет самодействия внутри мод.

3) В работе /I/ была показана возможность стационарного сжатия в одномодовой модели с двухбозонным самодействием. Из приведенного в данной работе строгого рассмотрения двухмодовой модели с двухбозонным взаимодействием между модами видно, что в случае вырождения мод, т.е. в пределе $\omega_a - \omega_b \to 0$, режим стационарной эволюции дисперсий квадратурных компонент данной модели не совпадает с аналогичным режимом для модели, рассмотренной в /I/, поскольку в первом случае стационарное сжатие невозможно, а во втором оно может иметь место. Таким образом, кроссовер от модели (I) к модели, исследованной в /I/, невозможен, а фактором, определяющим возможность стационарного сжатия, как мы видим из сравнения обеих моделей, является самодействие внутри мод поля.

5. Вместо заключения

Мы провели строгое исследование стационарного режима моментов второго порядка для простейшей микроскопической модели двухбозонного взаимодействия двух мод поля, получив с этой целью выражения, определяющие явную временную эволюцию этих моментов в зависимости от начальных условий. При этом, из сравнения с результатами работы /1/, выявилась роль самодействия внутри мод поля как фактора, определяющего возможность стационарного сжатия. Очевидно, что введение самодействия хотя бы в одну из мод поля приводит к стационарному сжатию в системе. Результаты такого исследования ввиду большого объема вычислений изложены в отдельной работе /12/, где также показан кроссовер к одномодовой модели.

Отдельным является вопрос о явной параметризации константами гамильтониана волновых функций, реализующих стационарное сжатие. Для одномодовой модели такая параметризация найдена в /13/, а для двухмодовой модели с самодействием внутри мод в /12/.

Литература

1. А.А. Бакасов. Препринт ОИЯИ Р17-89-503, Дубна, 1989, 10 с; Phys. Lett. A (to be published).
2. D.F. Walls. Nature 306 (1983) 141.
3. J. Opt. Soc. Am. B4 (1987) No 10.
4. J. Mod Opt. 34 (1987) No 6, 7.
5. J.L. Birman. Theory of the crystal space groups and infra - red and Raman lattice processes of insulating crystals (Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1974).
6. А.А. Бакасов. Генерация сжатого фотон-фононного состояния и возможные принципы его регистрации по спектральным характеристикам электромагнитного поля. Сборник аннотаций У международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики, ОИЯИ, Д17-89-535, Дубна, 1989.
7. N.M. Nieto and V.P. Gutschick. Phys. Rev., D23, (1981) 922.
8. C. Gerry. Phys. Rev., A35, (1987) 2146.
9. M.J. Collet and C.W. Gardiner. Phys. Rev., A30 (1984) 1386.
10. В.В. Додонов, В.И. Манько. Труды ФИАН, т. 183, 1987, 1-288.
11. N.N. Bogolubov. J. Phys. USSR, 11 (1947) 92.
12. A.A. Bakasov, E.K. Bashkirov, Phys. Lett. A (to be published).
13. A.A. Bakasov, Phys. Lett. A (to be published).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 ноября 1989 года.