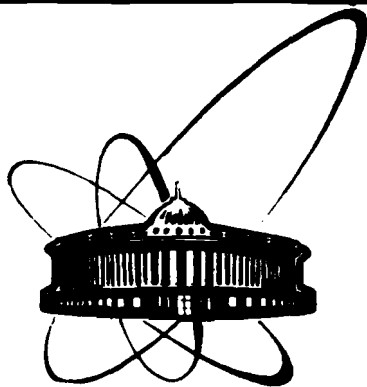


89-697



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Б 19

P17-89-697

А. А. Бакасов, Б. М. Нарбаев*

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОГО
СЖАТОГО СОСТОЯНИЯ
В СХЕМЕ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО СМЕШЕНИЯ

Направлено в журнал "Europhysics Letters"

*Московский инженерно-физический институт

1989

Теоретическому изучению генерации сжатого состояния в процессе смешивания волн было посвящено значительное число работ [1-5]. Хольм и др. [4] с помощью метода, развитого ими же в работах [6,7], описали генерацию сжатого состояния в процессе четырехволнового смешения и получили хорошую степень согласия с экспериментом Слэшера и др. [8]. Однако важный вопрос об устойчивости решений, описывающих динамику сжатия, остался открытым. В самом деле, повторяемость эффекта в экспериментах свидетельствует об устойчивости тех решений динамической модели, которые его описывают. Поэтому целью настоящей работы является исследование динамического сжатия в модели Хольма и др. [4] для выяснения качественной согласованности модели и эксперимента.

Гамильтониан модели в представлении взаимодействия, в приближении вращающейся волны, имеет вид [4]

$$H = (\omega - \nu_2) \bar{b}_z - \Delta (a_1^{\dagger} a_1 - a_3^{\dagger} a_3) + [\sqrt{2} U_2 \bar{b}_z^{\dagger} + g \bar{b}_z^{\dagger} (a_1 U_1 + a_3 U_3) + \text{в.с.}] . \quad (1)$$

В этом выражении a_j , a_j^{\dagger} являются операторами уничтожения и рождения соответственно для j -й моды поля; ν_1 , ν_2 , ν_3 - частоты электромагнитного поля, произвольно отстроенные от атомного резонанса ω . Частоты ν_1 и ν_3 расположены симметрично относительно ν_2 . Далее, $U_j = U_j(\epsilon)$ - соответствующий пространственный фактор моды, $\Delta = \nu_2 - \nu_1$; g - константа связи атом-поле и $\sqrt{2} = -\rho \bar{\epsilon}_2 / 2\hbar$, где ρ является матричным элементом дипольного момента атома, а $\bar{\epsilon}_2$ - амплитуда моды 2, которая рассматривается классически. Операторы \bar{b}_z и \bar{b}_z^{\dagger} описывают атомы:

$$\bar{b}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_z^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_z^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Следуя [4], рассмотрим уравнение для оператора матрицы плотности поля:

$$\dot{\rho} = -A_1(\rho a_1 a_1^\dagger - a_1^\dagger \rho a_1) - B_1(a_1^\dagger a_1 \rho - a_1 \rho a_1^\dagger) + C_1(a_1^\dagger a_3^\dagger \rho - a_3^\dagger \rho a_1^\dagger) + \mathbb{D}_1(\rho a_3^\dagger a_3^\dagger - a_3^\dagger \rho a_3^\dagger) + [(1 \leftrightarrow 3) + (\text{э. с.})], \quad (3)$$

где коэффициенты A_1 , B_1 , C_1 и \mathbb{D}_1 задаются выражениями

$$A_1 = \frac{Ng^2 D_1}{1 + I_2 \mathcal{L}_2} \left\{ \frac{I_2 \mathcal{L}_2}{2} - \frac{I_2 \mathcal{F} \mathcal{F}^* \left(\frac{I_2 \mathcal{L}_2}{2} D_1 - D_2^* (1 + \Gamma/i\Delta)/2 \right)}{1 + I_2 \mathcal{F} \frac{\mathcal{F}}{2} (D_1 + D_3^*)} \right\}, \quad (4)$$

$$B_1 = \frac{Ng^2 D_1}{1 + I_2 \mathcal{L}_2} \left\{ \mathbb{D}_1 + \frac{I_2 \mathcal{L}_2}{2} - \frac{I_2 \mathcal{F} \mathcal{F}^* \left[(1 + I_2 \mathcal{L}_2/2) D_1 + D_2^* (1 - \Gamma/i\Delta)/2 \right]}{1 + I_2 \mathcal{F} \frac{\mathcal{F}}{2} (D_1 + D_3^*)} \right\}, \quad (5)$$

$$C_1 = -\frac{Ng^2 D_1}{1 + I_2 \mathcal{L}_2} \frac{U_1^* U_3}{U_1^* U_3} \frac{2\Gamma^2 \mathcal{V}_2^* \mathcal{F} \left[\frac{I_2 \mathcal{L}_2}{2} D_3^* - D_2 (1 + \Gamma/i\Delta)/2 \right]}{1 + I_2 \mathcal{F} \frac{\mathcal{F}}{2} (D_1 + D_3^*)}, \quad (6)$$

$$\mathbb{D}_1 = -\frac{Ng^2 D_1}{1 + I_2 \mathcal{L}_2} \frac{U_1^* U_3}{U_1^* U_3} \frac{2\Gamma^2 \mathcal{V}_2^* \mathcal{F} \left[(1 + I_2 \mathcal{L}_2/2) D_3^* + D_2 (1 - \Gamma/i\Delta)/2 \right]}{1 + I_2 \mathcal{F} \frac{\mathcal{F}}{2} (D_1 + D_3^*)}, \quad (7)$$

здесь $D_n = [\gamma + i(\omega - \nu_n)]^{-1}$, $\mathcal{L}_n = \gamma^2 / [\gamma^2 + (\omega - \nu_n)^2]$, $I_2 = 4|V_2|^2 \Gamma^{-1} \gamma^{-1}$ - безразмерная интенсивность классического поля, $\mathcal{F} = \Gamma / (\Gamma + i\Delta)$ и N - полное число атомов.

Рассмотрим линейную суперпозицию крайних компонент 1 и 3:

$$d = 2^{-\frac{1}{2}} (a_1 + a_3) e^{i\theta}, \quad (8)$$

где θ - фазовый сдвиг локального осциллятора.

Операторы квадратур поля и дисперсии имеют вид

$$d_1 = \frac{1}{2} (d + d^\dagger), \quad d_2 = \frac{1}{2i} (d - d^\dagger), \quad (9)$$

$$\langle \Delta d_i^2 \rangle = \langle d_i^2 \rangle - \langle d_i \rangle^2, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в (10), имеем

$$\langle \Delta d_i^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} [\langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_3^\dagger a_3 \rangle + \langle a_1 a_3 \rangle e^{2i\theta} + \text{к. с.}]. \quad (11)$$

Как видно, дисперсия $\langle \Delta d_i^2 \rangle$ является линейной функцией средних $\langle a_1 a_3 \rangle$, $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle$, $\langle a_3^\dagger a_3 \rangle$ и $\langle a_1^\dagger a_3 \rangle$. С помощью уравнения (3) получим для них уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \langle a_1^\dagger a_1 \rangle = (A_1 + A_1^* - B_1 - B_1^* - \frac{\nu}{Q}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + (C_1 - \mathbb{D}_1) \langle a_3^\dagger a_3^\dagger \rangle + (C_1^* - \mathbb{D}_1^*) \langle a_3 a_1 \rangle + A_1 + A_1^*, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \langle a_3 a_1 \rangle = (A_1 + A_3 - B_1 - B_3 - \frac{\nu}{Q} - 2i\Delta\Omega) \langle a_3 a_1 \rangle + (C_1 - \mathbb{D}_1) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle + (C_3 - \mathbb{D}_3) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + C_1 + C_3. \quad (13)$$

Уравнения для $\langle a_3^\dagger a_3 \rangle$ и $\langle a_1^\dagger a_3^\dagger \rangle$ получаются заменой $1 \leftrightarrow 3$ в уравнении (12) и комплексным сопряжением уравнения (13). Здесь, как и в работе [4], ν/Q - величина, учитывающая потери в резонаторе, а $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{V}_2$ является расстройкой моды резонатора от моды поля 2.

Для дальнейшего исследования этой системы линейных уравнений удобно перейти к действительным величинам. Определим новые переменные и коэффициенты:

$$y_1 = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle, \quad y_2 = \langle a_3^\dagger a_3 \rangle, \quad y_3 = \langle a_3 a_1 \rangle + \langle a_1^\dagger a_3^\dagger \rangle, \quad iy_4 = \langle a_1 a_3 \rangle - \langle a_3^\dagger a_1^\dagger \rangle, \quad (14)$$

$$d_n = B_n - A_n + \nu/2Q + i\Delta\Omega, \quad \gamma_n = C_n - \mathbb{D}_n. \quad (15)$$

Тогда исследуемая система уравнений примет вид

$$\dot{Y} = FY + Z, \quad (16)$$

где $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $Z = \{2 \operatorname{Re} \lambda_1, 2 \operatorname{Re} \lambda_3, 2 \operatorname{Re} (d_1 + d_3), 2 \operatorname{Im} (d_1 + d_3)\}$,

$$F = \begin{pmatrix} -2 \operatorname{Re} d_1 & 0 & \operatorname{Re} X_1 & \operatorname{Im} X_1 \\ 0 & -2 \operatorname{Re} d_3 & \operatorname{Re} X_3 & \operatorname{Im} X_3 \\ 2 \operatorname{Re} X_3 & 2 \operatorname{Re} X_1 & -\operatorname{Re} (d_1 + d_3) & \operatorname{Im} (d_1 + d_3) \\ 2 \operatorname{Im} X_3 & 2 \operatorname{Im} X_1 & -\operatorname{Im} (d_1 + d_3) & -\operatorname{Re} (d_1 + d_3) \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение матрицы линейной системы (16) имеет вид

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0, \quad (17)$$

где $b_1 = 4 \operatorname{Re} (d_1 + d_3)$, $b_2 = 4 \operatorname{Re}^2 (d_1 + d_3) + E$, $b_3 = 2 \operatorname{Re} (d_1 + d_3) \cdot E$, $b_4 = 4 \operatorname{Re} d_1 \operatorname{Re} d_3 E - \delta$,

$$E = \operatorname{Re}^2 (d_1 + d_3) + \operatorname{Im}^2 (d_1 + d_3) + 4 \operatorname{Re} d_1 \operatorname{Re} d_3 - 4 \operatorname{Re} X_1 \operatorname{Re} X_3 - 4 \operatorname{Im} X_1 \operatorname{Im} X_3,$$

$$\delta = 4 \operatorname{Re}^2 (d_1 - d_3) [\operatorname{Re} X_1 \operatorname{Re} X_3 + \operatorname{Im} X_1 \operatorname{Im} X_3] + 4 [\operatorname{Re} X_1 \operatorname{Im} X_3 - \operatorname{Re} X_3 \operatorname{Im} X_1]^2 + \\ + 16 \operatorname{Re}^2 d_1 \operatorname{Re}^2 d_3 - 4 \operatorname{Re} (d_1 - d_3) \operatorname{Im} (d_1 + d_3) [\operatorname{Re} X_1 \operatorname{Im} X_3 - \operatorname{Re} X_3 \operatorname{Im} X_1]. \quad (18)$$

Решения уравнения (16) асимптотически устойчивы, если вещественный многочлен (17) имеет корни только с отрицательными вещественными частями, для чего необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства (критерий Рауса-Гурвица [11])

$$T_1 > 0, T_2 > 0, T_3 > 0, T_4 > 0, \quad (19)$$

где T_i ($i = 1, 4$) - миноры Гурвица,

$$T_1 = 4 \operatorname{Re} (d_1 + d_3), \quad T_2 = 2 \operatorname{Re} (d_1 + d_3) [\delta \operatorname{Re}^2 (d_1 + d_3) + E], \\ T_3 = 4 \operatorname{Re}^2 (d_1 + d_3) E^2 + 16 \operatorname{Re}^2 (d_1 + d_3) [\delta + 2E (\operatorname{Re}^2 d_1 + \operatorname{Re}^2 d_3)], \\ T_4 = T_3 \cdot [4 \operatorname{Re} d_1 \operatorname{Re} d_3 E - \delta]. \quad (20)$$

В эксперименте Сламера и др. [8] при высокой интенсивности накачки I_2 из-за большой отстройки накачиваемой моды 2 от атомного резонанса процесс генерации осуществлялся в режиме ненасыщения. Это значит, что выражения для коэффициентов в формулах (4)-(7) могут быть заменены соответствующими линейными по I_2 членами:

$$\operatorname{Re} X_1 = N g^2 I_2 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 \frac{1}{\gamma^2} (\Delta_3^2 - 2 \Delta_1^2 + \gamma^2), \quad \operatorname{Im} X_1 = N g^2 I_2 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 \frac{1}{\gamma^2} [\gamma^2 (-\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3) - \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3], \quad (21)$$

$$\operatorname{Re} d_1 = \sqrt{2} Q + N g^2 \frac{\varphi_1 \varphi_3}{\gamma^2} [1 - I_2 \varphi_2 (1 + \varphi_1 + \varphi_1 \frac{\Delta_1 \Delta_3}{\gamma^2})], \quad \operatorname{Im} d_1 = \Delta \Omega + N g^2 [-\frac{\varphi_1 \Delta_1}{\gamma^2} (1 - I_2 \varphi_2) - \\ - I_2 \varphi_2 \frac{1}{\gamma^2} \varphi_1^2 (\Delta_2 (\gamma^2 - \Delta_1^2) - 2 \gamma^2 \Delta_1)],$$

где $\Delta_i = \omega - \nu_i < 0$, выражения для коэффициентов $\operatorname{Re} X_3$,

$\operatorname{Im} X_3$, $\operatorname{Re} d_3$, $\operatorname{Im} d_3$ получаются из (21) заменой $1 \leftrightarrow 3$.

Видно, что $\operatorname{Re} X_1$, $\operatorname{Im} X_1$, $\operatorname{Im} X_3$, $\operatorname{Re} d_3$, $\operatorname{Im} (d_1 + d_3)$ являются положительными величинами. Что касается величин $\operatorname{Re} X_3$,

$\operatorname{Re} d_1$, то они могут при некоторых значениях Δ_1 и Δ_3 принимать и отрицательные значения. Мы ограничимся здесь областью параметров, определяемой условием $\operatorname{Re} d_1 > 0$. Можно убедиться также в том, что $\delta > 0$. Из вышесказанного следует, что все миноры Гурвица уравнения (17) положительны при $b_4 =$

$= 4 \operatorname{Re} d_1 \operatorname{Re} d_3 E - |\delta| > 0$. Тогда в рассмотренной области параметров, которая, как считается [4, 9, 10], соответствует эксперименту [8], тривиальное решение системы (16) асимптотически устойчиво. Из теоремы об устойчивости решений линейных систем [12] следует, что все решения динамической системы (16) асимптотически устойчивы и ограничены. Следовательно, их решение, соответствующее динамическому состоянию в рамках данной модели, асимптотически устойчиво и ограничено, а поэтому сжатие не может достигать 100%.

Следующий вопрос, который мы рассмотрим, - может ли в какой-либо области параметров системы происходить бифуркация

рождения цикла из стационарного решения, т.е. возможна ли генерация скачтия при многочастотной эволюции дисперсии. Необходимым условием этого является прохождение через нуль действительной части какого-либо комплексного корня уравнения (17). Число корней с положительной действительной частью равно числу перемен знака в последовательности (теорема Рауса-Гурвица [11])

$$1, T_1, T_1 T_2, T_2 T_3, v_4, \text{ где } T_3 = v_3 T_2 - v_4 v_1^2. \quad (22)$$

Любой комплексный корень уравнения (17) имеет сопряженный, их действительные части равны, т.е. если действительная часть какого-либо комплексного корня проходит через нуль, то число перемен знака, которое обозначим через K , должно быть больше или равно двум. Если же $K < 2$, то необходимое условие бифуркации рождения цикла не выполняется.

Покажем, что в области параметров

$$Re d_1 > 0, \quad I_2 L_2 \ll 1 \quad (23)$$

число $K < 2$.

Из формул (18), (20) и (22) видно, что в области параметров (23) могут выполняться только следующие неравенства, однозначно определяющие знаки в последовательности (22), а следовательно, и число K :

$$\begin{aligned} &v_4 > 0, \quad v_3 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0, \\ &v_4 < 0, \quad v_3 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0, \\ &v_4 < 0, \quad v_3 < 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0 \quad \text{или} \quad T_3 < 0, \quad (24) \\ &v_4 < 0, \quad v_3 < 0, \quad T_2 < 0, \quad T_3 > 0. \end{aligned}$$

Из (22) и (24) следует, что возможны пять последовательностей знаков и соответствующих чисел их перемен:

- I. +, +, +, +, +, $K = 0$,
- II. +, +, +, +, -, $K = 1$,
- III. +, +, +, +, -, если $T_3 > 0$, $K = 1$,
- IV. +, +, +, -, -, если $T_3 < 0$, $K = 1$,
- V. +, +, -, -, -, $K = 1$.

Таким образом, найдено, что в области параметров (23) в системе отсутствуют режимы пиковой генерации скачкового состояния.

Литература

1. Bondurant R.S., Kumar P. et al. Phys.Rev., 1984, v.A30, p.343.
2. Reid M.D., Walls D.F., Dalton B.J. Phys.Rev.Lett., 1985, v.55, p.1288.
3. Klauder J.R., McCall S.L., Yuske B. Phys.Rev., 1986, v.A33, p.3204.
4. Holm D.A. and Sargent III M. Phys.Rev., 1987, v.A35, p.2150.
5. Holm D.A., Sargent III M., Carpon B.A. Opt.Lett., v.11, 1986, p.443.
6. Sargent III M., Holm D.A. and Zubairy M.S. Phys.Rev., v.A31, 1985, p.3112.
7. Stenholm S., Holm D.A. and Sargent III M. Phys.Rev., v.A31, 1985, p.3124.
8. Slusher R.E., Hollberg L.W. et al. Phys.Rev.Lett., v.A55, 1985, p.2409.
9. J.Opt.Soc.Am., v.B4, 1987, No.4 (special issue).
10. J.Mod.Opt., v.34, 1987, No.6/7 (special issue).
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1989 года.