сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

У 18

Р17-89-597

Л.В.Уварова, В.К.Федянин

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ C(1,3)

1989

В работах [1-4] получены классы точных решений уравнений Максвелла в нелинейных материальных средах, диэлектрическая проницаемость которых зависит от электрического поля по закону

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha |\vec{E}|^2 .$$

В настоящее время имеет место известный произвол в выборе материальных уравнений среды. В работе [5] делается попытка предложить правила отбора таких уравнений: предлагается выбирать такие уравнения материальной среды, для которых уравнения Максвелла, записанные в тензорной форме, оказываются инвариантными относительно тех же групповых преобразований, что и при рассмотрении вакуума. Для группы конформных преобразований C/1,3/ были, в частности, получены следующие уравнения материальной среды

$$\vec{D} = \left(\frac{\mu_0 \vec{H}^2}{\mu_0 \vec{E}^2 - \vec{E}\vec{H}}\right)^{1/2} \vec{E}, \quad \vec{B} = \left(\frac{\mu_0 \vec{E}^2 - \vec{E}\vec{H}}{\mu_0 \vec{H}^2}\right)^{1/2} \vec{H}, \qquad /0.1/$$

где μ_0 - магнитная проницаемость среды.

Будем полагать, что поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ квазистационарны. В этом случае для амплитуд электрического и магнитного полей имеют место следующие уравнения

$$\Delta\vec{E}_i + k^2\delta_i(E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}, H_{1i}, H_{2i}, H_{3i})\vec{E}_i = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}_i) + \nabla k_{2i} \times \vec{H}_i,$$

$$\Delta\vec{H}_i + k^2\delta_i(E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}, H_{1i}, H_{2i}, H_{3i})\vec{H}_i = \nabla(\nabla\cdot\vec{H}_i) + \nabla k_{1i} \times \vec{E}_i,$$

$$\nabla\cdot(k_{1i}\vec{E}_i) = 0, \qquad /0.4/$$

$$\nabla\cdot(k_{2i}\vec{H}_i) = 0, \qquad /0.5/$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \ k_{2i} = \frac{i\omega}{c\epsilon_i}, \ k_{1i} = \frac{i\omega}{c}\left(\epsilon_i + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega}\right),$$

$$\delta_i = 1 + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega\epsilon_i}, \quad \epsilon_i = \left(\frac{\mu_{oi}\vec{H}_i^2}{\mu_{oi}\vec{E}_i^2 - \vec{E}_i\vec{H}_i}\right)^{1/2}, \ i = 1,2$$

/здесь мы будем рассматривать сопряженную задачу для систем с различной геометрией/.

Получим различные классы частных точных решений системы /0.2/-/0.5/, налагая дополнительные условия

$$\delta_i = \text{const} = d_i. \qquad /0.6/$$

1. Прямоугольная система координат /куб в кубе/. Решения имеют вид

$$E_{ij} = A_{ij}\, e^{i\vec{\kappa}\vec{r}}, \quad H_{ij} = B_{ij}\, e^{i\vec{\kappa}\vec{r}}, \ j = x, y, z, \ \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = k^2 d.$$

Из условий равенства тангенциальных составляющих на границе раздела и условий калибровки получим

$$\vec{A}_i\vec{\kappa}_i = 0, \ \vec{B}_i\vec{\kappa}_i = 0, \ A_{1x}^2 = A_{1y}^2 = A_{2x}^2 + A_{2y}^2, \ B_{1x}^2 + B_{1y}^2 = B_{2x}^2 + B_{2y}^2.$$

Из /0.6/ получим $d_1 = d_2 = d$,

$$d = 1 \pm \frac{i4\pi\sigma_i(\omega)}{\omega}(\mu_{oi}(A_{ix}^2 + A_{iy}^2 + A_{iz}^2) - (B_{ix}A_{ix} + B_{iy}A_{iy} + B_{iz}A_{iz})^{1/2}(\mu_{oi}(B_{ix}^2 + B_{iy}^2 + B_{iz}^2))^{-1/2} = \text{idem}. \qquad /1.1/$$

Из /1.1/, в частности, следует, что при условии

$$\mu_{oi}(A_{ix}^2 + A_{iy}^2 + A_{iz}^2) \le B_{ix}A_{ix} + B_{iy}A_{iy} + B_{iz}A_{iz} \qquad /1.2/$$

величина d вещественна. Таким образом, при специальном подборе амплитуд электрического и магнитного вектора падающей волны в нелинейной среде электромагнитная волна будет распространяться, как в среде без поглощения. В частности, одна из сред /из которой приходит волна/ может быть линейной с заданным комплексным коэффициентом преломления $\hat{n}$. При вещественном $\hat{n}$ и выполнении неравенства /1.2/ в нелинейной среде поглощение будет отсутствовать, хотя и $\sigma \ne 0$. По существу полученные решения позволяют моделировать эффект Маркуса. Если в /1.2/ выполняется знак равенства, то уравнение $\sigma(\omega) = n(\omega)$ является уравнением для определения подходящей частоты $\omega = \omega_*$, при которой возможна реализация описанной физической ситуации: исчезновение поглощения в поглощающей среде. Если /1.2/ не выполняется, а амплитуды вещественны, то коэффициент поглощения среды будет уменьшаться в результате действия нелинейных механизмов при выполнении неравенства

$$\mu_{oi}\vec{A}_i < \mu_{oi}\vec{B}_i^2 + \vec{B}_i\vec{A}_i;$$

В противном случае поглощение нелинейной среды будет увеличиваться.

2. Прямоугольная система координат, одномерный случай /задача Броера [6]/.

Полагаем, что полупространство $z > 0$ заполняет нелинейная среда, в которую нормально падает электромагнитная волна из линейной среды, заполняющей полупространство $z < 0$. В этом случае

$$E_{ix} = E_{iy} = 0, \ H_{iy} = H_{iz} = 0, \ E_{iy} = E_i(z), \ H_{ix} = H_i = H_i(z).$$

Для простоты полагаем, что пространство $z < 0$ заполняет вакуум. Решение имеет вид

$$E_1 = A_1 e^{ik\sqrt{d}\,z}, \quad H_1 = B_1 e^{ik\sqrt{d}\,z}, \quad z > 0,$$

$$E_2 = A_2 e^{ikz}, \quad H_2 = B_2 e^{ikz}, \quad z < 0,$$

$$A_1 = A_2(1 - f_r), \quad B_1 = B_2(1 - f_r),$$

$$d = 1 \pm i\frac{4\pi\sigma_1\sqrt{A_2}}{\omega B_2\sqrt{\mu_{01}}}(\mu_{01}A_2 - B_2)^{1/2},$$

где f_r - коэффициент отражения. При условии $\mu_{01}A_2 = B_2$ электромагнитная волна распространяется в нелинейной среде так же, как и в вакууме, что является отражением общегрупповых свойств данной среды и вакуума. При $B_2 > \mu_{01}A_2$ получим действительный параметр

$$d = 1 \mp \frac{4\pi\sigma_1\sqrt{A_2}}{\sqrt{\mu_{01}}\,B_2}(B_2 - \mu_{01}A_2)^{1/2} .$$

Вместе с тем $k\sqrt{d}$ играет роль волнового числа, $k\sqrt{d} = \kappa$. Тогда $d = \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}$. Приравнивая два выражения для d, получим следующее дисперсионное соотношение

$$\kappa_i = \frac{\omega}{c}\left(1 \mp \frac{4\pi\sigma_i\sqrt{A_2}}{\omega\sqrt{\mu_{0i}}\,B_2}(B_2 - \mu_{0i}A_2)\right)^{1/2}, \quad i = 1,2. \qquad /2.1/$$

Из /2.1/ следует, что при $B_2 > \mu_{02}A_2$ среда является дисперсионной. Можно рассмотреть и две нелинейных среды. В этом случае при условии $B > \mu_{02}A_2$ получим два различных закона дисперсии

$$\kappa_i = \frac{\omega}{c}\left(1 \mp \frac{4\pi\sigma_i\sqrt{A_2}}{\omega\sqrt{\mu_{0i}}\,B_2}(B_2 - \mu_{0i}A_2)^{1/2}\right)^{1/2}, \quad i = 1,2. \qquad /2.2/$$

Приведем еще решения для пластинки /без учета дифракционных эффектов/:

$$E_i = \begin{cases} A_3 e^{ik\sqrt{d_3}z}, & z < -\ell, \\ A_2 e^{ik\sqrt{d_2}z}, & |z| \le \ell, \\ A_1 e^{ik\sqrt{d_1}z}, & z > \ell, \end{cases} \qquad /2.3/$$

где

$$A_2 = A_3(1 - f_{r_2})e^{ik(\sqrt{d_2} - \sqrt{d_3})\ell},$$

$$A_1 = A_3(1 - f_{r_2})(1 - f_{r_1})e^{ik(-\sqrt{d_3} + 2\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1})\ell} \qquad /2.4/$$

Величины H_i получаются из /2.3/-/2.4/ путем соответствующих замен A_i на B_i, i = 1,2,3. Поскольку d_i зависят от частоты, то и амплитуды зависят от ω более сложным образом, чем закон A_i (или B_i) $\sim e^{i\omega\ell/c}$, характерный для линейных сред. Пусть для определенности в формуле для d_i берется знак "минус". Тогда при выполнении неравенства $\mathrm{Im}(\sqrt{d_3}) > \mathrm{Im}(\sqrt{d_2})$ амплитуда в пластинке будет возрастать. Тот же эффект будет иметь место, если в первой нелинейной среде выполнено неравенство

$$\mathrm{Im}(\sqrt{d_3} + \sqrt{d_1}) > \mathrm{Im}(2\sqrt{d_2}).$$

3. Взаимодействие плоской монохроматической электромагнитной волны с цилиндром или шаром.

Предварительно заметим, что в системе /0.2/-/0.5/ при условии /0.7/ уравнения для электрического и магнитного векторов совпадают с точностью до обозначений. Поэтому любые отдельные гармоники, удовлетворяющие /0.2/-/0.5/, с равным по модулю амплитудами для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут удовлетворять и /0.7/. При этом величины d_i оказываются равными

$$d_i = 1 \pm i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega\sqrt{\mu_{0i}}}(\mu_{0i} - 1)^{1/2}, \qquad /3.1/$$

Из /3.1/ следует, что при $\mu_{0i} > 1$ электромагнитная волна будет поглощаться в среде, а при $\mu_{0i} \le 1$ - распространяться без поглощения. Таким образом, наличие магнитной проницаемости приводит к уменьшению поглощательной способности среды /$\mu_{0i} > 1$/ вплоть до полного ее исчезновения /$\mu_{0i} \le 1$/.

Можно найти и класс точных решений данной системы, в котором амплитуды $\vec{E}$ и $\vec{H}$ различны. Такая ситуация реализуется при рассмотрении двух соосных цилиндров, если компоненты векторов зависят только от r. Решения имеют вид

$$E_{iz} = A_i J_1(k\sqrt{d_i}\,r), \quad H_{i\phi} = B_i J_1(k\sqrt{d_i}\,r),$$

$$A_1 = A_2(1 - f_r)J_1(k\sqrt{d_2}R)/J_1(k\sqrt{d_1}R),$$

$$B_1 = B_2(1 - f_r)J_1(k\sqrt{d_2}R)/J_1(k\sqrt{d_1}R).$$

Значения d_1, d_2 определяются так же,как и в прямоугольной системе координат. Через $I_n(x)$ обозначена функция Бесселя порядка n.

Рассмотрим далее падение на шар или цилиндр плоской монохроматической волны $E_x = e^{-ikz}$, $H_y = e^{-iky}$. Решение для рассеянной и поглощенной волны шаром и цилиндром, полученное для линейных сред, представляет собой довольно громоздкие ряды [7-9].

В общем случае, с помощью этих рядов не удается удовлетворить условию /0.7/. Представляет, однако, интерес рассмотерть приближенные решения. Пусть окружающая шар или цилиндр среда обладает нелинейными свойствами. Тогда для падающей волны запишем

$$E_x = e^{-ik\sqrt{d_2}z}, \quad H_y = e^{-ik\sqrt{d_2}z}.$$

Такие выражения удовлетворяют системе /0,2/-/0.5/, /0,7/. Вдали от шара, используя линейную теорию Ми[8], запишем следующие асимптотические формулы

$$E_\theta = H_\phi = -\frac{i}{k\sqrt{d_2}\,r}e^{-ik\sqrt{d_2}r}S_1(\theta)\cos\phi, \qquad /3.2/$$

$$H_\theta = E_\phi = -\frac{i}{k\sqrt{d_2}\,r}e^{-ik\sqrt{d_2}r}S_2(\theta)\sin\phi, \qquad /3.3/$$

где

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}(a_n\pi_n(\cos\theta) + b_n\tau_n(\cos\theta)),$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}(b_n\pi_n(\cos\theta) + a_n\tau_n(\cos\theta)),$$

$$\pi_n = (\sin\theta)^{-1}P_n^{(1)}(\cos\theta), \quad \tau_n = (P_n^{(1)})(\cos\theta))'_\theta,$$

$$a_n = (\psi_n'(y)\psi_n(x) - \bar{d}\psi_n(y)\psi_n'(x))(\psi_n'(y)\xi_n(x) - \bar{d}\psi_n(y)\xi_n'(x))^{-1},$$

$$b_n = (\bar{d}\psi_n'(y)\psi_n(x) - \psi_n(y)\psi_n'(x))(\bar{d}\psi_n'(y)\xi_n(x) - \psi_n(y)\xi_n'(x))^{-1},$$

$$x = \frac{2\pi R}{\lambda}, \quad y = \bar{d}\frac{2\pi R}{\lambda}, \quad \bar{d} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$$

/индекс "1" относится к шару/, R - радиус шара, λ - длина падающей волны,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{n+1/2}(x), \quad \xi_n(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}}H^{(1)}_{n+1/2}(x), \quad H^{(1)}_{n+1/2}(x)$$

- функция Хенкеля первого рода соответствующего порядка,

$$d_1 = n_1 + i\frac{4\pi\sigma_1}{\omega} = \hat{n}.$$

Компоненты H_r, E_r стремятся к нулю при $r\to\infty$ быстрее, чем $\frac{1}{r}$.

Подобные же формулы, позволяющие одинаковым образом выразить на асимптотике E_ρ и H_ϕ, E_ϕ и H_ρ, можно записать и для цилиндра. Как видно из /3.2/-/3.3/, такие решения удовлетворяют системе /0.2/-/0.5/ с дополнительным условием /0.7/. При этом величина d_2 определяется согласно /3.1/. Таким образом,

$$\bar{d} = \frac{d_1}{1 \pm \frac{4\pi\sigma_2}{\omega\sqrt{\mu_{02}}}\sqrt{1-\mu_{02}}}, \quad \mu_{02} \le 1. \qquad /3.4/$$

При обращении знаменателей коэффициентов a_n, b_n в ноль возникает влияние резонанса. Резкие резонансы, возникающие при $x \ll 1$, определяются из условий

$$\psi_{n-1}\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\bar{d}\right) \simeq 0. \qquad /3.5/$$

Поскольку зависимость $\bar{d}(\omega)$ в данном случае отличается от соответствующей зависимости, имеющей место в линейной задаче, то из /3.5/ следует, что нелинейные свойства среды существенно влияют на величины резонансных частот. В частности, при рассмотрении материальных уравнений среды вида /0.1/ на значения резонансных частот влияет магнитная проницаемость среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fedyanin V.K., Mihalache D. - Z.Phys.B, 1982, 47, p.167.
2. Михалаке Д., Федянин В.К. - ТМФ, 1983, 54, 3, с.443.
3. Mihalache D., Nazmitdinov R.O., Fedyanin V.K. - Phys. Scr., 1984, 29, p.269; ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.1, с.198.
4. Уварова Л.А. - Препринт ОИЯИ Р17-87-693, Дубна, 1987.
5. Фущич В.И., Цифра И.М. - ТМФ, 1985, 64, № 1, с.41.
6. Бломберген Н. - Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
7. Борн М., Вольф Э. - Основы оптики. М.: Наука, 1973.
8. Хюлст Г. - Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961.
9. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 августа 1989 года.