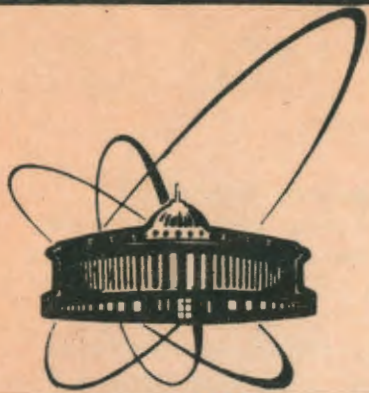


89-505



**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

Б 874

P17-89-505

И.Г.Бранков, В.Б.Приезжев

**РОТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОПРАВОК  
ОТ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА  
В ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ**

**1989**

В последние несколько лет двумерные точно решаемые модели на конечных решетках интенсивно исследовались в связи со свойствами конформной инвариантности [1,2]. В настоящее время известны поправки от конечного размера для всех основных классов решаемых моделей [3-7]. Наиболее распространенный метод определения этих поправок - вычисление плотности свободной энергии  $f_L$  на бесконечной полосе с конечной шириной  $L$  и периодическими граничными условиями. В этом случае  $f_L$  выражается через максимальное собственное значение  $\lambda_L$  трансфер-матрицы  $T$ , связывающей состояния соседних строк решетки. При этом обычно рассматривается естественная ориентация решетки, когда ее столбцы параллельны границам полосы. В то же время для ряда моделей оказывается удобной диагональная трансфер-матрица на решетке, повернутой на угол  $\pi/4$  [8]. Для любых граничных условий, будь то периодические или свободные условия, статистические суммы на решетках различной ориентации отличаются друг от друга, так как всегда можно указать состояния модели, возможное при одной ориентации и невозможное при другой.

Для моделей, обладающих свойством конформной инвариантности, это отличие не должно приводить к изменению  $f_L$  вплоть до второго порядка  $1/L$  разложения. Действительно, поправки к  $f_L$  порядка  $1/L^2$  определяются центральным зарядом с алгебры Вирасоро [1,2], и для данной модели не зависят от ориентации решетки:

$$f_L = f_0 - \frac{\pi c}{6L^2} \quad (1)$$

для периодических граничных условий и

$$f_L = f_0 + \frac{1}{L} f_{surf} - \frac{\pi c}{24L^2} \quad (2)$$

для свободных или фиксированных граничных условий. Трудности вычисления корреляционных функций не позволяют убедиться в ротационной инвариантности многих моделей прямым расчетом асимптотик в произвольном решеточном направлении.

В этой заметке мы преследуем две цели. 1. В случае 6-вершинной модели непосредственно из анзаца Бете доказать равенство  $1/L^2$  поправок в (1) для естественной и диагональной ориентаций квадратной решетки. 2. В случае одной из моделей свободных фермионов (K-модели

[9]) выяснить, в каком порядке по  $1/L$  проявляется различие ориентаций.

I. Для упрощения выкладок мы ограничимся простейшим случаем 6-вершинной модели - модели льда. В этом случае максимальное собственное значение диагональной трансфер-матрицы имеет вид [10]

$$\lambda_L = \prod_{j=1}^m \lambda(k_j) = \prod_{j=1}^m 2 \cos k_j \quad (3)$$

и отличается от случая обычной ориентации, в котором [II]

$$\lambda_L = \prod_{j=1}^m (2 - 2 \cos k_j)^{-1/2}. \quad (4)$$

Значения волновых векторов  $k_1, \dots, k_m$  определяются уравнениями анзаца Бете:

$$e^{2iLk_j} = \prod_{i=1}^m B(k_j, k_i). \quad (5)$$

Для диагональной трансфер-матрицы

$$B(p, q) = - \frac{1 + e^{2ip+2iq} + e^{2iq}}{1 + e^{2ip+2iq} + e^{2ip}}. \quad (6)$$

В пределе  $L \rightarrow \infty$  положения  $k_1, \dots, k_n$  стремятся к распределению  $\rho(k)$  на интервале  $-\pi/3 < k < \pi/3$ . После замены переменных

$$e^{2ik(\alpha)} = \frac{e^{i\mu} - e^\alpha}{e^{i\mu+\alpha} - 1}, \quad \mu = \pi/3, \quad (7)$$

для функции  $R(\alpha)$ , определяемой равенством  $R(\alpha)d\alpha = 2\pi \rho(k)dk$  уравнения (5) дают

$$R(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{\operatorname{ch}(\frac{3}{4}\alpha)}{\operatorname{ch}(\frac{3}{2}\alpha)}. \quad (8)$$

Выражение для молекулярной свободы модели льда в пределе  $L \rightarrow \infty$  следует из (3):

$$\ln W = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \lambda_L = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha R(\alpha) \ln(2 \cos k(\alpha)). \quad (9)$$

Подставляя в это выражение (8) и принимая во внимание (7), получаем известный результат Либа [II]:

$$\ln W = \frac{1}{\pi} \frac{3\sqrt{2}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\operatorname{ch}(\frac{3}{4}\alpha)}{\operatorname{ch}(\frac{3}{2}\alpha)} \ln \left( \frac{2(1+\operatorname{ch}\alpha)}{2\operatorname{ch}\alpha - 1} \right) = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3}. \quad (\text{I0})$$

Поправка к свободной энергии из-за конечного размера полосы имеет вид

$$\Lambda_L = -\frac{1}{L} \ln \lambda_L + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \lambda_L. \quad (\text{II})$$

Следуя работе [7], введем функцию

$$t_L(\alpha) = k(\alpha) + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^m \theta(\alpha - \alpha_j), \quad (\text{I2})$$

где

$$\theta(\alpha) = i \ln(-B(\alpha)), \quad (\text{I3})$$

и функцию

$$\sigma_L(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{dt_L(\alpha)}{d\alpha}, \quad (\text{I4})$$

которая в пределе  $L \rightarrow \infty$  переходит в функцию распределения  $\alpha$ :

$$\sigma_{\infty}(\alpha) = \frac{R(\alpha)}{2\pi}. \quad (\text{I5})$$

Тогда искомая поправка  $\Lambda_L$  может быть представлена в виде [7]:

$$\Lambda_L = - \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha I(\alpha) \left\{ \frac{1}{L} \sum_j \delta(\alpha - \alpha_j) - \sigma_L(\alpha) \right\}. \quad (\text{I6})$$

Функция  $I(\alpha)$  дается выражением

$$I(\alpha) = \ln \lambda(\alpha) + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' J(\alpha - \alpha') \ln \lambda(\alpha'), \quad (\text{I7})$$

а  $J(\alpha)$  определяется как решение интегрального уравнения

$$\sigma_N(\alpha) - \sigma_{\infty}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' J(\alpha - \alpha') \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m \delta(\alpha' - \alpha_j) - \sigma_N(\alpha') \right\}. \quad (16)$$

В случае диагональных граничных условий из (3) и (7) следует, что

$$\lambda(\alpha) = \frac{2(1 + \operatorname{ch} \alpha)}{2 \operatorname{ch} \alpha - 1}, \quad (19)$$

а из (5)-(7) и (12)-(14) получаем

$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \frac{\cos \pi x \operatorname{sh}(\pi - 2\mu)x}{\operatorname{sh} \mu x \operatorname{ch}(\pi - \mu)x}. \quad (20)$$

Подставляя два последних выражения в (17), находим

$$I(\alpha) = \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{3}{4} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{ch} \frac{3}{4} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}}. \quad (21)$$

Представление (16) позволяет разложить  $\Lambda_L$  в ряд Фурье

$$\Lambda_L = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} (-1)^k T_{Lk}, \quad (22)$$

где

$$T_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{2\pi} e^{int} I(\alpha(t)). \quad (23)$$

Функция  $\alpha(t)$  находится из (14) с учетом (8) и (15) и в нашем случае имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{4}{3} \operatorname{arcsch} \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( t - \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (24)$$

Асимптотику интеграла  $T_{Lk}$  при  $k \neq 0$ ,  $L \rightarrow \infty$  легко найти методом интегрирования по частям:

$$\operatorname{Re} T_{Lk} = \frac{1}{2\pi L^2 k^2} \left\{ \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) \Big|_{t=\pi} (-1)^{Lk} - \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) \Big|_{t=0} \right\} + o\left(\frac{1}{L^4 k^4}\right). \quad (25)$$

Вычисляя производные в правой части (25) с помощью выражений (21) и (24), получаем при четном  $L$

$$\operatorname{Re} T_{Lk} = \frac{2}{\pi L^2 k^2} + O\left(\frac{1}{L^4 k^4}\right). \quad (26)$$

Суммирование ряда (22) с использованием (26) приводит к результату

$$\Lambda_L = -\frac{2 \zeta(2)}{\pi L^2} = -\frac{\pi}{3 L^2}. \quad (27)$$

Вспоминая, что для диагональной трансфер-матрицы евклидов размер полосы  $\tilde{L}$  связан с числом узлов в строке  $L$  соотношением  $\tilde{L} = \sqrt{2} L$ , мы приходим к выражению (I), полученному в [7] для  $\Lambda_L$  при нормальной ориентации решетки. Совпадение этих результатов означает ротационную инвариантность модели во втором порядке  $1/L$  разложения, необходимую для выполнения условий конформной инвариантности.

2. Обратимся теперь к модели свободных фермионов и найдем порядок  $1/L$  разложения, в котором ориентация решетки влияет на свободную энергию. Рассмотрим модель, предложенную Кастеляйном [9] в связи с перечислением димерных конфигураций на плоской решетке (K-модель). В терминах предыдущего пункта вычисление свободной энергии K-модели сводится к замене сложного распределения волновых векторов  $k_1, \dots, k_n$  простым эквидистантным набором  $k_j = 2\pi(j - 1/2)/L$ . Используя (3) и (4), запишем плотность свободной энергии K-модели для диагональной трансфер-матрицы:

$$-\frac{1}{L} \ln Z_L^{(1)} = -\frac{2}{L} \sum_{m=1}^{L_0} \ln \left[ 2 \cos \frac{2\pi(m - \frac{1}{2})}{L} \right] \quad (28)$$

и для обычной ориентации

$$-\frac{1}{L} \ln Z_L^{(2)} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{L_0} \ln 2 \left[ 1 - \cos \frac{2\pi(n - \frac{1}{2})}{L} \right], \quad (29)$$

где

$$L_0 = \left[ \frac{L}{6} + \frac{1}{2} \right]. \quad (30)$$

Асимптотические разложения в ряд по степеням  $1/L$  для плотности свободной энергии (28) и (29) можно получить из представлений вида (22). Так, например, в случае диагональных граничных условий имеем

$$-\frac{1}{L} \ln Z_L^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dk \ln 2 \cos k - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^n T_{Ln}^{(1)}, \quad (31)$$

где

$$T_{Ln}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi L_0}{L}} dk e^{-iLn\varphi} \ln \cos k. \quad (32)$$

Асимптотическое поведение  $T_n^{(1)}$  при  $n \neq 0$ ,  $L \rightarrow \infty$ , как и выше, получаем интегрированием по частям. Пользуясь выражением (32), найдем

$$\operatorname{Re} T_{Ln}^{(1)} \cong \frac{\sqrt{3}}{\pi L^2 n^2}, \quad (33)$$

что после подстановки в (31) приводит к следующему результату для ведущей поправки к плотности свободной энергии:

$$\Lambda_L^{(1)} = -\frac{\sqrt{3} \pi}{6 L^2}. \quad (34)$$

Для приведения последнего выражения к стандартному виду  $\pi c / 6 \tilde{L}^2$  ( $\tilde{L} = \sqrt{2} L$ ) с центральным зарядом  $c=1/2$  достаточно восстановить ротационную инвариантность К-модели в "ультрарелятивистском" пределе  $\varepsilon(k) = k$ . В нашем случае "энергия"  $\varepsilon(k)$  равна  $\ln 2 \cos k$ , а низколежачие возбуждения соответствуют уровню Ферми  $k_f = \pi/3$ . Поскольку  $d\varepsilon(k_f)/dk = \sqrt{3}$ , требуемый результат  $c=1/2$  получается после ренормализации  $\tilde{\Lambda}_L = (1/\sqrt{3}) \Lambda_L$ .

Для выяснения, в каком порядке  $1/L$  разложения сказывается влияние ориентации решетки, рассмотрим разность

$$-\frac{1}{L} \ln Z_L^{(2)} + \frac{1}{2L} \ln Z_L^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi L_0}{L}} d\varphi \cos(mL\varphi) \ln [\cos \varphi (1 - \cos \varphi)]. \quad (35)$$

Асимптотику выражения (35) удобно искать, пользуясь тождеством

$$\ln z = \int_0^{\infty} (e^{-x} - e^{-zx}) \frac{dx}{x} \quad (36)$$

и представляя интеграл в правой части (35) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi \frac{L}{L}} d\varphi \cos(mL\varphi) \ln [\cos \varphi (1 - \cos \varphi)] = \\ & = \int_0^1 \frac{dx}{x} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi \frac{L}{L}} d\varphi \cos(mL\varphi) \operatorname{ch} \left[ x \left( \frac{1}{2} - \cos \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь, интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi \frac{L}{L}} d\varphi \cos(mL\varphi) \operatorname{ch} \left[ x \left( \frac{1}{2} - \cos \varphi \right) \right] \cong \frac{3\sqrt{3} x^2}{4\pi m^4 L^4}. \quad (38)$$

Следовательно, искомая разность есть величина порядка  $1/L^4$  и равна

$$\frac{6\sqrt{3}}{\pi L^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^4} = - \frac{7\sqrt{3} \pi^3}{120 L^4}. \quad (39)$$

Универсальность поправок к плотности свободной энергии порядка  $1/L^2$  связана с предположением о том, что  $1/L$  является скейлинговым полем, не требующим введения метрического фактора [1,2]. Результат (39) показывает, что в  $1/L$  разложении нет логарифмических поправок к члену  $1/L^2$  при различных ориентациях и, следовательно, в зависимости свободной энергии от  $L$  не требуются поправки к скейлингу.

Добавление. Эта работа была завершена, когда в печати появилась статья Овчарка и Бакстера [12]. В ней получены поправки к свободной энергии для диагональной трансфер-матрицы при фиксированных граничных условиях. Тем самым доказана инвариантность поправочного члена в выражении (2) относительно поворота на  $45^\circ$ . Первая часть нашей работы дополняет этот результат для периодических граничных условий.

#### Литература

1. Blöte H.W., Cardy J.L., Nightingale M.P., Phys.Rev.Lett. 56, 742 (1986).



2. Affleck I., Phys.Rev.Lett., 56, 746 (1986).
3. Ferdinand A.E. and Fisher M.E., Phys.Rev., 185, 832 (1969).
4. Ferdinand A.E., J.Math.Phys., 8, 2332 (1967).
5. Bhattacharjee S.M. and Nagle J.F., Phys.Rev., A31, 3199 (1985).
6. Brankov J.G., J.Stat.Phys., 56, 309 (1989).
7. de Vega H.J. and Karowski M., Nucl.Phys., B285, 619 (1987).
8. Temperley H.N.V., Lieb E.H., Proc. Roy. Soc. (London), A322, 251 (1971).
9. Kasteleyn P.W., J.Math.Phys., 4, 287 (1963).
10. Pegg N.E., Ann. Israel Phys. Soc., 27, 637 (1974).
11. Lieb E.H., Phys.Rev.Lett., 18, 612 (1967).
12. Owczarek A.L., Baxter R.J., J.Phys. A22, 1141 (1989).

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 июня 1989 года.