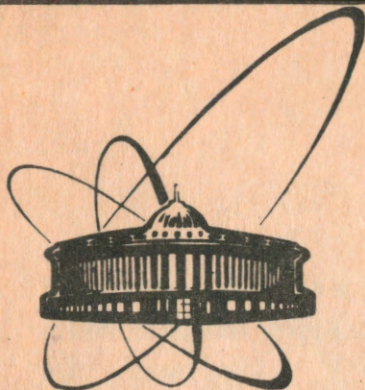


89-469



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

E 732

P17-89-469

А. Н. Ермилов, В. И. Кабанович, А. М. Курбатов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ С РАСКРАШИВАНИЕМ  
РЕШЕТКИ  $q$  КРАСКАМИ  
МЕТОДОМ  $1/q$ -РАЗЛОЖЕНИЯ

1989

Ермилов А.Н., Кабанович В.И., Курбатов А.М. P17-89-469  
Исследование задачи о раскрашивании  
решетки  $q$  красками методом  $1/q$ -разложения

Для энтропии основного состояния  $q$ -компонентной антиферромагнитной модели Поттса построено разложение в ряд по параметру  $1/q$ . Разработан метод, позволяющий получать коэффициенты ряда, исходя из статсум конечных частей решетки. В случае квадратной решетки из анализа статсум прямоугольников с периметром, не превосходящим 26, получено 26 членов разложения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Ermilov A.N., Kabanovich V.I., Kurbatov A.M. P17-89-469  
Study of the Problem on Lattice Coloring  
with  $q$  Paints by the  $1/q$ -Expansion Method

A series expansion in powers of  $1/q$  is obtained for the ground-state entropy of the  $q$ -component antiferromagnetic Potts model. The method is developed allowing to determine the series coefficients from the partition functions for finite parts of the lattice. In the case of the square lattice 26 terms are obtained via analysis of the partition functions for the rectangles with perimeter not larger than 26.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

Пусть  $\mathcal{L}$  - решетка и  $\pi$  с  $\mathcal{L}$  - некоторая ее конечная часть. Введем следующие стандартные обозначения:  $n(\pi)$  - число вершин,  $m(\pi)$  - число ребер,  $k(\pi)$  - число компонент связности.

Всякой вершине  $i \in \mathcal{L}$  сопоставим переменную  $s_i = 1, \dots, q$  и рассмотрим величину

$$W(\pi) = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle i, j \rangle \in \pi} [1 - \delta(s_i, s_j)], \quad (1)$$

где произведение берется по парам смежных вершин (по ребрам) части решетки  $\pi$ , а сумма - по всем конфигурациям  $\{s_i, i \in \pi\}$ .

Сумма (1) равна числу раскрашиваний  $q$ -красками части решетки  $\pi$ , или в терминах антиферромагнитной модели Поттса [1], кратности вырождения состояния с нулевой энергией.

Особый интерес представляет предельный переход

$$\alpha(q, \mathcal{L}) = \lim_{\pi \rightarrow \mathcal{L}} \frac{\ln W(\pi)}{n(\pi)}, \quad (2)$$

Смысл предельного перехода в (2) определяется соотношениями

$$\lim_{\pi \rightarrow \mathcal{L}} n(\pi) = \infty; \quad \lim_{\pi \rightarrow \mathcal{L}} \frac{n_T(\pi)}{n(\pi)} = 0,$$

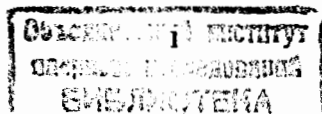
где  $n_T(\pi)$  - число вершин, имеющих в  $\pi$  меньше ребер, чем в  $\mathcal{L}$ .

В терминах антиферромагнитной модели Поттса величина  $\alpha(q, \mathcal{L})$  является удельной остаточной энтропией.

Для задачи (1)-(2) известно несколько точных решений, например  $\alpha = (3/2) \ln(4/3)$  для квадратной решетки с  $q = 3$  [2]. Для  $d$ -мерной гиперкубической решетки предложена [3] аппроксимация

$$\alpha(q, d) \cong \ln \left( 1 + \frac{(q-2)^d}{(q-1)^{d-1}} \right). \quad (3)$$

При  $d = 2$ ,  $q = 3$  ошибка этой оценки составляет всего 3%, но при  $d = 3$ ,  $q = 3$  ошибка значительна (~20%) [4].



В настоящей работе рассматривается разложение величины  $\alpha$  в ряд по малому параметру  $1/q$ . В работе [5] рассматривалось разложение в ряд по  $1/3$  удельной энтропии шестивершинной модели на квадратной решетке, которая, как известно, равна  $\alpha(3,2)$ . Метод  $1/q$ -разложения применялся для изучения ферромагнитной модели Поттса в работе [6].

Раскроем в (1) произведение и каждому слагаемому сопоставим  $\pi'$  с  $\pi$  так, что  $\langle t, f \rangle \in \pi'$  для тех ребер  $\langle t, f \rangle \in \pi$ , для которых из сомножителя  $[1 - \delta(s_t, s_f)]$  в данное слагаемое вошел множитель  $\delta(s_t, s_f)$ . Для однозначности будем считать, что  $\pi'$  не содержит изолированных вершин. Тогда вместо (1) имеем

$$W(\pi) = q^{n(\pi)} \sum_{\pi' \subset \pi} \Psi(\pi'), \quad (4)$$

где

$$\Psi(\pi') = q^{-n(\pi)} \sum_{\{s_t\}} \prod_{\langle t, f \rangle \in \pi'} \{-\delta(s_t, s_f)\}, \quad (5)$$

или, после суммирования по конфигурациям  $s$ -переменных

$$\Psi(\pi') = (-1)^{m(\pi')} \left(\frac{1}{q}\right)^{n(\pi') - k(\pi')}. \quad (6)$$

Если использовать еще одну характеристику  $\pi'$

$$e(\pi') = m(\pi') - n(\pi') + k(\pi'), \quad (7)$$

равную числу независимых простых циклов, образуемых ребрами  $\pi'$ , то вводя функцию  $K(m, e, \pi)$ , равную числу элементов множества  $\{\pi' : \pi' \subset \pi, m(\pi')=m, e(\pi')=e\}$ , имеем из (4)

$$W(\pi) = q^{n(\pi)} \sum_m \sum_e (-1)^m K(m, e, \pi) \left(\frac{1}{q}\right)^{m-e}. \quad (8)$$

Простой алгоритм решения комбинаторной задачи о подсчете числа  $K(m, e, \pi)$  неизвестен, поэтому мы используем другой метод.

Пусть на решетке  $\mathcal{L}$  определена операция трансляции, отображающая ее в себя. Определим множество связанных диаграмм

$\{g\}$  на решетке  $\mathcal{L}$  как множество всех ее конечных связанных частей, никакие две из которых не могут быть переведены друг в друга трансляцией. Таким образом всякой связанной части  $\pi$  решетки  $\mathcal{L}$  поставлена в соответствие связанная диаграмма  $g$ . Произвольной конечной части решетки  $\pi$  поставим в соответствие диаграмму  $G = G(\pi)$ , определенную как функцию  $t(g)$ , равную числу связанных компонент в  $\pi$ , которым соответствует  $g$ . Обозначим через  $L(G', \pi)$  число элементов множества  $\{\pi' : \pi' \subset \pi, G(\pi') = G'\}$ , не содержащих изолированных вершин. Ввиду трансляционной инвариантности величин  $W(\pi)$ ,  $n(\pi)$  и  $L(G', \pi)$  запишем (4) в виде

$$W(G) = q^{n(G)} \sum_{G'} L(G', G) \Psi(G'), \quad (9)$$

Далее, как правило, в аналогичных задачах, изучая функцию  $L(G', G)$ , вводят понятие решеточных констант  $L(G', \mathcal{L})$ , таких, что для любой функции  $\Psi(G')$  можно записать формальное равенство

$$\alpha(q, \mathcal{L}) = \ln q + \sum_{G'} L(G', \mathcal{L}) \Psi(G'). \quad (10)$$

Алгоритмы вычисления решеточных констант  $L(G, \mathcal{L})$  можно найти во многих работах по использованию рядов в задачах статистической физики, например, в [7]. Для связанных диаграмм  $g$

$$L(g, \mathcal{L}) = \lim_{\pi \rightarrow \mathcal{L}} \frac{L(g, \pi)}{n(\pi)}. \quad (11)$$

Ряд в (10) не обязательно сходится, однако если можно указать малый параметр задачи  $x$  и, задавшись некоторым числом  $v$ , отбросить все члены с  $\Psi(G') = o(x^v)$ , то ряд (10) может быть сделан сходящимся и позволяющим вычислить  $\alpha(q, \mathcal{L})$  с точностью до величины  $o(x^v)$ . Для функции  $\Psi$ , заданной равенством (6), с малым параметром  $x = 1/q$ , фиксация произвольного числа  $v$  оставляет в (10) конечное число слагаемых для произвольной решетки  $\mathcal{L}$ .

Формулы (6) и (10) полностью определяют асимптотический ряд величины  $\alpha$  для всякой решетки, практически же вычисления сложны ввиду неполиномиального роста числа учитываемых диаграмм с ростом порядка разложения, а также комбинаторной проблемы вычисления решеточных констант для многосвязных диаграмм.

Возможно, однако, перейти от суммирования по всему множеству диаграмм к сумме только по связным диаграммам. Введем на множестве связных диаграмм функцию  $\Phi(g)$  соотношением

$$\sum_{g'} L(g', g) \Phi(g') = \ln W(g). \quad (12)$$

Предел (2) выражается через функцию  $\Phi$  как

$$\alpha(q, \mathcal{L}) = \sum_{g'} L(g', \mathcal{L}) \Phi(g'). \quad (13)$$

Корректность представления (12)-(13) устанавливается следующей теоремой:

Если в представлении (9)-(10) функция  $\Psi(G)$  такова, что для всякого  $v$  множество диаграмм, в которых  $\Psi(G) = O(x^v)$ , конечно, то функция  $\Phi(g)$ , связанная с  $\Psi$  через  $W(g)$  уравнением (12), обладает таким же свойством.

Разумеется, если вычислять  $W(g)$  по формуле (9), то представление (12)-(13) не эффективно. Однако на конечных частях решетки вычисление  $W(g)$  наиболее эффективно проводить методом трансфер-матриц, исходя из представления (1).

Идея перехода к связным диаграммам известна [8], однако данная формулировка позволяет осуществить дальнейшее сокращение множества диаграмм.

Назовем  $\pi_f$  незаполняемой частью решетки, если не существует такой  $\pi$ , что  $\pi_f \subset \pi$ ,  $n(\pi_f) = n(\pi)$ . Пусть решетка  $\mathcal{L}$  такова, что для всякой  $\pi_f$  и таких  $\pi'_f, \pi'$ , что  $\pi' \subset \pi'_f$ ,  $n(\pi') = n(\pi'_f)$ ,

выполняется равенство  $L(g(\pi'), \pi_f) = L(g(\pi'_f), \pi_f)$ . Тогда, обозначая через  $\mathcal{G}_f$  диаграммы, соответствующие незаполняемым связным частям решетки, имеем представление

$$\sum_{\mathcal{G}_f} L(\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_f) \Phi_f(\mathcal{G}_f) = \ln W(\mathcal{G}_f), \quad (14)$$

$$\alpha(q, \mathcal{L}) = \sum_{\mathcal{G}_f} L(\mathcal{G}_f, \mathcal{L}) \Phi_f(\mathcal{G}_f), \quad (15)$$

отличающееся от (12)-(13) только сокращением множества диаграмм.

Следующий шаг удобно иллюстрировать примером квадратной решетки. Назовем незаполняемую диаграмму прямоугольной диаграммой  $\mathcal{G}_r$ , если ее вершины упорядочены на решетке в  $r_1$  строк по  $r_2$  вершин в каждой. Всякой незаполняемой диаграмме  $\mathcal{G}_f$  поставим в соответствие прямоугольную диаграмму  $\mathcal{G}_r$ , так что  $L(\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_r) = 1$ , что в силу определения функции  $L$  и свойств квадратной решетки всегда можно сделать единственным образом. Тогда, заменяя в (14)-(15) индекс  $f$  на индекс  $r$ , получим еще одно представление для  $\alpha$ . Исследование асимптотических свойств функции  $\Phi_r$  показало, что

$$\Phi_r(\mathcal{G}_r) = O(x^v), \quad v = 2*(r_1+r_2)-5, \quad r_1, r_2 > 2. \quad (16)$$

$$\Phi_r(\mathcal{G}_r) = 0, \quad \min(r_1, r_2) < 2, \quad \max(r_1, r_2) > 2.$$

Из (14)-(15) для квадратной решетки имеем

$$\alpha(q, 2) = S_\mu - 3S_{\mu-1} + 3S_{\mu-2} - S_{\mu-3} + O(x^{2\mu-3}), \quad (17)$$

$$S_\mu = \sum_t \ln W(t, \mu-t),$$

где  $W(r_1, r_2)$  вычисляется на прямоугольной диаграмме  $(r_1, r_2)$ .

Для квадратной решетки получено следующее разложение

$$\alpha(q, 2) = \ln q + 2 \ln(1-1/q) + z^3 - \frac{1}{2}z^6 + z^7 + 3z^8 + 4\frac{1}{3}z^9 + 2z^{10} + 6\frac{3}{4}z^{12} + 22z^{13} + 7\frac{1}{2}z^{14} - 100\frac{4}{5}z^{15} - 291\frac{1}{2}z^{16} - 312z^{17} +$$

$$337\frac{5}{6}z^{18} + 1939z^{19} + 3380z^{20} + 332\frac{10}{21}z^{21} - 15918z^{22} - 51963z^{23} - 79176\frac{5}{8}z^{24} + 39123z^{25} + 566862z^{26} + O(z^{27}), \quad z = \frac{1}{q-1}. \quad (18)$$

Вычисление при максимальной величине параметра разложения  $z = \frac{1}{2}$  дает результат, отличающийся от точного значения [2] на 0,05%.

Для произвольных  $d$  и  $q$  из (15) имеем

$$\alpha(q, d) = \ln q + d \ln(1-1/q) + d(d-1)z^3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(d-2)z^2 + \left[ \frac{8}{3}(d-2) - \frac{1}{4} \right] z^3 + [7(d-2)(d-3) + \frac{43}{6}(d-2) + \frac{1}{2}] z^4 \right\} + O(z^8). \quad (19)$$

Сопоставление рядов (18) и (19) с аппроксимацией (3) выявляет ее ошибку порядка  $O(z^4)$  при  $d > 2$  и  $O(z^7)$  при  $d = 2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Baxter R.J., Proc. Roy. Soc. London, 1982, v.383A, 43.
2. Lieb E.H., Phys.Rev., 1967, v.162, 162.
3. Mattis D., Int. J. Mod. Phys. B, 1987, v.1, 103.
4. Chen X., Pan C.Y., Int. J. Mod. Phys. B, 1987, v.1, 111.
5. Nagle J.F., J. Math. Phys., 1966, v.7, 1484.
6. Ginsparg P., Goldsmidt Y.Y., Zuber J.-B., Nucl. Phys. B, 1981, v.170, 409.
7. Domb C, Adv. Phys., 1960, v.9, 149.
8. Sykes M.F., Essam J.W., Heap B.R., Hiley B.J., J. Math. Phys., 1966, v.7, 1557.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 июля 1989 года.