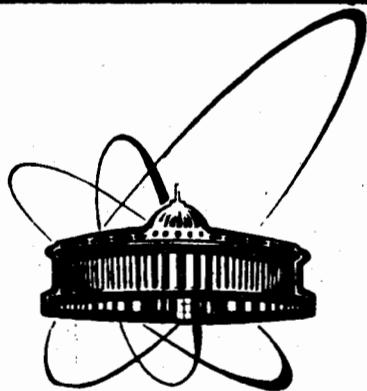


89-440



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ю 233

P17-89-440

В. И. Юкалов

ИНВЕРСОН-ПОЛЯРИТОННЫЕ НИТИ
ПРИ СЛАБОЙ НАКАЧКЕ

Направлено в "Journal of Modern Optics"

1989

Юкалов В.И.

P17-89-440

Инверсон-поляритонные нити при слабой накачке

Показано, что инверсон-поляритонные нити в лазерных средах образуются не только при сильной, но и при слабой накачке. В системе с такими нитями появляется когерентная компонента излучения, тогда как однородная система при той же величине слабой накачки может излучать только некогерентно. Когерентное излучение резко анизотропно и наиболее сильно вдоль направления нитей. Несмотря на слабость накачки в системе с инверсон-поляритонными нитями возможен, тем не менее, сверхизлучательный режим.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Yukalov V.I.

P17-89-440

Inversion-Polariton Filaments under Weak Pumping

It is shown that inversion-polariton filaments in laser media arise not only under strong but under weak pumping too. In the system with these filaments the coherent component of radiation appears, while a uniform system could radiate only incoherently. The coherent radiation is sharply anisotropic and is strongest in the direction of filaments. Notwithstanding the weakness of pumping, however in the system with inversion-polariton filaments the superradiating regime is possible.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

1. Введение

В работах /1-3/ была построена теория, трактующая образование инверсон-поляритонных нитей в лазерных средах как резонансный фазовый переход /4,5/. Это явление, хорошо известное экспериментаторам (см. литературу, цитированную в статьях /1-3/), несколько напоминает расслоение в конденсированных средах /6/, однако отличается от него двумя особенностями. Во-первых, филаментация происходит не в равновесной среде, а индуцируется внешними полями - переменным резонансным полем и стационарным полем накачки. Во-вторых, филаментация - это фазовый переход в подсистеме возбуждений; именно инверсон-поляритонные возбуждения стягиваются в нити, образуя сверхструктуру по отношению к структуре атомов и молекул, из которых состоит вещество /3/.

При описании филаментации в работах /1-3/ рассматривался случай сильной накачки, характеризующейся положительной величиной

$$\xi = (N_+ - N_-) / N, \quad (N_+ + N_- = N),$$

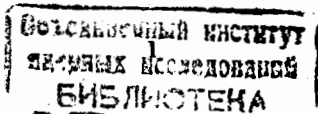
где N_+ , N_- - среднее число возбуждаемых, невозбужденных атомов соответственно, а N - полное число атомов. Положительность характеристики накачки $\xi > 0$ означает, что $N_+ > N_-$. Понятно, что такая сильная накачка двухуровневой системы возможна только через один или несколько других дополнительных уровней /5/. Упрощение, связанное с большой величиной накачки, то есть с положительностью $\xi > 0$, использованное в работах /1-3/, состояло в том, что при этом линейно поляризованное поле усиливаемой лазерной моды вызывало параллельную данному полю линейную поляризацию дипольных моментов перехода. При слабой же накачке это не обязательно так. Кроме того, интенсивность излучения в работах /2,3/ была найдена в классическом приближении, которое тем более грубо, чем слабее накачка.

В настоящей статье, которая служит продолжением работы /3/, исследуется случай слабой накачки, $\xi \leq 0$. Рассматривается возможность при этом условия инверсон-поляритонной филаментации и проводится аккуратное квантово-механическое вычисление интенсивности излучения, включая его диаграмму направленности. Определяются коэффициенты когерентности, характеризующие вклад когерентной части излучения по отношению к некогерентной.

Основные результаты, полученные в настоящей статье, следующие:

1) Явление инверсон-поляритонной филаментации происходит как при сильной, так и при слабой накачке.

2) Система, не содержащая инверсон-поляритонных нитей, не может излучать когерентно.



3) Филаментация коллективных возбуждений в лазерной среде приводит к появлению когерентного излучения.

4) Когерентное излучение сильно анизотропно и достигает наибольшей величины в том направлении, в котором вытянуты нити.

5) Возможен режим стационарного сверхизлучения, когда интенсивность когерентного излучения значительно превышает интенсивность некогерентного излучения; это возможно как в отдельных направлениях, так и в целом для интегральной интенсивности.

2. Основные уравнения

Рассматривается система N двухуровневых атомов с частотой перехода ω_0 . Везде далее $\hbar \equiv 1$. На систему действует переменное внешнее поле

$$\vec{E}_i(t) = \vec{E}_i e^{-i\omega t}, \quad (i=1, 2 \dots N), \quad (1)$$

в котором

$$\vec{E}_i = \vec{e}_0 E \exp(ikz_i), \quad (|\vec{e}_0|=1, \quad k = \frac{\omega}{c}).$$

Поле (1) квазирезонансно, в том смысле, что отстройка от резонанса мала,

$$\frac{|\Lambda|}{\omega} \ll 1, \quad (\Lambda \equiv \omega - \omega_0). \quad (2)$$

Рабочая среда имеет характерную для лазера форму цилиндра радиусом R и длиной L , которые существенно превышают длину волны оптического диапазона $\lambda = 2\pi/k$,

$$\frac{R}{\lambda} \ll 1, \quad \frac{L}{\lambda} \ll 1. \quad (3)$$

Нерезонансная стационарная накачка задается параметром

$$\xi = \frac{1}{N} \sum_i s_i, \quad (s_i = \pm 1). \quad (4)$$

Распределение величин s_i определяет, какие атомы возбуждены, а какие нет. Дипольные моменты переходов для атомов среды имеют одинаковые модули, но, возможно, различные направления,

$$\vec{d}_i = \vec{n}_i d, \quad (|\vec{n}_i|=1, \quad d = |\vec{d}_i|). \quad (5)$$

Направление поляризации \vec{n}_i в случае слабой накачки надо определять дополнительно, тогда как при сильной накачке ^{/3/} векторы \vec{n}_i были коллинеарны поляризации \vec{e}_0 резонансного поля (1).

При записи уравнений движения для инверсионного оператора $\sigma_i^z(t)$ и поляритонных операторов $\sigma_i^\pm(t)$ учитываем наличие ширины возбужденного уровня γ_1 и ширины линии перехода γ_2 . В дальнейшем при конкретных расчетах будем использовать теорию возмущений по параметру

$$\frac{k^2 d^2}{a \gamma_2} \ll 1, \quad (6)$$

в котором a - среднее межатомное расстояние. Для проверки неравенства (6) подставим в него характерные величины оптического излучения: $\omega_0 \sim 5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $k \sim 10^4 \text{ см}^{-1}$, $a \sim 10^{-8} \text{ см}$, $d \sim ea_B$, где e - заряд электрона, a_B - боровский радиус, то есть $d \sim 10^{-18} (2 \text{ см}^5/\text{с}^2)^{1/2}$, $\gamma_2 \sim 10^8 - 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\hbar \gamma_2 \sim 10^{-19} - 10^{-17} \text{ эрг}$.

Это дает

$$\frac{k^2 d^2}{a \gamma_2} \sim 10^{-2} - 10^{-4}.$$

Атомы системы взаимодействуют между собой посредством обмена фотонами. Соответствующее поле взаимодействия называется переизлученным полем. Фотонные переменные исключаются с помощью стандартной процедуры ^{/5,7/} в результате формального решения уравнений Максвелла, позволяющего выразить фотонные операторы через атомные. При условиях (3) для переизлученного поля оправдано ^{/2/} приближение волновой зоны, что дает ^{/7/}

$$\vec{E}_{ij}(t) = \frac{k^2}{z_{ij}} \vec{n}_{ij} \times [\vec{d}_j \times \vec{n}_{ij}] \exp(ikz_{ij}) \sigma_j^-(t), \quad (7)$$

где

$$z_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \quad \vec{n}_{ij} \equiv \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{z_{ij}}.$$

Система двухуровневых атомов, находящихся в квазирезонансном поле (1) и взаимодействующих друг с другом через переизлученное поле (7), описывается модельным гамильтонианом ^{/3/} в гейзенберговском представлении

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \omega_0 \sum_i [1 + \sigma_i^z(t)] -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_i \vec{d}_i \left[\sigma_i^+(t) \vec{E}_i(t) + \vec{E}_i^+(t) \sigma_i^-(t) \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \vec{d}_i \left[\sigma_i^+(t) \vec{E}_j(t) + \vec{E}_j^+(t) \sigma_i^-(t) \right]. \quad (8)$$

При выводе гамильтониана (8) использовано также квантовое приближение вращающейся волны /5,8/. Оператор $\sigma_i^z(t)$ соответствует оператору инверсионных возбуждений, $\sigma_i^x(t)$ - операторам поляритонных возбуждений /3/. Решая уравнения движения для этих операторов в полуклассическом приближении /5,8/, находим /3/ средние значения

$$\langle \sigma_i^z(t) \rangle = s_i \frac{\Delta^2 + \gamma_2^2}{\Delta^2 + \bar{\gamma}_i^2},$$

$$\langle \sigma_i^-(t) \rangle = \frac{1}{2} s_i \frac{\Delta - i\gamma_2}{\Delta^2 + \bar{\gamma}_i^2} \vec{d}_i \vec{E}_i e^{-i\omega t}, \quad (9)$$

в которых эффективная ширина линии перехода дается выражением

$$\bar{\gamma}_i^2 = \gamma_2^2 \left(1 + \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{\gamma_1 \gamma_2} \right). \quad (10)$$

Решения (9) по общей классификации /9/ относятся к равновесным решениям, к которым принадлежат решения стационарные, периодические и квазипериодические. Состояние системы, описываемой такими равновесными решениями, обладает следующим важным свойством. Если рассмотреть оператор динамической переменной $\hat{A}(t)$, зависящей от времени только через гейзенберговские операторы, входящие в гамильтониан, то статистическое среднее

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr} \rho(0) \hat{A}(t),$$

где $\rho(0)$ - начальная матрица плотности, вообще говоря, зависит от времени t . Однако существует характерное время τ_0 , такое, что статистическое среднее, усредненное по периоду τ_0 , от времени не зависит,

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} \langle \hat{A}(t') \rangle dt' = \text{const}.$$

Для стационарных решений, очевидно, $\bar{A} = \langle \hat{A}(t) \rangle$ при любых t_0 . Для периодических решений τ_0 совпадает с их периодом. В случае квазипериодических решений с набором периодов $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ характерное время $\tau_0 \gg \{\tau_1, \dots\}$. Возможность определения средних \bar{A} , не зависящих от времени, и является указанным важным свойством систем, которым отвечают равновесные решения уравнений движения. Состояния таких систем можно назвать стационарными в среднем. Для системы стационарной в среднем допустимо задать термодинамические потенциалы, экстремизация которых определяет устойчивые состояния. При рассмотрении резонансных фазовых переходов /4,5/ флуктуации, индуцированные внешними резонансными полями, вносят несравненно больший вклад во все наблюдаемые величины, нежели тепловые флуктуации, поэтому последними можно пренебречь /1-3/. Тогда, например, средняя энергия \bar{H} эквивалентна свободной энергии. Минимизация \bar{H} позволяет найти то наиболее выгодное состояние системы, в которое она переходит в результате резонансного фазового перехода. Таким образом, методы, развитые для описания фазовых переходов в равновесных системах /10/, обобщаются на системы, стационарные в среднем /1-5/.

3. Слабая накачка

В работах /1-3/ рассматривался случай сильной накачки, соответствующей положительности параметра (4). Здесь мы исследуем ситуацию, когда накачка слабая, то есть $\xi \leq 0$.

Статистическое среднее от гамильтониана (8) имеет вид

$$\langle \hat{H}(t) \rangle = \bar{H} = \bar{W}_0 + \bar{W}_{int}, \quad (II)$$

где первое слагаемое

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{2} N \omega_0 + \frac{1}{2} \sum_i s_i \frac{\omega_0 (\Delta^2 + \gamma_2^2) - \Delta |\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2 + (\gamma_2 / \gamma_1) |\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}$$

- это энергия излучающих атомов во внешнем квазирезонансном поле (I), а второе слагаемое

$$\bar{W}_{int} = - \sum_{i \neq j} f_{ij} s_i s_j$$

- это энергия взаимодействия атомов через переизлученное поле (7), причем интенсивность взаимодействия равна

$$g_{ij} = (\vec{d}_i \cdot \vec{E}_i)^* (\vec{d}_j \cdot \vec{E}_j) \frac{k^3 (\Delta^2 + \gamma_i^2)}{4(\Delta^2 + \gamma_i^2)(\Delta^2 + \gamma_j^2)} \times \left[(\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j) - (\vec{d}_i \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{d}_j \cdot \vec{n}_{ij}) \right] \frac{\cos(kz_{ij})}{kz_{ij}} \quad (I2)$$

Направление поляризации дипольных моментов перехода (5) найдем минимизируя среднюю энергию (II) относительно величин $(\vec{n}_i \cdot \vec{e}_0)$, где \vec{e}_0 - фиксированная поляризация квазирезонансного поля (I). Это дает

$$(\vec{n}_i \cdot \vec{e}_0)^2 = \begin{cases} 1, & s_i > 0, \\ 0, & s_i < 0. \end{cases} \quad (I3)$$

Если бы для всех атомов было $s_i > 0$, то мы вернулись бы к случаю сильной накачки, когда $\xi > 0$, $(\vec{n}_i \cdot \vec{e}_0)^2 = 1$. Однако при слабой накачке, когда $\xi < 0$, согласно (I3) для некоторых атомов $(\vec{n}_i \cdot \vec{e}_0) = 0$. Как видно из (I3), интенсивность взаимодействия (I2) для двух атомов отлична от нуля только если для них обоих $s_i, s_j > 0$.

Так как система состоит из большого числа излучающих атомов $N \gg 1$, то при непосредственных вычислениях удобно перейти к непрерывному представлению, используя замены

$$s_i \rightarrow s(x_i, y_i); \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rightarrow \frac{1}{V} \int d\vec{r}_i,$$

где $V = \pi R^2 L$ - объем рабочей среды, имеющей форму цилиндра с осью, направленной по оси \vec{z} , а $s(x, y)$ не зависит от z вследствие предположения о цилиндрической симметрии. При этом сумма (4) заменяется интегралом

$$\xi = \frac{1}{\pi R^2} \int s(x, y) dx dy, \quad (I4)$$

в котором интегрирование ведется по поперечному сечению цилиндра. Функция $s(x, y)$ описывает пространственное распределение возбуждений в среде при фиксированной характеристике накачки ξ . Это распределение должно установиться таким, чтобы обеспечить минимум средней энергии (II). В дальнейшем нам предстоит сравнить две ситуа-

ции: когда возбуждения распределены по системе равномерно, то есть $s(x, y) \equiv \xi$, и когда они образуют нитевидную структуру. В последнем случае считается, что в системе возникают нити радиусом R_f , такие, что внутри них практически все атомы возбуждены, а вне нитей атомы не возбуждены. Это условие, обозначая область, занимаемую всеми нитями через V_f , можно записать так:

$$s(x, y) = \begin{cases} +1; & \{x, y\} \in V_f, \\ -1; & \{x, y\} \notin V_f. \end{cases} \quad (I5)$$

Средние значения инверсионных и поляритонных операторов, как следует из (9), пропорциональны функции $s(x, y)$. Поэтому вместе с возникновением нитевидного распределения для функции накачки (I5) одновременно появляется нитевидная структура инверсионных и поляритонных возбуждений. Подставляя (I5) в (I4), находим число нитей

$$N_f = \frac{1}{2} (1 + \xi) \left(\frac{R}{R_f} \right)^2. \quad (I6)$$

Сравним теперь средние энергии (II) для однородного и нитевидного распределения возбуждений. В случае однородного распределения имеем

$$\langle \hat{H}(t) \rangle^{uni} = W_0^{uni} + W_{int}^{uni}, \quad (I7)$$

где

$$W_0^{uni} = \frac{1}{2} N \omega_0 (1 + \xi), \quad W_{int}^{uni} = 0, \quad (s_i \equiv \xi < 0).$$

Равенство нулю средней энергии взаимодействия слабо возбужденных атомов можно понять как следствие их некоррелированности и взаимной дефазировки их дипольных моментов перехода.

При нитевидном распределении возбуждений для средней энергии (II) получаем

$$\langle \hat{H}(t) \rangle^{fil} = W_0^{fil} + W_{int}^{fil}, \quad (I8)$$

здесь первое слагаемое

$$W_o^{fil} = \frac{1}{4} N \omega_o (1 + \xi) \left(1 + \frac{\Delta^2 + \gamma_2^2 - d^2 E^2 \Delta / \omega_o}{\Delta^2 + \bar{\gamma}^2} \right)$$

- энергия нитей в поле (I), где

$$\bar{\gamma}^2 \equiv \gamma_2^2 \left(1 + \frac{d^2 E^2}{\gamma_1 \gamma_2} \right),$$

а второе слагаемое в (I8) - это энергия взаимодействия атомов внутри нитей,

$$\bar{W}_{int}^{fil} = N_f \bar{W}_f,$$

$$\bar{W}_f = - \frac{\pi N^2 R_f^2 E^2 d^4 (\Delta^2 + \gamma_2^2)}{8 \lambda R^4 (\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)^2} g \left(\frac{4\pi R_f^2}{\lambda L} \right),$$

$$g(x) \equiv \sin x - x \operatorname{Ci}(x).$$

При вычислении этих величин использованы те же преобразования, что и в работе /3/. Учитывая (I6), отсюда находим

$$\bar{W}_{int}^{fil} = - N^2 (1 + \xi) \frac{\pi E^2 d^4 (\Delta^2 + \gamma_2^2)}{16 \lambda R^2 (\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)^2} g \left(\frac{4\pi R_f^2}{\lambda L} \right). \quad (I9)$$

Так же как и ранее /3/, минимизируя (I9) по R_f , определяем радиус нити

$$R_f = 0.22 \sqrt{\lambda L}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (I9) и принимая во внимание, что

$$g \left(\frac{4\pi R_f^2}{\lambda L} \right) = g(0.62) = 1.1,$$

убеждаемся в отрицательности энергии взаимодействия (I9) при нитевидном распределении возбуждений (I5). Отсюда, учитывая обычное соотношение $\gamma_1 \neq \gamma_2$, видим, что в квазирезонансной ситуации (2) разность

$$\langle \hat{H}(t) \rangle^{uni} - \langle \hat{H}(t) \rangle^{fil} = \frac{N \omega_o (1 + \xi) d^2 E^2}{4 (\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\Delta}{\omega_o} \right) - \bar{W}_{int}^{fil}$$

всегда положительна.

Таким образом, энергия системы с нитевидной структурой возбуждений меньше, чем энергия однородной системы. Поэтому нитевидная структура выгоднее и должна реализовываться при рассматриваемых условиях.

4. Параметр порядка

Появление качественно отличающихся состояний при фазовых переходах удобно характеризовать по качественному изменению параметра порядка /10/. Такая характеристика была предложена /3/ и для описания эффекта филаментации при сильной накачке. В настоящей работе будет дано несколько иное определение параметра порядка, справедливое как при сильной, так и при слабой накачке.

Коллективные свойства рассматриваемой системы прямо связаны с наличием или отсутствием корреляции между направлениями диполей перехода, то есть их сфазированностью, значит, и когерентностью. Для количественной характеристики этих свойств исследуем корреляционную функцию

$$K(\xi) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} (\vec{n}_i \vec{n}_j) \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle. \quad (21)$$

Подставляя сюда среднее

$$\langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle = \frac{s_i s_j (\Delta^2 + \gamma_2^2) d^2 E^2}{4 (\Delta^2 + \bar{\gamma}_i^2) (\Delta^2 + \bar{\gamma}_j^2)} (\vec{n}_i \vec{e}_o) (\vec{n}_j \vec{e}_o), \quad (i \neq j),$$

убеждаемся, что корреляция, вследствие (I3), появляется только между возбужденными атомами. При слабой накачке ($\xi < 0$) функция (21) для однородной системы равна нулю. Для системы с филаментацией, согласно (I5) и (I6), находим

$$K(\xi) = \frac{(1 + \xi)^2 (\Delta^2 + \gamma_2^2)}{16 (\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)^2} d^2 E^2. \quad (22)$$

При сильной накачке корреляционная функция (21) становится отличной от нуля и для однородной системы /3/. В общем случае можно записать

$$K^{uni}(\xi) = \Theta(\xi) \frac{\xi^2 (\Delta^2 + \delta_2^2)}{4(\Delta^2 + \bar{f}^2)^2} d^2 E^2, \quad (23)$$

где

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

При максимально возможной накачке ($\xi = 1$) функции (22) и (23) совпадают,

$$K(1) = \frac{\Delta^2 + \delta_2^2}{4(\Delta^2 + \bar{f}^2)^2} d^2 E^2 = K^{uni}(1).$$

Отличие в свойствах филаментированной и однородной систем можно характеризовать разностью

$$K(\xi) - K^{uni}(\xi) = \frac{(\Delta^2 + \delta_2^2) d^2 E^2}{4(\Delta^2 + \bar{f}^2)^2} \left[\frac{1}{4} (1 + \xi)^2 - \Theta(\xi) \xi^2 \right]. \quad (24)$$

Определим параметр порядка

$$\sigma(\xi) = \frac{K(\xi) - K^{uni}(\xi)}{\max_{\xi} [K(\xi) - K^{uni}(\xi)]}, \quad (25)$$

нормируя разность (24) с помощью величины

$$\max_{\xi} [K(\xi) - K^{uni}(\xi)] = \frac{(\Delta^2 + \delta_2^2) d^2 E^2}{12(\Delta^2 + \bar{f}^2)^2}, \quad \left(\xi = \frac{1}{3} \right). \quad (26)$$

Подставляя (24) и (26) в (25), получаем

$$\sigma(\xi) = \frac{3}{4} \left[(1 + \xi)^2 - \Theta(\xi) 4\xi^2 \right]. \quad (27)$$

Для параметра порядка (27) справедливы равенства

$$\sigma(-1) = 0 = \sigma(1),$$

$$\max_{\xi} \sigma(\xi) = \sigma(1/3) = 1.$$

С изменением характеристики накачки от $\xi = -1$ до $\xi = 1$ происходят следующие явления. При $\xi < \xi_1$ в системе нет ни одной полностью возбужденной нити, поэтому параметр порядка $\sigma(\xi)$ надо положить равным нулю. При $\xi = \xi_1$ появляется первая нить. Полагая в (16) $N_f = 1$, имеем

$$\xi_1 = 2(R_f/R)^2 - 1 = 0.3 F^{-1} - 1,$$

где $F \equiv \pi R^2 / \lambda L$ - число Френеля. Для определения знака ξ_1 надо оценить величину числа Френеля F . Так как $R_f \ll R$, то из (20) находим $F \gg 0,15$. В случае обычных для оптики величин $\lambda \sim 10^{-4}$ см, $R \sim 1-10$ см, $L \sim 10-10^2$ см имеем $R_f \sim 10^{-2}$ см, $F \sim 10^2 - 10^5$. Следовательно, $\xi_1 < 0$. Тогда (27) дает

$$\sigma(\xi_1) = 0.068 F^{-2}. \quad (28)$$

В точке $\xi = \xi_1$ параметр порядка (27) возрастает скачком от нуля до величины (28). Однако этот скачок невелик, поскольку при $F \gg 1$, согласно (28), $\sigma(\xi_1) \ll 1$. То есть происходит фазовый переход первого рода, близкий ко второму.

Увеличение характеристики накачки ξ влечет за собой увеличение числа нитей в соответствии с (16). Параметр порядка $\sigma(\xi)$ при этом тоже растет. Но число нитей фиксированного радиуса (20) не может увеличиваться бесконечно, оно ограничено значением N_c , при котором в системе осуществляется плотная упаковка нитей. Это число N_c , достигаемое при $\xi = \xi_0$, определяется равенством

$$N_0 = N_f(\xi_0) = c_0 \left(\frac{R}{R_f} \right)^2,$$

в котором c_0 - геометрический параметр плотной упаковки. Отсюда, учитывая (16), находим

$$\xi_0 = 2c_0 - 1.$$

При $c_0 > \frac{1}{2}$ характеристика накачки $\xi_0 > 0$. Из выражения (27) следует

$$\sigma(\xi_0) = 3(4c_0 - 3c_0^2 - 1) \quad (29)$$

После того как в системе достигается плотная упаковка, нити начинают сильно взаимодействовать между собой, и распределение возбуждений расплывается в однородное. При этом параметр порядка надо снова приравнять нулю. Для оценки происходящего при $\xi = \xi_0$ скачка параметра порядка возьмем $c_0 = 0,9$. Тогда

$$\sigma(\xi_0) = 0,6 \quad (\xi_0 = 0,8) \quad (30)$$

Следовательно, переход от нитевидной структуры к однородному состоянию при $\xi = \xi_0$ происходит как хорошо развитый фазовый переход первого рода.

5. Интенсивность излучения

При небольшой величине характеристики накачки $\xi < 0$ интенсивность излучения системой также может быть невелика. Поэтому необходим аккуратный расчет этой величины.

Интенсивность излучения системой через сферу радиуса r , окружающую область V_2 , объема $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, будем вычислять по общей формуле

$$I_r(t) = -\frac{d}{dt} W_r(t) \quad (31)$$

в которой, с учетом квантового приближения вращающейся волны^{/7/},

$$W_r(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_2} \langle \vec{E}^+(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{H}^+(\vec{r}, t) \vec{H}(\vec{r}, t) \rangle d\vec{r}$$

Полную интенсивность излучения (31), используя уравнения Максвелла, можно представить в виде интеграла

$$I_r(t) = \int I_r(\vec{n}, t) d\Omega$$

по телесному углу Ω от интенсивности излучения

$$I_r(\vec{n}, t) = \vec{S}(\vec{r}, t) \vec{n} r^2 \quad (32)$$

в направлении вектора $\vec{n} = \vec{r}/r$, где вектор Пойнтинга

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}^+(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \rangle$$

также записан в приближении вращающейся волны^{/7/}.

Как обычно, будем интересоваться интенсивностью излучения в далекой зоне. Подставляя в (32) электрическое и магнитное поле, создаваемое ансамблем N излучателей в точке \vec{r} ,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}, t), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_i \vec{H}_i(\vec{r}, t), \\ \vec{E}_i(\vec{r}, t) &= \frac{k^2(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \times [\vec{d}_i \times (\vec{r}-\vec{r}_i)] \exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_i|) \sigma_i^-(t), \\ \vec{H}_i(\vec{r}, t) &= \frac{k^2(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \times \vec{d}_i \exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_i|) \sigma_i^-(t), \end{aligned}$$

используем разложение

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| \approx r + \vec{n} \cdot \vec{r}_i, \quad (r \gg |\vec{r}_i|; i = 1, 2, \dots, N)$$

Интенсивности (31) и (32) для волновой зоны, как и должно быть, не зависят от радиуса сферы $r \gg |\vec{r}_i|$,

$$I_r(t) \equiv I(t), \quad I_r(\vec{n}, t) \equiv I(\vec{n}, t)$$

Интенсивность излучения в направлении \vec{n} принимает вид

$$I(\vec{n}, t) = \frac{4\omega^4}{3c^3} \sum_{ij} f_{ij}(\vec{n}) (\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j) \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle, \quad (33)$$

где

$$f_{ij}(\vec{n}) = \frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{d}_i)(\vec{n} \cdot \vec{d}_j)}{(\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j)} \right] \exp\left[ik \vec{n} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \quad (34)$$

При выводе формулы (33) направления диполей \vec{d}_i никак не конкретизировались, тогда как в приводимых в литературе^{/5,7,8/} выражениях, эквивалентных (33), обычно предполагается, что все диполи поляризованы вдоль одного направления: $\vec{d}_i \parallel \vec{d}_j$. Это предположение вполне оправдано, когда рассматриваются системы, приведенные в такое поляризованное состояние мощным начальным импульсом^{/5,7,8/}, и если

в них не возникает никаких сверхструктур возбуждений. Даже если нитевидная структура инверсон-поляритонных возбуждений и образуется в системе, но внешняя накачка достаточно сильна ($\xi > 0$), то, как было показано [2,3], еще сохраняется выстроенность диполей d_i вдоль направления поляризации резонансного поля (I). В случае же слабой накачки ($\xi < 0$) поляризация дипольных моментов перехода (5), согласно (I3), различна внутри нитей и вне их. Это усложнение необходимо учитывать, вычисляя интенсивность излучения по общей формуле (33).

Выделяя в (33) слагаемые с совпадающими и отличающимися друг от друга индексами и принимая во внимание равенства

$$2 \sigma_i^+(t) \sigma_i^-(t) = 1 + \sigma_i^2(t), \quad f_{ii}(\vec{n}) = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta_i,$$

интенсивность излучения (33) можно разбить на две части,

$$I(\vec{n}, t) = I_{inc}(\vec{n}, t) + I_{coh}(\vec{n}, t), \quad (35)$$

некогерентную

$$I_{inc}(\vec{n}, t) = \frac{d^2 \omega^4}{4\pi c^3} \sum_i \left[1 + \langle \sigma_i^2(t) \rangle \right] \sin^2 \vartheta_i$$

и когерентную

$$I_{coh}(\vec{n}, t) = \frac{4\omega^4}{3c^3} \sum_{i \neq j} f_{ij}(\vec{n}) (\vec{d}_i \vec{d}_j) \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle,$$

где

$$\vartheta_i \equiv \arccos(\vec{u}_i \cdot \vec{n}).$$

Принимая во внимание (9), (I0) и (I3), убеждаемся, что в рассматриваемой ситуации все излучение, как некогерентное, так и когерентное, происходит от нитей. Для некогерентной части получаем

$$I_{inc}(\vec{n}, t) = N(1+\xi) \frac{d^2 \omega^4}{8\pi c^3} \left(1 + \frac{\Delta^2 + \delta_2^2}{\Delta^2 + \bar{\gamma}^2} \right) \sin^2 \vartheta, \quad (36)$$

где

$$\vartheta \equiv \arccos(\vec{e}_0 \cdot \vec{n}).$$

Напомним, что в соответствии с распространением поля усиливаемой резонансной моды (I) вдоль оси \vec{z} поляризация $\vec{e}_0 \perp \vec{e}_2$. Для когерентной части интенсивности излучения находим

$$I_{coh}(\vec{n}, t) = N^2(1+\xi)^2 \pi^2 \frac{\omega E^2 d^4 (\Delta^2 + \delta_2^2)}{4\lambda^3 (\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)^2} \times \\ \times F_f(k\vec{n} - k\vec{e}_2) \sin^2 \vartheta, \quad (37)$$

где введено определение фактора системы с нитевидной структурой возбуждений

$$F_f(\vec{k}) = \left| \frac{1}{N_f V_f} \int_{V_f} e^{i\vec{k}\vec{z}} d\vec{z} \right|^2,$$

в котором интегрирование происходит лишь по области V_f , занимаемой N_f нитями, каждая из которых имеет объем $v_f = \pi R_f^2 L$.

Интегральная интенсивность излучения, аналогично (35), представляется суммой некогерентной и когерентной частей

$$I(t) = I_{inc}(t) + I_{coh}(t). \quad (38)$$

Проинтегрировав по телесному углу выражение (36) с учетом равенств

$$\int \sin^2 \vartheta d\Omega = \frac{8\pi}{3}, \quad \int \cos^2 \vartheta d\Omega = \frac{4\pi}{3}, \\ \int f_{ii}(\vec{n}) d\Omega = 1,$$

имеем для некогерентного излучения

$$I_{inc}(t) = N(1+\xi) \frac{d^2 \omega^4}{3c^3} \left(1 + \frac{\Delta^2 + \delta_2^2}{\Delta^2 + \bar{\gamma}^2} \right). \quad (39)$$

Воспользовавшись тем, что в нашем случае справедливы условия

$$\frac{\lambda}{\pi R_f} \sim 10^{-6} \ll 1, \quad \frac{\pi R_f^2}{\lambda L} \sim 0.15 \ll 1,$$

можно показать [8], что

$$\int \sin^2 \vartheta F_f(k\vec{n} - k\vec{e}_2) d\Omega \approx \frac{\pi\lambda}{L}$$

При этом полная интенсивность когерентного излучения равна

$$I_{coh}(t) = N^2(1+\xi)^2 \bar{n}^3 \frac{\omega E^2 d^4 (\Delta^2 + \gamma_0^2)}{4L \lambda^2 (\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)^2} \quad (40)$$

Подчеркнем, что наличие когерентного излучения при слабой накачке целиком обязано явлению филаментации. Действительно, если бы нити возбуждений не возникали, то в силу расфазированности излучателей было бы

$$I_{coh}^{(0)}(\vec{n}, t) = 0, \quad (\xi_i \equiv \xi < 0)$$

Из выражений (36) и (37) следует, что при возникновении нитевидной структуры возбуждений интенсивность излучения приобретает существенно анизотропную диаграмму направленности. Интенсивность когерентного излучения (40) пропорциональна N^2 , то есть соответствует так называемому сверхизлучению. Точнее говоря, так как $L \sim \alpha N^{1/3}$, то

$$I_{coh}(t) \sim N^{5/3}$$

6. Коэффициенты когерентности

Для того чтобы выявить, при каких условиях когерентное излучение преобладает над некогерентным, удобно определить коэффициенты когерентности двух типов: коэффициент когерентности в направлении \vec{n}

$$C_{coh}(\vec{n}, t) = I_{coh}(\vec{n}, t) / I_{inc}(\vec{n}, t) \quad (41)$$

и полный коэффициент когерентности

$$C_{coh}(t) = I_{coh}(t) / I_{inc}(t) \quad (42)$$

При этом интенсивности излучений (35) и (38) принимают вид

$$I(\vec{n}, t) = I_{inc}(\vec{n}, t) \left[1 + C_{coh}(\vec{n}, t) I_{inc}(\vec{n}, t) \right],$$

$$I(t) = I_{inc}(t) \left[1 + C_{coh}(t) I_{inc}(t) \right];$$

Так как в квантовом приближении вращающейся волны интенсивности излучений, вычисленные в предыдущем пункте, от времени не зависят, то соответственно

$$C_{coh}(\vec{n}, t) = C_{coh}(\vec{n}), \quad C_{coh}(t) = C_{coh} \quad (43)$$

Из (41), (36) и (37) находим коэффициент когерентности в направлении \vec{n}

$$C_{coh}(\vec{n}) = C_{coh}(\vec{e}_2) F_f(k\vec{n} - k\vec{e}_2), \quad (44)$$

где коэффициент когерентности в направлении \vec{e}_2

$$C_{coh}(\vec{e}_2) = N(1+\xi) \frac{d^2 E^2 (\Delta^2 + \gamma_2^2)}{4(\Delta^2 + \bar{\gamma}^2)(2\Delta^2 + \bar{\gamma}^2 + \gamma_2^2)} \quad (45)$$

Для упрощения анализа положим, что справедливы неравенства

$$\frac{d^2 E^2}{\gamma_1 \gamma_2} \ll 1, \quad \frac{|\Delta|}{\gamma_2} \ll 1 \quad (46)$$

Тогда $\bar{\gamma} \approx \gamma_2$. При этом для направления \vec{e}_2 , в котором интенсивность когерентного излучения (37) максимальна, коэффициент когерентности (45) равен

$$C_{coh}(\vec{e}_2) = N(1+\xi) \frac{d^2 E^2}{8\gamma_2^2} \quad (47)$$

В качестве полного коэффициента когерентности (42), подставляя в него (39) и (40), получаем

$$C_{coh} = \frac{3\lambda}{8L} C_{coh}(\vec{e}_2) \quad (48)$$

Будем говорить, что осуществляется когерентный, или сверхизлучательный, режим, если коэффициент когерентности гораздо больше единицы. При $\lambda \ll L$ из (48) следует, что $C_{coh} \ll C_{coh}(\vec{e}_2)$, поэтому

сверхизлучательный режим в интегральном смысле затруднен по сравнению со сверхизлучением в направлении \vec{e}_2 . Когерентное излучение в направлении \vec{e}_2 превалирует над некогерентным, если

$$N \frac{d^2 E^2}{8\gamma_2^2} \gg 1, \quad (C_{coh}(\vec{e}_2) \gg 1). \quad (49)$$

Сверхизлучательный режим в интегральном смысле осуществляется в системе при условии

$$N^{2/3} \frac{3\lambda d^2 E^2}{64a\gamma_2^2} \gg 1 \quad (C_{coh} \gg 1). \quad (50)$$

Таким образом, несмотря на то, что весь ансамбль атомов не излучает когерентно, а распадается на отдельные когерентные нити, при увеличении полного числа излучателей N число этих нитей может стать достаточно большим, чтобы даже при слабой накачке выполнялись неравенства (49) и (50), то есть чтобы стал возможным сверхизлучательный режим.

Литература

1. Емельянов В.И., Юкалов В.И. - Опт. спектр., 1986, 60, с. 634.
2. Юкалов В.И. - В кн.: Проблемы статистической механики, с. 468, ОИЯИ Д17-88-95, Дубна, 1988.
3. Yukalov V.I. - J. Mod. Opt., 1988, 35, p. 35.
4. Yukalov V.I. - Comm. Oxford Univ DTP 98-80, Oxford, 1980.
5. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. - Кооперативные явления в оптике. Наука, Москва, 1988.
6. Yukalov V.I. - Acta Phys. Polon., 1980, A57, p. 295.
7. Agarwal G.S. - Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission, Springer, Berlin, 1977.
8. Allen L., Eberly J. - Optical Resonance and Two-Level Atoms, Wiley, New York, 1975.
9. Iooss G., Joseph D. - Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer, New York, 1980.
10. Shumovsky A.S., Yukalov V.I. - Lectures on Phase Transitions, World Scientific, Singapore, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июня 1989 года.