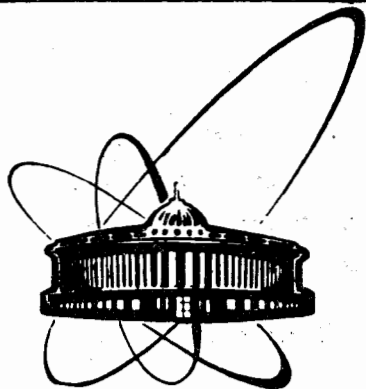


89-431



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

K13

P17-89-431

Е.П.Каданцева, С.Ф.Лягушин, А.С.Шумовский

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1989

Каданцева Е.П., Лягушин С.Ф., Шумовский А.С. P17-89-431
Сверхизлучение с учетом потерь

Найдено выражение для интенсивности сверхизлучения в резонаторе с конечной добротностью. Исследована зависимость формы импульса излучения от начального числа тепловых фотонов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов.

Kadantseva E.P., Lagushin S.F., Shumovsky A.S. P17-89-431
Superradiation with Losses

An expression for the superradiation intensity in a cavity with finite quality is obtained. The dependence of the pulse form on the initial number of thermal photons is examined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

Важное значение в современной физике имеет эффект самопроизвольного возникновения динамического дальнего порядка в системах квантовых излучателей. Основой для описания такого эффекта стал предложенный Дикке^{/1/} гамильтониан

$$H_D = \hbar \omega a^\dagger a + \hbar \omega_0 R_3 + \hbar g (R^+ a + a^\dagger R^-), \quad (I)$$

где a, a^\dagger - бозонные операторы электромагнитного поля, ω - частота рассматриваемой моды, R_3, R^+, R^- - коллективные операторы двухуровневых излучателей, ω_0 - частота перехода.

Для гамильтониана Дикке (I) удается показать возможность перехода системы благодаря взаимодействию излучателей через поле в "сверхизлучательное" состояние, исследовать динамику процесса вывешивания системы, при котором интенсивность оказывается пропорциональной N^2 (N - число излучателей)^{/2,3/}.

Отметим существование интеграла движения у системы, описываемой гамильтонианом Дикке:

$$a^\dagger a + R_3 = const,$$

что легко проверить, вычислив коммутатор $[a^\dagger a + R_3, H_D] = 0$. Соответственно, можно говорить о сохранении числа "возбуждений" ("частиц") в системе, в то время как сохранение энергии бозонной и квазиспиновой подсистем^{/2/}

$$\hbar \omega a^\dagger a + \hbar \omega_0 R_3 = const$$

имеет место лишь в резонансном случае $\omega = \omega_0$.

Метод исключения бозонных переменных, предложенный Боголюбовым^{/4/}, дал возможность математически строгого квантового рассмотрения динамики сверхизлучения^{/5,6/}. При этом учет неоднородного лоренцева уширения в задаче Дикке естественным образом при-

водит к возникновению экспоненциального множителя, соответствующего затуханию корреляции, в выражении для одновременного коррелятора квазиспиновых переменных. В то же время гамильтониан Дикке, а также его многомодовая и пространственно-неоднородная модификации никак не учитывают взаимодействие сверхизлучательной системы со средой, в которой она находится, и конечной температуры среды. Ныне экспериментальное исследование явления сверхизлучения приводит к необходимости учета свойств резонатора, влияние которого может существенно изменять параметры сверхизлучательного импульса^{/7,8/}.

Построим гамильтониан, учитывающий для задачи Дикке неидеальный характер резонатора, в котором реализуется сверхизлучение, и связанные с этим потери. Наиболее плодотворным оказывается путь, когда среда представляется в виде набора независимых осцилляторов (фононы) и в явном виде записывается взаимодействие квантов электромагнитного поля с этими осцилляторами. Такой путь анализировался, в частности, Ликселлом^{/9/}.

Будем исследовать гамильтониан

$$H = H_D + \sum_q \hbar \psi_q b_q^\dagger b_q + \sum_q \hbar \chi_q (b_q^\dagger a + a^\dagger b_q), \quad (2)$$

где b_q^\dagger, b_q - бозонные операторы рождения и уничтожения "квантов потерь", ψ_q - их частоты, χ_q - константы взаимодействия. Для него существует интеграл движения

$$a^\dagger a + R_3 + \sum_q b_q^\dagger b_q = const. \quad (3)$$

Основная цель дальнейшего рассмотрения - получить выражение для интенсивности электромагнитного излучения системы с гамильтонианом (2), не включающее бозонных переменных b_q, b_q^\dagger .

Составим уравнения движения для фотонных операторов

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} a &= \omega a + g R^- + \sum_q x_q b_q, \\ i \frac{d}{dt} a^+ &= -\omega a^+ - g R^+ - \sum_q x_q b_q^+. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения движения для операторов b_q, b_q^+ , соответственно, имеют вид

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} b_q &= \psi_q b_q + x_q a, \\ i \frac{d}{dt} b_q^+ &= -\psi_q b_q^+ - x_q a^+. \end{aligned} \quad (5)$$

Их формальное решение

$$\begin{aligned} b_q(t) &= \tilde{b}_q(t) - i x_q \int_{t_0}^t e^{-i\psi_q(t-\tau)} a(\tau) d\tau, \quad \tilde{b}_q(t) = b_q(t_0) e^{-i\psi_q(t-t_0)}, \\ b_q^+(t) &= \tilde{b}_q^+(t) + i x_q \int_{t_0}^t e^{i\psi_q(t-\tau)} a^+(\tau) d\tau, \quad \tilde{b}_q^+(t) = b_q^+(t_0) e^{i\psi_q(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Воспользуемся марковским приближением для a, a^+ :

$$a(\tau) \approx a(t) e^{i\omega(t-\tau)}, \quad a^+(\tau) \approx a^+(t) e^{-i\omega(t-\tau)}.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} b_q(t) &= \tilde{b}_q(t) - i x_q a(t) \left\{ i \frac{P}{\omega - \psi_q} + \pi \delta(\omega - \psi_q) \right\}, \\ b_q^+(t) &= \tilde{b}_q^+(t) + i x_q a^+(t) \left\{ -i \frac{P}{\omega - \psi_q} + \pi \delta(\omega - \psi_q) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где мы воспользовались обычным предположением $t_0 \rightarrow -\infty$ и соотношением

$$\int_{t_0}^t e^{i\tau(t-\tau)} d\tau = \int_0^{t-t_0} e^{i\tau x} dx \xrightarrow{t_0 \rightarrow -\infty} i \frac{P}{\tau} + \pi \delta(\tau).$$

Подставляя (7) в (4), приходим к новым уравнениям для операторов a, a^+

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a &= -i(\omega + \Delta\omega)a - \frac{\gamma}{2} a - i g R^- + F, \\ \frac{d}{dt} a^+ &= i(\omega + \Delta\omega)a^+ - \frac{\gamma}{2} a^+ + i g R^+ + F^+, \end{aligned} \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \sum_q x_q^2 \frac{P}{\omega - \psi_q}, \\ \gamma &= 2\pi \sum_q x_q^2 \delta(\omega - \psi_q), \\ F &= -i \sum_q x_q \tilde{b}_q, \quad F^+ = i \sum_q x_q \tilde{b}_q^+. \end{aligned}$$

Такие же $\Delta\omega$ и γ возникают в^{9/} при отличном от нашего подходе; F, F^+ носят характер "случайных сил"^{10/}. Выпишем формальное решение уравнений (8)

$$\begin{aligned} a(t) &= \tilde{a}(t) - i g A + \mathcal{F}, \\ a^+(t) &= \tilde{a}^+(t) + i g A^+ + \mathcal{F}^+, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= a(t_0) e^{-i\tilde{\omega}(t-t_0) - \frac{\gamma}{2}(t-t_0)}, \\ \tilde{a}^+(t) &= a^+(t_0) e^{i\tilde{\omega}(t-t_0) - \frac{\gamma}{2}(t-t_0)}, \quad \tilde{\omega} = \omega + \Delta\omega; \\ A &= \int_{t_0}^t e^{i(\tilde{\omega} - \frac{\gamma}{2})(t-\tau)} R^-(\tau) d\tau, \quad A^+ = \int_{t_0}^t e^{i(\tilde{\omega} - \frac{\gamma}{2})(t-\tau)} R^+(\tau) d\tau, \\ \mathcal{F} &= \int_{t_0}^t e^{i(\tilde{\omega} - \frac{\gamma}{2})(t-\tau)} F(\tau) d\tau, \quad \mathcal{F}^+ = \int_{t_0}^t e^{i(\tilde{\omega} - \frac{\gamma}{2})(t-\tau)} F^+(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теперь получим выражение для интенсивности электромагнитного излучения. По определению,

$$I = \hbar \omega \frac{d}{dt} \langle a^+ a \rangle.$$

Запишем уравнение движения для оператора $a^+ a$:

$$i \frac{d}{dt} a^+ a = -g R^+ a + g a^+ R^- - \sum_q x_q b_q^+ a + \sum_q x_q a^+ b_q.$$

Перейдем к средним и используем (7). В результате получаем

$$\frac{d}{dt} \langle a^+ a \rangle = ig \langle R^+ a \rangle - ig \langle a^+ R^- \rangle - \gamma \langle a^+ a \rangle + \langle F^+ a \rangle + \langle a^+ F \rangle \quad (10)$$

В последних членах проведем исключение бозонных переменных при помощи леммы Боголюбова:

$$\begin{aligned} \langle a^+ F \rangle &= -i \sum_q x_q \langle a^+ b_q^+ \rangle = -i \sum_q x_q n_q \langle [b_q^+, a^+] \rangle = \\ &= -i \sum_q x_q n_q \left\{ i x_q \left[i \frac{P}{\omega - \psi_q} + \pi \delta(\omega - \psi_q) \right] \right\} = \sum_q x_q^2 n_q \left\{ i \frac{P}{\omega - \psi_q} + \pi \delta(\omega - \psi_q) \right\}, \\ \langle F^+ a \rangle &= i \sum_q x_q \langle b_q^+ a \rangle = -i \sum_q x_q n_q \langle [b_q^+, a] \rangle = \\ &= -i \sum_q x_q n_q \left\{ -i x_q (-1) \left[-i \frac{P}{\omega - \psi_q} + \pi \delta(\omega - \psi_q) \right] \right\} = \sum_q x_q^2 n_q \left\{ -i \frac{P}{\omega - \psi_q} + \pi \delta(\omega - \psi_q) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали (7), коммутационное соотношение $[a, a^+] = 1$ и обозначили n_q - число заполнения соответствующей моды термостата в начальный момент, определяющееся его температурой.

Итак,

$$\langle F^+ a \rangle + \langle a^+ F \rangle = 2\pi \sum_q x_q^2 n_q \delta(\omega - \psi_q) = \gamma n_\omega. \quad (11)$$

Применяя формулы (9), получаем

$$\begin{aligned} \langle R^+ a \rangle &= \langle R^+ \tilde{a} \rangle - ig \langle R^+ A \rangle + \langle R^+ F \rangle, \\ \langle a^+ R^- \rangle &= \langle \tilde{a}^+ R^- \rangle + ig \langle A^+ R^- \rangle + \langle F^+ R^- \rangle. \end{aligned}$$

Снова пользуемся леммой Боголюбова:

$$\begin{aligned} \langle R^+ \tilde{a} \rangle &= ig n \langle [A, R^+] \rangle, \\ \langle \tilde{a}^+ R^- \rangle &= ign \langle [A^+, R^-] \rangle, \end{aligned}$$

где n - число заполнения моды электромагнитного поля в начальный момент, что определяется состоянием поля. В связи с отсутствием прямого взаимодействия квазиспиновой подсистемы с термостатом

$$\begin{aligned} \langle R^+ F \rangle &= \langle R^+ \rangle \langle F \rangle = 0, \\ \langle F^+ R^- \rangle &= \langle F^+ \rangle \langle R^- \rangle = 0. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для интенсивности излучения:

$$I = \hbar \omega \left\{ -\gamma \langle a^+ a \rangle + \gamma n_\omega + g^2 (\langle R^+ A \rangle + \langle A^+ R^- \rangle) + n g^2 (\langle [R^+, A] \rangle + \langle [A^+, R^-] \rangle) \right\} \quad (12)$$

Итак, корректный учет взаимодействия со средой привел к появлению дополнительных членов в выражении для интенсивности, в том числе $-\gamma \langle a^+ a \rangle$, обеспечивающего затухание, связанное с конечной добротностью резонатора: $\gamma = \omega/Q$.

В (12) вошли средние от квазиспиновых операторов. Вычислим их, используя марковское приближение и представление о неоднородном лоренцевом уширении, т.е. будем полагать

$$\begin{aligned} R^-(\tau) &\approx R^-(t) e^{i\omega_0(t-\tau) - \frac{1}{2T}(t-\tau)}, \\ R^+(\tau) &\approx R^+(t) e^{-i\omega_0(t-\tau) - \frac{1}{2T}(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \langle R^+ A \rangle &= \langle R^+(t) R^+(t) \rangle \int_{t_0}^t e^{i(\omega_0 - \tilde{\omega})(t-\tau) - \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{T})(t-\tau)} d\tau, \\ \langle A^+ R^- \rangle &= \langle R^+(t) R^-(t) \rangle \int_{t_0}^t e^{-i(\omega_0 - \tilde{\omega})(t-\tau) - \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{T})(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Теперь используем соотношения

$$\int_{t_0}^t e^{ia(t-\tau)-b(t-\tau)} d\tau \xrightarrow{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{ia+b}{a^2+b^2}$$

$$[R^+(t), R^-(t)] = \mathcal{L}R_3(t)$$

и обозначим

$$\Gamma \equiv g \frac{\gamma + \frac{1}{T}}{(\bar{\omega} - \omega_0)^2 + \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{T})^2}$$

Выражение для интенсивности запишется в виде

$$I = \hbar\omega \{-\gamma \langle a^+ a \rangle + \gamma n_\omega + \Gamma \langle R^+ R^- \rangle + \mathcal{L}n\Gamma \langle R_3 \rangle\}. \quad (I3)$$

Поведение $\langle R^+ R^- \rangle$ и $\langle R_3 \rangle$ в зависимости от времени найдем, построив иерархию кинетических уравнений для средних от квазиспиновых операторов с использованием метода исключения бозонных переменных. Будем исходить из уравнения движения

$$i \frac{d}{dt} \langle 0 \rangle = \omega_0 \langle [0, R_3] \rangle + g \langle [0, R^+] a \rangle + g \langle a^+ [0, R^-] \rangle.$$

Используем для a , a^+ представление (9), учтем нулевой вклад случайных сил. Тогда уравнение иерархии сохраняет обычный вид^{/II/}:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 0 \rangle = & -i\omega_0 \langle [0, R_3] \rangle + \Gamma \langle [R^+, 0] R^- \rangle + \langle R^+ [0, R^-] \rangle + \\ & + \mathcal{L}n\Gamma \langle [[R^+, 0], R^-] \rangle + \langle [R^+, [0, R^-]] \rangle. \end{aligned}$$

Обрывая цепочку уравнений с использованием приближения хаотических фаз $\langle R^+ R^- R_3 \rangle \approx \langle R^+ R^- \rangle \langle R_3 \rangle$, приходим к замкнутой системе уравнений относительно переменных

$$y_1 = \langle R_3 \rangle, \quad y_2 = \langle R^+ R^- \rangle, \quad y_3 = \langle R_3^2 \rangle:$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\Gamma y_1 - \mathcal{L}n\Gamma y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \mathcal{L}\Gamma y_2 y_1 - \mathcal{L}\Gamma y_2 + \mathcal{L}n\Gamma y_2 + \mathcal{L}n\Gamma y_3 \quad (I4)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -\mathcal{L}\Gamma y_2 y_1 + \Gamma y_2 - \mathcal{L}n\Gamma y_1 + \mathcal{L}n\Gamma y_2 - \mathcal{L}n\Gamma y_3$$

Сравнивая полученные уравнения с (I3), можем записать интенсивность в виде

$$I = \hbar\omega \{-\gamma \langle a^+ a \rangle + \gamma n_\omega - \frac{d \langle R_3 \rangle}{dt}\} \quad (I5)$$

Выражение для интенсивности дает дифференциальное уравнение относительно переменной $y_1 = \langle a^+ a \rangle$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\gamma y_1 + \gamma n_\omega + \Gamma y_2 + \mathcal{L}n\Gamma y_1. \quad (I6)$$

Присоединяя (I6) к (I4), получаем систему дифференциальных уравнений, позволяющую численно определить $\langle a^+ a \rangle$ в зависимости от времени и, соответственно, интенсивность.

В частном случае $n = 0$ (поле в начальный момент отсутствует) система уравнений допускает аналитическое исследование. Тогда первые два уравнения (I4) образуют замкнутую систему, имеющую интеграл движения $y_2 + y_1^2 - \mathcal{L}y_1 = const \equiv M$. Она сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными для

y_1 :

$$\frac{dy_1}{dt} = -\Gamma(M - y_1^2 + \mathcal{L}y_1). \quad (I7)$$

Соответственно,

$$\int \frac{dy_1}{y_1^2 - \mathcal{L}y_1 - M} = \Gamma t + const. \quad (I8)$$

Интеграл в левой части (I8) берется^{/I2/}:

$$\int \frac{dy_1}{y_1^2 - \mathcal{L}y_1 - M} = -\frac{1}{\sqrt{M+1}} \text{Arth} \frac{y_1 - 1}{\sqrt{M+1}}.$$

При этом учитываем, что в случае начальных условий $y_1 = N/\varepsilon$, $y_2 = N$ (полностью инвертированная, некоррелированная система)

$$M = \frac{N^2}{4}$$

Выберем константу ($const \equiv -\Gamma \tilde{t}$) в правой части (18) так, чтобы при $t = 0$ было $y_1 = N/\varepsilon$:

$$\Gamma \tilde{t} = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \operatorname{Arth} \frac{N/\varepsilon - 1}{\sqrt{M+1}}$$

Тогда в момент t_0 , когда $y_1 = 0$, имеем

$$\Gamma(t_0 - \tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \operatorname{Arth} \frac{1}{\sqrt{M+1}}$$

т.е. время задержки $t_0 \approx \tilde{t}$.

Итак, зависимость y_1 от t имеет вид

$$y_1 = 1 - \sqrt{M+1} \operatorname{th} \left\{ \Gamma \sqrt{M+1} (t - \tilde{t}) \right\}. \quad (19)$$

$\frac{dy_1}{dt}$ вычисляется в явном виде:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\Gamma(M+1) \operatorname{sech}^2 \left\{ \Gamma \sqrt{M+1} (t - \tilde{t}) \right\}. \quad (20)$$

Для y_4 получаем уравнение

$$\frac{dy_4}{dt} = -\gamma y_4 + \gamma n_\omega + \Gamma(M+1) \operatorname{sech}^2 \left\{ \Gamma \sqrt{M+1} (t - \tilde{t}) \right\}, \quad (21)$$

которое решается методом вариации постоянной. Начальное условие $y_4|_{t=0} = 0$.

$$y_4 = \int_0^t \left\{ \gamma n_\omega + \Gamma(M+1) \operatorname{sech}^2 \left\{ \Gamma \sqrt{M+1} (\tau - \tilde{t}) \right\} \right\} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \quad (22)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^t \operatorname{sech}^2(B(\tau - \tilde{t})) e^{\gamma\tau} d\tau = \int_{\tilde{t}}^{t-\tilde{t}} \operatorname{sech}^2 B \xi e^{\gamma\xi} e^{\gamma\tilde{t}} d\xi = e^{\gamma\tilde{t}} \int_{\tilde{t}}^{t-\tilde{t}} \frac{e^{(2B+\gamma)\xi}}{e^{4B\xi} + e^{2B\xi} + 1} d\xi$$

Заменой переменных $X = e^{2B\xi}$ интеграл $\int \frac{e^{(2B+\gamma)\xi} d\xi}{e^{4B\xi} + e^{2B\xi} + 1}$ сводится к $\int \frac{X^{\gamma/2B}}{X^2 + e^{2X} + 1} dx$. В общем случае такой интеграл не берется в квадратурах. Но обычно $\gamma \ll B = \Gamma\sqrt{M+1}$, и можем положить $X^{\gamma/2B} \approx 1$, тогда интеграл легко берется: $\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C$.

В этом приближении

$$\begin{aligned} \int_0^t \Gamma(M+1) \operatorname{sech}^2 \left\{ \Gamma \sqrt{M+1} (\tau - \tilde{t}) \right\} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau &= \\ &= \Gamma(M+1) e^{-\gamma(t-\tilde{t})} \frac{e}{\Gamma \sqrt{M+1}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\sqrt{M+1} e^{-\gamma(t-\tilde{t})} \frac{1}{(x+1)} \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

где

$$x_1 = e^{-2\Gamma\sqrt{M+1}\tilde{t}}, \quad x_2 = e^{2\Gamma\sqrt{M+1}(t-\tilde{t})}$$

В результате получаем

$$\langle a^+ a \rangle = n_\omega (1 - e^{-\gamma t}) + 2\sqrt{M+1} e^{-\gamma(t-\tilde{t})} \left(\frac{1}{e^{-2\Gamma\sqrt{M+1}\tilde{t}} + 1} - \frac{1}{e^{2\Gamma\sqrt{M+1}(t-\tilde{t})} + 1} \right) \quad (23)$$

Дифференцируя по времени, получаем выражение для интенсивности и видим, что учет γ ведет к возникновению асимметрии импульса и сдвигу максимума.

Приведем результаты численных расчетов. Решалась система уравнений (14), (16) с начальными условиями:

$$y_1 = \frac{N}{\varepsilon}, \quad y_2 = N, \quad y_3 = \frac{N^2}{4}, \quad y_4 = n$$

Выбирали $N = 10^3$, $\Gamma = 5 \cdot 10^8$ Гц. Функция y_4 дифференцировалась численно. Вначале фиксировалось значение $\gamma = 10^7$ Гц $= 2 \cdot 10^{-2}$ Гц и варьировалось n : полагали $n = 0, 1, 2, 3, 10$; затем при фиксированном $n = 1$ изменялось значение γ : $\gamma = 0, 10^7, 10^8$ Гц.

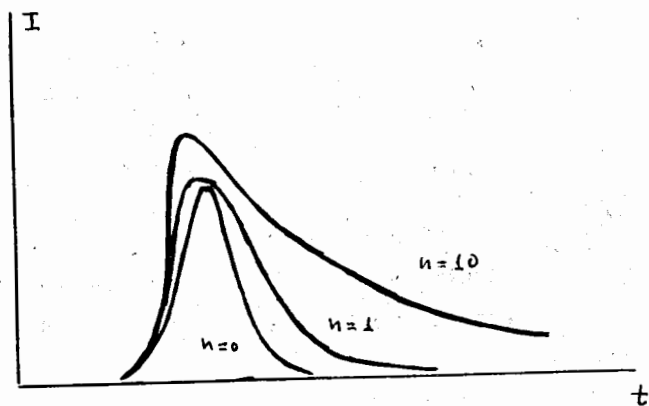


Рис.1. Зависимость интенсивности от времени при $\gamma = \text{const}$ и изменяющемся n .

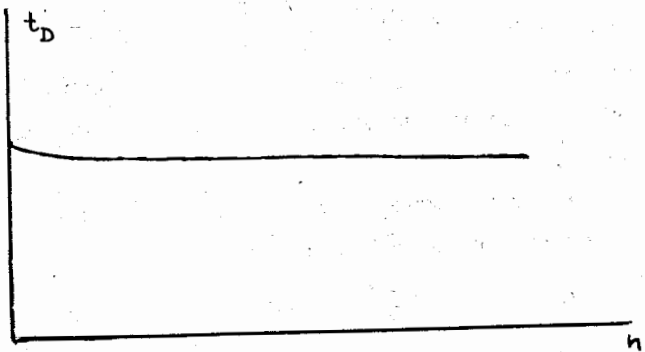


Рис.2. Зависимость времени задержки от n при $\gamma = \text{const}$.

Характер результатов отражен на рис. 1-2. С ростом n максимум I растет и сдвигается в область меньших времен примерно по линейному закону. Спад происходит медленнее нарастания, у импульсов появляется "хвост", что совпадает с экспериментальными результатами (см. /13/). При фиксированном n с ростом γ снижается максимум I и сдвигается в область меньших времен по логарифмическому закону. Асимметрия импульса имеет тот же характер, что и вызываемая ненулевым n . Величина n_{ω} слабо влияет на результат для I , ее в расчетах полагали равной n .

Авторы благодарны Н.Н.Боголюбову(мл.), И.К.Кудрявцеву, Ю.Ф.Киселеву и В.И.Кялоу за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dicke R.H. Phys. Rev. 93 (1954) 99.
2. Gross M., Haroche S. Phys. Rep. 93 (1982) 301.
3. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. УФН 131 (1980) 653.
4. Боголюбов Н.Н. ЭЧАЯ 9(1978) 501.
5. Боголюбов Н.Н.(мл), Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ 52 (1982) 423.
6. Боголюбов Н.Н.(мл), Плечко В.Н., Шумовский А.С. ЭЧАЯ 14 (1983) 1443.
7. Андреев А.В. Письма в ЖТФ 12 (1986) 1025.
8. Киселев Ю.Ф., Прудкогляд А.Ф., Шумовский А.С., Кяалов В.И. ЖЭТФ 94 (1988) 344.
9. Льюиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М., Мир, 1972.

10. Haken H. Laser Theory. (Handbuch der Physik. Bd25/2c, Springer, 1970).
11. Боголюбов Н.Н.(мл), Шумовский А.С. Сверхизлучение. ОИЯИ, РГ7-87-176, Дубна, 1987.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.
13. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. Кооперативные явления в квантовой оптике. М., 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1989 года.