объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-89-376



М.Гнатич

# КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ РЕНОРМГРУППА В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: ХИМИЧЕСКИ АКТИВНАЯ СКАЛЯРНАЯ ПРИМЕСЬ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1989

## ВВЕДЕНИЕ

Применение методов квантово-полевой ренормгруппы к решению задач стохастической теории турбулентности позволило обосновать ряд ранее известных из феноменологических представлений физических результатов из "первых принципов", т.е. исходя из стохастического уравнения Навье-Стокса. Так, на основе этого подхода в 1979 г. [1] была впервые доказана справедливость известного с 1941 г. колмогоровского скейлинга, затем [3,5] теми же методами была рассмотрена более общая задача о скейлинговом поведении составных операторов, входящих в законы сохранения энергии-импульса. Наконец, в работах [4,6] исследовалась задача о турбулентном перемешивании скалярной пассивной примеси и стохастическая магнитная гидродинамика соответственно. В первой дано теоретическое обоснование известного феноменологического закона 4/3 Ричардсона, во второй найдены границы применения теории Колмогорова - Обухова. Показано, что колмогоровский скейлинг нарушается для физических величин, содержащих случайное магнитное поле.

Ниже мы проанализируем стохастическую задачу о турбулентном перемешивании скалярной пассивной примеси, которая химически взаимодействует с основной турбулентной средой. Согласно общей теореме [2,3] такая задача эквивалентна некоторой квантовой теории поля с заданным действием. В настоящей работе доказывается, что такая теория мультипликативно ренормируема, следовательно, можно применить весь стандартный аппарат квантово-полевой ренормгруппы, позволяющий вывести уравнение критического скейлинга, реализуемого в окрестности инфракрасно-устойчивой фиксированной точки. Таких точек оказалось две.

## МОДЕЛЬ

Рассматриваемая модель описывается стохастическим уравнением Навье-Стокса [4] и уравнением диффузии для химически активной примеси /см. [7], гл.VII, §14.5, т.2/:

$$\nabla_t \phi = \nu \Delta \phi - \partial p + F^{\phi},$$

$$\nabla_t \theta = \nu' \Delta \theta - \tilde{\lambda} \theta^{n} + F^{\theta}. \qquad /1/$$

Здесь $\nabla_t \equiv \partial_t + \phi\partial$ - ковариантная производная, $\phi \equiv \phi_i(x) \equiv \phi_i(\vec{x},t)$ - поперечное случайное поле скорости, $\theta \equiv \theta(x)$ - скалярное поле примеси, $p$ - давление, $\nu$, $\nu'$ - коэффициенты вязкости и молекулярной диффузии. Поскольку они имеют одинаковую размерность, дальше мы будем использовать обозначение $\nu' = u\nu$ с безразмерным коэффициентом $u$. Константа $\tilde{\lambda}$ в /1/ - произвольная, показатель степени $n$ может принимать любые положительные целочисленные значения. При $n = 1$ примесь называют химически активной примесью первого рода, при $n = 2$ - второго и т.д. Случайные силы $F^{\phi}, F^{\theta}$ имеют гауссовское распределение с заданной матрицей корреляторов шумов $\langle FF \rangle = D$ /их явный вид см. ниже/.

Согласно общей теореме [2,3] задача /1/ может быть переформулирована в виде квантовой теории удвоенного числа полей $\Phi \equiv \phi, \phi', \theta, \theta'$ с действием вида

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\phi' D^{\phi\phi}\phi' + \frac{1}{2}\theta' D^{\theta\theta}\theta' + \phi'[-\partial_t\phi + \nu_0\Delta\phi - (\phi\partial)\phi] + \theta'[-\partial_t\theta + u_0\nu_0\Delta\theta - (\phi\partial)\theta - \theta^n/n!] \qquad /2/$$

/все нужные интегрирования и свертки по дискретным индексам здесь и далее подразумеваются/. В действие /2/ константа $\tilde{\lambda}$ не входит в явном виде, так как на самом деле она оказалась "лишней": заменой $\tilde{\lambda} = \lambda^{n-1}$ для $n > 1$ /тривиальный случай "массивной" теории с $n = 1$ рассматривать не будем/ и растяжением полей $\theta' \to \lambda\theta'$, $\theta \to \theta/\lambda$ мы убрали ее из выражения /2/. Одновременно мы симметризовали вершину $\theta'\theta^n$. Рассматриваемое действие является неренормированным, константы в нем затравочные и снабжены индексом "o", чтобы отличить их от ренормированных аналогов.

Вернемся к вопросу о выборе явного вида корреляторов шумов. В случае обычной скалярной примеси отличным от нуля был только коррелятор $D^{\phi\phi}$ [4], включение шума $D^{\theta\theta}$ не влияло на результаты, полученные при $D^{\theta\theta} = 0$, просто из-за отсутствия фейнмановских графов, содержащих этот коррелятор. В рассматриваемой задаче это не так. Поэтому мы берем 2x2 матрицу $D$ с ненулевыми диагональными элементами $D^{\phi\phi}$ и $D^{\theta\theta}$; она является и самой общей, поскольку смешанные корреляторы $D^{\phi\theta}$ чисто продольные и не дают вклада в действие /2/ из-за поперечности поля $\phi'$. Корреляторы $D^{\phi\phi}$ /тензорный поперечный/ и $D^{\theta\theta}$ /скалярный/ в импульсно-частотном $(\vec{k},\omega)$-представлении берем в виде

$$D^{\phi\phi}_{is}(\vec{k},\omega) = g_0\nu_0^3 k^{4-2\mu-2\epsilon} P_{is}\,, \qquad /3/$$

$$D^{\theta\theta}(\vec{k},\omega) = \bar{g}_0\nu_0^{2/(n-1)+1} k^{2+4/(n-1)-2\mu-2a\epsilon} \qquad /4/$$

$(k \equiv |\vec{k}|)$. Здесь $P_{is} = \delta_{is} - k_i k_s / k^2$ - поперечный проектор, $g_0$, $\bar{g}_0$ - произвольные положительные константы, которые в нашей задаче играют роль затравочных констант, $\epsilon$, a - произвольные параметры теории, $2\mu$ - размерность пространства k. Вид $D^{\phi\phi}$- стандартный, подробное его обоснование можно найти, например, в [3]. Значение $\epsilon = 2$ соответствует, согласно общим феноменологическим представлениям, реальной накачке энергии в турбулентную среду из области малых импульсов. Заметим, что параметр $\epsilon$ не зависит от размерности пространства, в остальном он в ренормализационной схеме, которой будем пользоваться, совершенно аналогичен параметру отклонения от размерности пространства, равной 4 в $(4-2\epsilon)$ -разложении Вильсона. Логарифмичности теории, т.е. безразмерности затравочных констант $g_0$, $\bar{g}_0$, отвечает значение $\epsilon = 0$. Подчеркнем, что логарифмичность мы требуем по обеим константам связи. Именно из этого соображения выбран вид $D^{\theta\theta}$; тогда во взаимодействии он будет участвовать на равных правах с $D^{\phi\phi}$. Этот случай является наиболее интересным с точки зрения критического поведения теории, в противном случае $D^{\theta\theta}$ давал бы лишь поправки к критическому скейлингу. В этом смысле такой выбор матрицы D совершенно аналогичен выбору вида корреляторов в стохастической магнитной гидродинамике [6].

Для действия /2/ стандартным способом строится фейнмановская диаграммная техника. В диаграммах будут вершины трех типов: $\phi'\phi\phi$, $\theta'\phi\theta$, $\theta'\theta^n$. По квадратичной части /2/, которую можно записать в симметричном по полям $\Phi \equiv \phi, \phi', \theta, \theta'$ виде $-\frac{1}{2}\Phi K\Phi$/K - матрица/, определяется матрица сверток /пропагаторов/ $\Delta = K^{-1}$:

$$\Delta^{\phi\phi'}(\vec{k}, \omega) = \Delta^{\phi'\phi}(-\vec{k}, -\omega) = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1},$$

$$\Delta^{\theta\theta'}(\vec{k}, \omega) = \Delta^{\theta'\theta}(-\vec{k}, -\omega) = (-i\omega + u_0\nu_0 k^2)^{-1},$$

$$\Delta^{\phi\phi}(\vec{k}, \omega) = D^{\phi\phi}|-i\omega + \nu_0 \vec{k}^2|^{-2}, \quad \Delta^{\theta\theta}(k, \omega) = D^{\theta\theta}|-i\omega + u_0\nu_0 k^2|^{-2}$$

/все остальные элементы матрицы $\Delta$ равны нулю/. Свертки $\phi\phi'$, $\theta\theta'$ запаздывающие, $\phi'\phi$, $\theta'\theta$ - опережающие. Поперечные проекторы, которым пропорциональны пропагаторы векторных полей $\phi$, $\phi'$, опускаем.

## РЕНОРМИРОВКА

Диаграммы, порождаемые неренормированным действием /2/, могут содержать ультрафиолетовые /УФ/ расходимости. Согласно общим правилам, полное устранение этих расходимостей сводится к устранению таковых в диаграммах I-неприводимых функций Грина. Удобным методом классификации УФ-расходимостей, присутствующих в таких диаграммах, как известно, является метод подсчета канонических размерностей полей и параметров. Теория /2/ двухмасштабна. Это означает, что каждой величине в /2/ можно приписать независимо импульсную ($d^p$), частотную ($d^\omega$), а также суммарную ($d = d^p + 2d^\omega$) канонические размерности /3/. Для полей и затравочных параметров они находятся из условия безразмерности действия /2/, а для ренормированных – из формул замены $\nu_0 \to \nu$, $u_0 \to u$, $g_0 \to gM^{\dim g_0}$ для обеих $g$, $\bar{g}$, переводящих исходное неренормированное действие в регуляризованное. При такой замене появляется ренормировочная масса $M$ – дополнительный параметр ренормированной теории. Ниже приводим таблицу канонических размерностей всех величин.

Таблица

| | $\phi$ | $\phi'$ | $\theta$ | $\theta'$ | $\nu_0, \nu$ | $M$ | $g_0$ | $\bar{g}_0$ | $g, \bar{g}, u, u_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d^p$ | $-1$ | $2\mu+1$ | $0$ | $2\mu$ | $-2$ | $1$ | $2\epsilon$ | $2a\epsilon$ | $0$ |
| $d^\omega$ | $1$ | $-1$ | $\frac{1}{n-1}$ | $\frac{-1}{n-1}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $d$ | $1$ | $2\mu-1$ | $\frac{2}{n-1}$ | $2\mu - \frac{2}{n-1}$ | $0$ | $1$ | $2\epsilon$ | $2a\epsilon$ | $0$ |

В размерной регуляризации все УФ-расходимости I-неприводимых диаграмм проявляются в виде полюсов параметров отклонения от логарифмичности $\epsilon$ и устраняются добавлением соответствующих контрчленов в регуляризованное действие.

Проведем анализ ренормируемости теории с произвольным $n \geq 2$. Формальный ультрафиолетовый /УФ/ индекс $\delta$, по которому классифицируются расходимости в I-неприводимых диаграммах, равен $2+2\mu - d_\Phi N_\Phi$, где $N_\Phi \equiv N_\phi$, $N_{\phi'}$, $N_\theta$, $N_{\theta'}$ – число соответствующих полю $\Phi$ внешних линий. Но в действительности расходимости определяются не формальным, а реальным индексом $\delta' = \delta - N_{\phi'}$ /3/. Для диаграмм без внешних линий $\phi'$ $\delta = \delta'$. Из таблицы размерностей имеем

$$\delta' = 2 - N_\phi - 2(N_\theta - N_{\theta'})/(n-1) - 2\mu(N_{\phi'} + N_{\theta'} - 1).$$

Диаграммы могут иметь примитивные /поверхностные/ расходимости, если $\delta' \geq 0$. Кроме того, в принятой нами схеме размерной регуляризации расходимости являются полиномами по внешним импульсам и частотам, что отвечает целочисленным $\delta$ и $\delta'$.

Чтобы эффективно использовать всю мощь техники РГ, нужно доказать мультипликативную ренормируемость теории /2/, т.е. показать, что все расходимости в диаграммах I-неприводимых функций Грина имеют тот же вид, что и члены в исходном действии. Тогда перенормировка сведется просто к переопределению полей и затравочных параметров. Как увидим далее, такая благоприятная ситуация далеко не очевидна; количество типов расходимостей /зависящее от n/ больше, чем это допускает вид /2/. Ближайшая наша цель - показать, что большинство из этих расходимостей на самом деле отсутствует, и найти такие n, при которых теория /2/ действительно мультипликативно ренормируема. Эту задачу разобьем на два пункта. Сначала рассмотрим такие диаграммы, которые имеют расходимости при любой размерности пространства $2\mu$, а затем те, расходимости в которых появляются только при некоторых размерностях $2\mu$ /называемых исключительными/.

К первому случаю относятся диаграммы, для которых выполняется условие $N_{\theta'} + N_{\phi'} = 1$. В диаграммах без внешних линий $\theta, \theta'$ расходимости те же, что и в чистой турбулентной жидкости [3]. Реально имеется только одна расходимость в I-неприводимой функции $\langle\phi'\phi\rangle$, которая устраняется контрчленом $\phi'\Delta\phi$. Перечислим все остальные I-неприводимые функции, которые могут иметь УФ-расходимости. К ним относятся следующие:

$$\langle\phi'\underbrace{\theta\ldots\theta}_{k}\rangle \quad \left(0<k\leq n-1,\quad \delta' = 2\,\frac{n-1-k}{n-1}\right),$$

$$\langle\phi'\phi\,\underbrace{\theta\ldots\theta}_{k}\rangle \quad \left(0<k\leq(n-1)/2,\quad \delta' = \frac{n-1-2k}{n-1}\right),$$

$$\langle\theta'\underbrace{\theta\ldots\theta}_{k}\rangle \quad \left(0\leq k\leq(n+1)/2,\quad \delta' = \frac{n+1-2k}{n-1}\right),$$

$$\langle\theta'\theta\phi\phi\rangle \quad (\delta' = 0), \qquad \langle\theta'\phi\phi\rangle \quad (\delta' = 2/(n-1)),$$

$$\langle\theta'\phi\phi\phi\rangle \quad \left(\delta' = \frac{3-n}{n-1},\ n\leq 3\right), \qquad \langle\theta'\phi\phi\phi\phi\rangle \quad (\delta = 0,\ n = 2).$$

Рассмотрим случай исключительных размерностей. Дополнительные расходимости при таких размерностях могут присутствовать в функциях, удовлетворяющих условию $N_{\phi'} + N_{\theta'} = m$, где $m \geq 2$ /ситуацию с $N_{\phi'} + N_{\theta'} = 0$ рассматривать не нужно, поскольку все такие диаграммы отсутствуют /3//. Для них $\delta' = 2 - 2\mu(m-1) - N_{\phi} - 2(N_{\phi'} + N_{\theta} - m)/(n-1)$ и $N_{\theta'} = m - N_{\phi'}$. Индекс $\delta'$ будет отрицательным, если $m > (n-1)(2\mu+2)/(2\mu(n-1)-2$ для размерностей $2\mu > 2/(n-1)$. В пределе $2\mu \to \infty$ правая часть неравенства стремится к единице, поэтому должна существовать некоторая минимальная размерность пространства /зависящая от $n$/, выше которой никаких дополнительных расходимостей не будет. Легко видеть, что она равна $2(n+1)/(n-1)$. Все пространства этой и более низких размерностей являются исключительными. Таким образом, для $n \leq 5$ в исключительные пространства попадает и пространство реальной размерности $2\mu = 3$. Только его мы и рассмотрим. Расходимости могут присутствовать для $n = 2$ в функциях $\langle\theta'\theta'\theta'\theta'\theta'\rangle$, $\langle\theta'\theta'\phi\phi\phi\rangle$, $\langle\theta'\theta'\phi\theta\rangle$, $\langle\theta'\theta'\theta'\theta\rangle$, $\langle\theta'\theta'\theta'\phi\phi\rangle$, $\langle\theta'\theta'\theta'\theta'\phi\rangle$, $\langle\theta'\phi'\phi\rangle$, $\langle\theta'\theta'\phi'\rangle$ /для всех $\delta' = 0$/, $\langle\theta'\theta'\theta'\theta'\rangle$,, $\langle\theta'\theta'\theta\rangle$, $\langle\theta'\theta'\phi\phi\rangle$, $\langle\theta'\theta'\theta'\phi\rangle$, $\langle\theta'\phi'\rangle$ /$\delta' = 1$/, $\langle\theta'\theta'\theta'\rangle$, $\langle\theta'\theta'\phi\rangle$ /$\delta' = 2$/, $\langle\theta'\theta'\rangle$ /$\delta' = 3$/, для $n = 3$ в $\langle\theta'\phi'\rangle$, $\langle\theta'\theta'\phi\rangle$, $\langle\theta'\theta'\theta\rangle$ /$\delta' = 0$/, $\langle\theta'\theta)\rangle$ /$\delta' = 1$/, для $n = 4$ в $\langle\theta'\theta'\rangle$ /$\delta' = 1/3$/ и в $\langle\theta'\theta'\rangle$ /$\delta' = 0$/ для $n = 5$.

В действительности, в большинстве перечисленных выше I-неприводимых диаграммах в обоих случаях исключительного $2\mu = 3$ и неисключительных размерностей пространства УФ-расходимости отсутствуют. Мы не будем по отдельности рассматривать каждую функцию, а изложим лишь причины, которые приводят к отсутствию этих расходимостей. Они следующие:

1. Поперечность полей $\phi$, $\phi'$. Например, для $\langle\phi'\underbrace{\theta \ldots \theta}_{n-1}\rangle$ /$\delta' = 0$, $\delta = 1$/ соответствующий контрчлен однозначно имеет вид $(\partial\phi')\,\theta^{n-1}$, а $\partial\phi' = 0$.

2. Каноническая размерность диаграммы такова, что нельзя из внешних импульсов /векторов/ и частот /скаляров/ построить тензор нужной структуры. Например, для $\langle\phi'\phi\underbrace{\theta \ldots \theta}_{(n-1)/2}$ / $n$ - нечетно, $\delta' = 0$, $\delta = 1$/ соответствующая расходимость формально пропорциональна внешнему импульсу, а сама функция является тензором второго ранга.

3. Нецелочисленность $\delta'$ для $n > 3$.

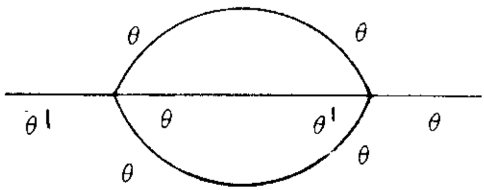
4. Отсутствие I-неприводимых функций Грина с нечетной суммой внешних линий $\theta$, $\theta'$, если $n$ нечетно, из-за инвариантности действия /2/ относительно замены $\theta' \to -\theta'$, $\theta \to -\theta$. Например, для $n = 3$ формально расходящаяся функция $\langle\theta'\phi\phi\rangle$ равна нулю.

5. Галилеева инвариантность теории. Например, для $n = 3$ она гарантирует отсутствие расходимостей в $\langle\theta'\theta\phi\phi\rangle$ /$\delta = 0$/.

Эта функция удовлетворяет тождеству Уорда, которое напишем без вывода:

$$\Gamma^{ij}_{\theta'\theta\phi\phi}(\vec{k},\omega;\vec{k}',\omega';0,0)=[k_j\frac{\partial}{\partial\omega}+k'_j\frac{\partial}{\partial\omega'}]\,\Gamma^{i}_{\theta'\theta\phi}(\vec{k},\omega;\vec{k}',\omega'),$$

где $\Gamma^{ij}_{\theta'\theta\phi\phi}\equiv\langle\theta'\theta\phi\phi\rangle$, $\Gamma^{i}_{\theta'\theta\phi}\equiv\langle\theta'\theta\phi\rangle$. Тождество верно как в неренормированной, так и в ренормированной теории. Поскольку его правая часть конечна, то должна быть конечной и левая часть. Отметим, что в отдельных графиках в каждом порядке теории возмущений УФ-расходимости присутствуют, но они взаимно сокращаются. Наконец, специально рассмотрим возможные расходимости в $\langle\theta'\theta\rangle$. Для нее формальный /и реальный/ индекс равен двум. Это означает, что контрчлены могут иметь вид $\theta'\Delta\theta$ и $\theta\partial_t\theta$. Например, для $n=3$ второй контрчлен нужен из-за расходимости /если такая имеется/ диаграммы,

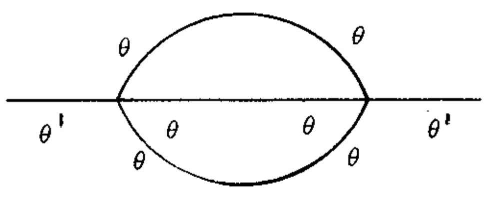



пропорциональной внешней частоте /вершины и свертки на рисунке помечены соответствующими полями/. Что же происходит на самом деле? Вследствие галилеевой инвариантности вид ковариантной производной $\partial_t+\phi\partial$ сохраняется и в ренормированной теории, а поскольку контрчлен типа $\theta'(\phi\partial)\theta$ отсутствует, то нет и контрчлена $\theta'\partial_t\theta$.

Учитывая перечисленные свойства, можно подвести итог. Для $n=2$ остаются расходимости, порождающие контрчлены, которых нет в исходном действии /например, контрчлены вида $\theta'^5$, $\theta'^3\theta$ для $2\mu=3$/. Это означает, что теория не является мультипликативно ренормируемой. Для $n=5$ при $2\mu=3$ есть расходимость типа $\theta'^2$, а соответствующий член в действии /2/ отсутствует. Но можно с самого начала включить этот член в исходное действие, что сводится просто к переопределению коррелятора $D^{\theta\theta}$. При любой размерности пространства и любом $n$ есть контрчлены вида $\phi'\Delta\phi$, $\theta'\Delta\theta$, $\theta'\theta^n$. Все такие члены присутствуют в /2/ и не нарушают мультипликативной ренормируемости теории. Других локальных /полиномиальных по импульсам и частотам/ расходимостей для $2\mu=3$ и неисключительных размерностей при $n\geq 3$ нет.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Предписания используемой нами размерной регуляции - лишь набор некоторых удобных формальных правил, позволяющих резко упростить анализ критического поведения теории. Ввиду отсутствия в такой схеме параметров типа ультрафиолетового обрезания $\Lambda$ в ней не могут появиться контрчлены с размерными параметрами /в теории $\phi^4$ примером такого контрчлена является $\Lambda^2\phi^2$/. Однако в обычной схеме с нормальным обрезанием такие инфракрасно-существенные контрчлены могут возникать. Для мультипликативной ренормировки теории необходимо, чтобы уже в исходном действии присутствовал нужный "массовый" член. При выходе теории в критический режим перенормированные коэффициенты при таких членах должны обращаться в ноль. Размерная схема игнорирует как такие затравочные члены, так и соответствующие контрчлены, т.е. с самого начала предполагается, что теория находится в критическом режиме, а обоснование малости "массовых" членов выходит за рамки такой схемы. Хорошо известно, что она самосогласованна и дает правильные результаты для критических показателей.

В нашей теории для $n \geq 3$ в регуляризации с обрезанием тоже появляются "массовые" контрчлены $\sim\Lambda^{\alpha}$ /$\alpha > 0$/. Более подробно остановимся на случае с $n = 3$. При таком $n$ для $2\mu = 3$ есть контрчлен вида $c\Lambda\nu^2\theta'\theta'$, где $c$ - некоторый численный коэффициент, зависящий от $\bar{g}$ и $u$. Несмотря на то, что анализ такого типа контрчлена выходит за рамки принятой нами схемы, попробуем оценить значение величины $c$ хотя бы в низшем приближении. Прежде всего заметим, что в теориях типа [1,3-5] инфракрасный критический режим /$\vec{k} \to 0$/ в действительности реализуется в некотором промежуточном /инерционном/ интервале $m \ll k \ll \Lambda$ из-за наличия конечного внешнего масштаба турбулентности $m^{-1}$. Величины $m$ и $\Lambda$ /обратный внутренний масштаб турбулентности/ связаны соотношением $m = Re^{-3/4}\Lambda$ [9], где $Re$ - число Рейнольдса /в развитой турбулентности оно очень большое/. Поэтому если коэффициент $c$ окажется того же порядка /или меньше/, что и $Re^{-3/4}$, то рассматриваемый выше "массовый" контрчлен не будет портить критических свойств теории. Низший ненулевой вклад в $c$ дает двухпетлевая диаграмма



Вычисления при $\epsilon = 0$ дают значение $c \cong \bar{g}^3/150\pi^4 u^4$. В критическом режиме $\bar{g}$ и $u$ стремятся к некоторым фиксированным значениям $\bar{g}_*$, $u_*$. Ниже увидим, что $u_*$ будет порядка единицы, а $\bar{g}_* \neq 0$ зависит от свободного параметра $a$. Выбором $a$ можно сделать $\bar{g}_*$ сколь угодно малой /но отличной от нуля/ и добиться малости $c$.

Таким образом, условие "несущественности" контрчлена $\sim \Lambda\theta'\theta'$ ограничивает значения свободного параметра $a$ сверху.

Итак, мы рассмотрим самый низший нетривиальный случай - теорию с $n = 3$, которая в реальном пространстве с $2\mu = 3$ и для остальных размерностей, кроме исключительных, мультипликативно ренормируемая. Все УФ-расходимости в такой теории устраняются при помощи трех констант $Z$ в ренормированном действии, которое принимает вид

$$S_{\text{рен}}(\Phi) = \frac{1}{2} g\nu^3 M^{2\epsilon} \phi' D^{\phi\phi} \phi' + \frac{1}{2}\bar{g}\nu^2 M^{2a\epsilon} \theta' D^{\theta\theta} \theta' +$$

$$+ \phi'[-\partial_t \phi + Z_1 \nu \Delta\phi - (\phi\partial)\phi] + \qquad /5/$$

$$+ \theta'[-\partial_t \theta + Z_2 u\nu\Delta\theta - (\phi\partial)\theta - Z_3 \theta^3/3!] .$$

В корреляторах /3/, /4/ явно выделены все константы, новые $D$ в /5/ уже чистые степени импульса. Действие /5/ получается из неренормированного стандартной формулой мультипликативной ренормировки $S_{\text{рен}}(\Phi, e) = S(Z_\Phi \Phi, e_0)$, где $e_0$, $e$ - затравочные и ренормированные параметры, которые связаны соотношениями $u_0 = uZ_u$, $\nu_0 = \nu Z_\nu$, $g_0 = Z_g M^{2\epsilon} g$, $\bar{g}_0 = \bar{g} M^{2a\epsilon} Z_{\bar{g}}$, а $Z_\Phi \Phi = Z_\phi \phi$, $Z_{\phi'}\phi'$, $Z_\theta \theta$, $Z_{\theta'} \theta'$. Константы ренормировки $Z_e$, $Z_\Phi$ выражаются через константы $Z$ в /5/:

$$Z_\phi = Z_{\phi'} = 1, \quad Z_\theta = Z_{\theta'}^{-1} = Z_3^{1/2}, \quad Z_\nu = Z_1, \quad Z_u = Z_2 Z_1^{-1},$$

$$Z_g = Z_1^{-3}, \quad Z_{\bar{g}} = Z_1^{-2} Z_3 .$$

Для теории /5/ имеют место два масштабных уравнения [4] и уравнение РГ, выражающее независимость перенормированной теории от ренормировочной массы М. Удобно их написать в терминах производящего функционала ренормированных связных функций Грина

$$W_{\text{рен}}(A, e) = \ln \int D\Phi \exp[S_{\text{рен}}(\Phi) + A\Phi],$$

где А - набор внешних источников:

$$[\mathcal{D}_M - 2\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_{\vec{x}} - d_\Phi^p \mathcal{D}_\Phi] W_{\text{рен}} = 0,$$

$$[\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_t - d_\Phi^\omega \mathcal{D}_\Phi] W_{\text{рен}} = 0, \qquad /6/$$

$$[\mathcal{D}_M + \beta_g \partial_g + \beta_{\bar g} \partial_{\bar g} + \beta_u \partial_u - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu + \gamma_\Phi \mathcal{D}_\Phi] W_{рен} = 0. \qquad /7/$$

Здесь $\mathcal{D}_e = e\partial_e$ для любого параметра e, $\mathcal{D}_{(\vec{x},t,\Phi)} \equiv \int dx\, A(x) \times (\partial_{\vec x}, \partial_t, 1)\delta/\delta A(x)$. Ренормгрупповые функции $\beta$, $\gamma$ в /7/ выражаются через константы ренормировки: $\gamma_\nu = \tilde{\mathcal{D}}_M \ln Z_\nu$, $\gamma_\Phi = \tilde{\mathcal{D}}_M \ln Z_\Phi$, $\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_M g$, $\beta_{\bar g} = \tilde{\mathcal{D}}_M \bar g$, $\beta_u = \tilde{\mathcal{D}}_M u$, где $\tilde{\mathcal{D}}_M$ обозначает операцию $M\partial_M$ при фиксированных затравочных параметрах. Все эти функции можно выразить через константы $Z_i$ /i = 1,2,3/, которые вычисляются непосредственно по диаграммам. В обозначениях $\gamma_i = \tilde{\mathcal{D}}_M \ln Z_i$ имеем

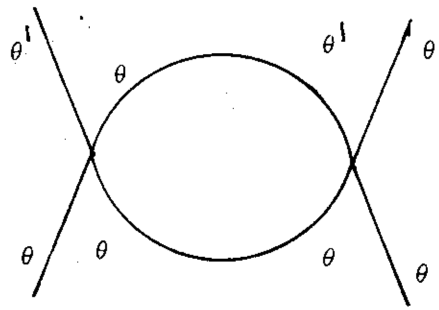
$$\gamma_\phi = \gamma_{\phi'} = 0, \quad \gamma_\theta = -\gamma_{\theta'} = 1/2\,\gamma_3, \quad \gamma_\nu = \gamma_1,$$

$$\beta_g = g[-2\epsilon + 3\gamma_1], \quad \beta_{\bar g} = \bar g[-2a\epsilon + 2\gamma_1 - \gamma_3], \qquad /8/$$

$$\beta_u = u[\gamma_1 - \gamma_2].$$

## ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для конкретных расчетов удобной и простой является схема минимальных вычитаний [8]. В такой схеме константы Z, вычисляемые по соответствующим 1-неприводимым диаграммам, содержат только полюсные по $\epsilon$ вклады этих диаграмм. В однопетлевом приближении константы $Z_1$, $Z_2$ совпадают с вычисленными ранее в работе [4]. Для вычисления $Z_3$ в таком же приближении нужно найти полюсную часть диаграммы




Ниже мы приводим явный вид всех трех констант Z:

$$Z_1 = 1 - \frac{\mu(2\mu - 1)}{2B\epsilon} g,$$

$$Z_2 = 1 - \frac{(\mu+1)(2\mu-1)}{u(u+1)B\epsilon} g,$$

$$Z_3 = 1 + \frac{3\mu(2\mu+2)}{2u^2 B a\epsilon}\bar{g},$$

где $B = 2\mu(2\mu+2)(4\pi)^{\mu}\,\Gamma(\mu)$ / $\Gamma$ - гамма-функция/.

В выражениях для $\beta$-функций /8/ удобно перейти к новым переменным посредством замены $g_1 = g/Bu$, $g_2 = \bar{g}/Bu^2$. $\beta$-функции новых переменных /зарядов/ имеют вид

$$\beta_{g_1} = g_1(-2\epsilon + 2\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$\beta_{g_2} = g_2(-2a\epsilon + 2\gamma_2 - \gamma_3), \quad \beta_u = u(\gamma_1 - \gamma_2). \qquad /9/$$

Они выгодно отличаются от прежних тем, что аналитичны по всем трем зарядам $g_1$, $g_2$, $g_3 \equiv u$ в физической области неотрицательных $g$. Это упрощает анализ РГ-уравнения.

Для нахождения величин $\gamma = \tilde{\mathfrak{D}}_M \ln Z_i$ в однопетлевом приближении операцию $\tilde{\mathfrak{D}}_M$ нужно заменить на $-2\epsilon\,\mathfrak{D}_{g_1} - 2a\epsilon\,\mathfrak{D}_{g_2}$. В таком приближении в пространстве реальной размерности $2\mu = 3$ $\beta$-функции равны:

$$\beta_{g_1} = g_1[-2\epsilon + 6ug_1 + 10g_1/(1+u)],$$

$$\beta_{g_2} = g_2[-2a\epsilon + 20g_1/(1+u) + \frac{45}{2}g_2],$$

$$\beta_u = u[3ug_1 - 10g_1/(1+u)].$$

Из условия обращения в нуль всех $\beta$-функций находим фиксированные точки. В данной теории их шесть:

1. $3u(u+1) - 10 = 0$, $g_1 = \epsilon(u+1)/15$, $g_2 = 0$,

2. $3u(u+1) - 10 = 0$, $g_1 = \epsilon(u+1)/15$, $g_2 = 4\epsilon(a - 2/3)/45$,

3. $g_1 = g_2 = 0$, $u$ - произвольное;

4. $g_1 = 0$, $g_2 = 4a\epsilon/45$, $u$ - произвольное;

5. $u = 0$, $g_2 = 0$, $g_1 = \epsilon/5$;

6. $u = 0$, $g_2 = 4\epsilon(a-2)/45$, $g_1 = \epsilon/5$.

Для того чтобы фиксированная точка была инфракрасно устойчивой, необходимо, чтобы собственные значения матрицы $\partial\beta_i/\partial g_k \equiv \omega_{ik}$ были неотрицательными. В физической области неотрицательных $g_1$, $g_2$ и $u$ ИК-устойчивыми оказались точки 1 и 2. Точка 1 устойчива при условии, что $a \le 2/3$, а точка 2 - при $a > 2/3$. В сущности, при увеличении $a$ /усилении инфракрасной накачки шумом $D^{\theta\theta}$/ точка 1, в которой $g_2 = 0$, не теряет устойчивости, просто при $a > 2/3$ заряд $g_2$ непрерывно смещается от нулевого значения. С такого угла зрения обе точки можно считать единой ИК-устойчивой траекторией со следующими значениями зарядов:

$$g_1 = \epsilon(u+1)/15, \quad g_2 = (4\epsilon(a - \frac{2}{3})/45)\cdot\theta(a - \frac{2}{3}), \quad u = (\sqrt{\frac{13}{3}} - 1)/2, \quad /10/$$

где $\theta(a - \frac{2}{3})$ равна нулю при $a \le 2/3$ и единице при $a > 2/3$. Собственные значения матрицы $\omega_{ik}$ /обозначим их через $\omega_{g_i}$/, которые определяют поправки к критическому скейлингу, на траектории /10/ равны:

$$\omega_{g_1} = 2\epsilon, \quad \omega_{g_2} = 2\epsilon\,|a - \frac{2}{3}|, \quad \omega_u = \frac{2\epsilon}{3}[1 + \frac{10}{3(1+u)^2}].$$

Отметим, что при $a \le 2/3$ /10/ совпадает с вычисленной ранее ИК-устойчивой фиксированной точкой для обычно пассивной примеси [4].

## КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Исключая из уравнений /6/ и уравнения РГ /7/ в фиксированной точке операции $\mathcal{D}_M$, $\mathcal{D}_\nu$, получаем уравнение критического скейлинга:

$$[-\mathcal{D}_{\vec{x}} + \Delta_t\mathcal{D}_t - \Delta_\Phi\mathcal{D}_\Phi]\,W_{\text{рен}} = 0.$$

Коэффициенты, которые стоят перед операциями $\mathcal{D}_e$, имеют смысл критических размерностей величин $e$. Их явный вид следующий:

$$\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \gamma_\nu, \quad \Delta_\Phi = d_\Phi^p + \Delta_\omega d_\Phi^\omega + \gamma_\Phi,$$

где $\gamma_\nu = \frac{2\epsilon}{3}$. Критические размерности времени и полей $\phi$, $\phi'$ те же, что и в турбулентной среде без примеси [3]. Для полей $\theta$, $\theta'$ имеем

$$\Delta_\theta = (1 - \epsilon/3) - \epsilon(a - 2/3)\,\theta(a - 2/3),$$

$\Delta_{\theta'} = 2 + \epsilon/3 + \epsilon(a - 2/3)\,\theta(a - 2/3)$ .

Отметим, что, как и раньше /4/, величина $\gamma_\nu = \gamma_1$ , вычисленная в однопетлевом приближении, совпадает с точной, т.е. не имеет поправок $\epsilon^2$, $\epsilon^3$ и т.д. Это утверждение справедливо и для величины $\gamma_3$. Действительно, приравнивая к нулю все $\beta$-функции в /9/, получаем $\gamma_1 = 2\epsilon/3$ , $\gamma_2 = \gamma_1$ , $\gamma_3 = 2\gamma_1 - 2a\epsilon = -2\epsilon(a - 2/3)$ . Все эти значения совпадают с вычисленными в однопетлевом приближении. Поэтому, согласно /8/, аномальные размерности $\gamma_\theta$ , $\gamma_{\theta'}$, а значит, и $\Delta_\theta$, $\Delta_{\theta'}$ , также не имеют поправок $\epsilon^2$, $\epsilon^3$ ...

Резюмируем полученные результаты.

Для движущейся в турбулентной среде химически активной скалярной примеси с $n = 3$ существует асимптотический инфракрасно-устойчивый критический режим, реализуемый в окрестности фиксированной точки /10/. Критические размерности всех величин в этом режиме вычисляются точно. При $\epsilon = 2$ и $a \le 2/3$ они совпадают с колмогоровскими. При $a > 2/3$ размерности времени и полей $\phi$, $\phi'$ не меняются, а для примесных полей они начинают зависеть от a. Однако величина $\Delta_{\theta\theta'} = \Delta_\theta + \Delta_{\theta'} = 3$ от a не зависит и остается канонической, как и в обычной примеси. Тем самым /см. /4// теоретически обосновывается справедливость известного закона 4/3 Ричардсона и для химически активной скалярной примеси.

## ЛИТЕРАТУРА


1. De Dominicis C., Martin P.C. - Phys. Rev., 1979, A19, p.419.
2. De Dominicis C., Peliti L. - Phys. Rev., 1978, B18, p.353.
3. Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.Н. - ТМФ, 1983, 57, №2, с.268.
4. Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М. - ТМФ, 1984, 58, №1, с.72.
5. Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М. - ТМФ, 1988, 74, №2, с.180.
6. Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М. - ТМФ, 1985, 64, №2, с.196.
7. Монин А.С., Яглом А.Н. - Статистическая гидродинамика. М.: Наука, 1967, т.2.
8. 't Hooft G. - Nucl. Phys., 1973, B61, p.455.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. - Гидродинамика. М.: Наука, 1986.



Рукопись поступила в издательский отдел
26 мая 1989 года.