сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-89-372

Л.А.Уварова*, В.К.Федянин

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

*Калининский политехнический институт

1989

1. Рассеяние и поглощение плоскополяризованной волны на сферической частице может быть описано согласно классической теории Ми [1,2]. В теории Ми оптические свойства частицы и окружающей ее сферы полагаются постоянными и не зависящими от электромагнитного поля. В настоящее время большое внимание уделяется вопросам распространения электромагнитной волны в нелинейных средах, диэлектрическая проницаемость которых зависит от электрического вектора (см., например, [2-7]). В работе [7] подытожены результаты теоретического анализа ситуации для сред с нелинейными свойствами в плоскопараллельной геометрии. Система уравнений Максвелла в общем случае может быть сведена к следующим уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\Delta\vec{E}_i + k^2\delta_i\,(E_{i1}\,, E_{i2}\,, E_{i3})\,\vec{E}_i = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}_i)\,,\\
&\Delta\vec{H}_i + k^2\delta_i\,(E_{i1}\,, E_{i2}\,, E_{i3})\,\vec{H}_i = \nabla k_{1i}\times\vec{E}_i\,,\\
&\nabla\cdot(k_{1i}\vec{E}_i) = 0\,,\\
&\nabla\cdot\vec{H}_i = 0\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,,$$

$$k_{1i} = \frac{i\omega}{c}\left(\epsilon_i + i\,\frac{4\pi\sigma_i}{c}\right),$$

E_{ij} $(j = 1, 2, 3)$ -

- компоненты вектора $\vec{E}_i$ в некоторой ортогональной системе координат, $\vec{H}_i$ - вектор магнитного поля (процесс полагается квазистационарным), i = 1,2, индекс "1" относится в нашем случае к частице, индекс "2" - к окружающей среде. Через δ_i $(E_{i1}\,, E_{i2}\,, E_{i3})$ обозначена следующая функция

$$\delta_i(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) = \epsilon_i(\vec{E}_i) + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega}. \qquad (2)$$

В работе [8] были получены классы точных решений системы (1) для нелинейных сред, диэлектрическая проницаемость которых зависит от поля по одному из следующих законов

$$\text{а)}\ \epsilon_i = \epsilon_{0i} - |\alpha_i|\, E_i^2, \qquad \text{б)}\ \epsilon_i = \epsilon_{0i} - |\alpha_i|\, \vec{E}_i^{\,2}, \qquad (3)$$

где $E_i^2 = |\vec{E}_i|^2$. Предполагалось, что среды представляют собой подобные друг другу тела с общим центром или осью симметрии (сферы, кубы, цилиндры, торы). В частности, были найдены решения для системы концентрических сфер. Особенностью полученных в [8] решений является постоянство модуля электрического вектора (для зависимости (3а) или квадрата электрического вектора (для зависимости (3б)). Будем обозначать эти решения в дальнейшем $\vec{E}_{iT}$ и $\vec{H}_{iT}$ и найдем приближенные решения в их окрестности. Такие решения будем искать в виде $\vec{E}_i = \vec{E}_{iT} + \vec{E}_i'$, $\vec{H}_i = \vec{H}_{iT} + \vec{H}_i'$, где $\vec{E}_i'$, $\vec{H}_i'$ – малые добавки. В таком случае из системы (1) получим следующую систему для $\vec{E}'$, $\vec{H}'$

$$\Delta\vec{E}_i - 2k^2\left(\epsilon_{0i} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega}\right)\vec{E}_i' = 0, \qquad (4а)$$

$$\Delta\vec{H}_i - 2k^2\left(\epsilon_{0i} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega}\right)\vec{H}_i' = -2|\alpha_i|\nabla(\vec{E}_{iT}\vec{E}_i) \times \vec{E}_{iT}, \qquad (4б)$$

$$\nabla\cdot\vec{E}_i = 0, \qquad (4в)$$

$$\nabla\cdot\vec{H}_i = 0. \qquad (4г)$$

Уравнение (4б) можно упростить, если считать, что $\vec{E}_i' = \lambda_1\vec{E}_{iT}^* + \lambda_2\vec{E}_i'' + \lambda_3\vec{E}_{i\perp}$ (при рассмотрении зависимости (3а), где $\vec{E}_{iT}^*$ – комплексно-сопряженный вектор к $\vec{E}_{iT}$; $\vec{E}_{i\perp} \perp \vec{E}_{iT}$, или $\vec{E}_i' = \lambda_1\vec{E}_{iT} + \lambda_2\vec{E}_{i\perp}'' + \lambda_3\vec{E}_{i\perp}$ (при рассмотрении зависимости (3б)). Полагая далее, что из двух векторов $\lambda_1\vec{E}_{iT}^*$ и $\lambda_2\vec{E}_{i\perp}''$ или $\lambda_1\vec{E}_{iT}$ и $\lambda_2\vec{E}_{i\perp}''$ основной вклад в величину $\vec{E}_i'$ вносят первые и учитывая отмеченную выше особенность решений $\vec{E}_{iT}$, а также свойство скалярного произведения, вместо (4б) получим следующее уравнение

$$\Delta\vec{H}_i - 2k^2\left(\epsilon_{0i} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega}\right)H_i' = 0. \qquad (5)$$

Уравнения (4а) и (5) формально совпадают с уравнениями для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в линейной среде. При этом роль величины диэлектрической проницаемости играет $\tilde{\epsilon} = -2\epsilon_{02}$, а роль коэффициента поглощения величина $\tilde{\kappa}_i = -\frac{8\pi\sigma_i}{\omega}$. Интересно отметить, что в теории резонансов, возникающих при взаимодействии плоскополяризованной волны со сферической частицей, фигурирует диэлектрическая проницаемость $\tilde{\epsilon} = -2\epsilon_{02}$. При одновременном выполнении условия $\tilde{\kappa}_1 \approx 0$ такая диэлектрическая проницаемость имеет место на частоте Фрелиха [1].

Рассмотрим вопрос об удовлетворении условий на границе частицы с помощью решений $\vec{E}_i$, $\vec{H}_i$. Если обе среды нелинейны, то на границе раздела двух сред можно записать

$$E^{(t)}_{1T} = E^{(t)}_{2T}, \quad E'^{(t)}_{1} = E'^{(t)}_{2}, \quad H'^{(t)}_{1} = H'^{(t)}_{2}. \tag{6}$$

Здесь без потери общности мы полагаем, что $\vec{H}_{iT} = 0$. Индекс "t" означает "тангенциальную составляющую". Таким образом, к полученному ранее точному решению присоединяется решение линейной задачи, определяемое из (4а), (5) и краевых условий (13), независимо от $\vec{E}_{iT}$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда внешняя среда является линейной. Для простоты будем полагать, что "нелинейная" сферическая частица помещена в вакуум. Для векторов $\vec{E}_i$ граничное условие будет иметь вид

$$E^{(t)}_{1T} = E'^{(t)}_{1} = E^{(t)}_{2}. \tag{7}$$

Внешнее поле, в свою очередь, состоит из падающей (p) и рассеянной (s) волн. Таким образом, вместо (7) можно записать

$$E^{(t)}_{1T} = E'^{(t)}_{1} = E^{(t)}_{2p} + E^{(t)}_{2s}. \tag{8}$$

Соответственно, для магнитной волны имеем

$$H'_1(t) = H^{(t)}_{2p} + H^{(t)}_{2s}. \tag{9}$$

Решение задачи в линейном случае, как известно, может быть представлено с помощью потенциалов Герца: электрического $\vec{{}^e\Pi}$ и магнитного ${}^m\Pi$. Следуя работе [2] и учитывая, что поле $\vec{H}$ находится полностью из линейной задачи, в сферической системе координат вместо (8) можно записать следующие граничные условия

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\,{}^e\Pi_s}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\,{}^e\Pi_p}{\partial r\partial\theta}\right)\Big|_R=\left(\frac{\partial^2 r\,{}^e\Pi_1'}{\partial r\partial\theta}\frac{1}{r}+E_{\theta T}\right)\Big|_R , \qquad (10а)$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\,{}^e\Pi_s}{\partial r\partial\phi}\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\,{}^e\Pi_p}{\partial r\partial\phi}\frac{1}{\sin\theta}\right)\Big|_R= \qquad (10б)$$

$$=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 r\,{}^e\Pi_1}{\partial r\partial\phi}+E_{\phi T}\right)\Big|_R ,$$

где $E_{\theta T}$, $E_{\phi T}$ $-\theta$ и ϕ - компонеты вектора $\vec{E}_T$ соответственно, R - радиус частицы, ${}^e\Pi$ является решением уравнения /2/

$$\Delta\,{}^e\Pi+m^2\;{}^e\Pi=0 \qquad (11)$$

и дается выражением

$$r\,{}^e\Pi=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=-\ell}^{\ell}\{(C_\ell\,\psi_\ell(mr)+d_\ell\,\chi_\ell(mr)\}\{a_j\cos(j\phi)+ \qquad (12)$$

$$+b_j\sin(j\phi)\}\,P_\ell^{(j)}(\cos\theta) ,$$

через $\psi_\ell(x)$, $\chi_\ell(x)$ обозначены следующие функции

$$\psi_\ell(x)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) ,\qquad \chi_\ell=-\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,N_{\ell+\frac{1}{2}}(x) ;$$

$J_{\ell+1/2}(x)$, $N_{\ell+1/2}(x)$ - функции Бесселя и Неймана порядка $\ell+\frac{1}{2}$ соответственно. Потенциал падающей волны (если следовать классической схеме расчета) равен

$$r\,{}^e\Pi=\frac{1}{(k_{21})^2}\sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1}\frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)}\psi_\ell(k_{21}r)\,P_\ell^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi , \qquad (13)$$

т.е. пропорционален $\cos\phi$. Поскольку решения $E_{\theta T}$ и $E_{\phi T}$ не зависят от азимутального угла ϕ, то для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (10) в рассеянной волне, необходимо оставить как члены ряда, пропорциональные $\cos\phi$ ($j = 1$), так и члены ряда, для которых $j = 0$. При этом, однако, система для определения коэффициентов разложения остается незамкнутой. Действительно, решение E_T было получено при условии $k_{1i} = 0$, при котором условие калибровки обращалось в нуль тождественно. Поэтому коэффициенты разложения в ряд по $P_\ell^{(1)}(\cos\theta)$ для $E_{\theta T}$ и $E_{\phi T}$ не связаны между собой. Таким образом, имеется лишь два уравнения для определения троек коэффициентов в общих решениях $E_{\theta T}, E_{\phi T}, E_j$ при $j = 0$. Более того, из (10б) следует, что $E_{\phi T}$ должно равняться нулю, а условие (10а) оказывается одним условием, связывающим два неопределенных коэффициента. Проведенный анализ показывает, что система (10) может служить для однозначного определения коэффициентов разложения только в том случае, если во внешней области заданы ТЕ- и ТМ-волны, компоненты которых (E_r, E_θ, H_ϕ для ТЕ-волны и H_r, H_θ, E_ϕ для ТМ-волны) зависят только от r и θ. При $E_{T\phi} = 0$ можно ограничиться заданием только ТЕ-волны. Здесь уместно провести математическую аналогию: при решении краевых задач, содержащих сингулярные уравнения, используют метод введения пограничных рядов, с помощью которых удается удовлетворить граничным условиям. Таким образом, при корректной постановке граничных условий при рассмотрении систем "нелинейная частица - нелинейная среда", "нелинейная частица - линейная среда" остается лишь записать решение линейных уравнений Гельмгольца с комплексным показателем преломления $\tilde{m}_i = -2(\epsilon_{0i} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega})$ (полагаем далее, что $\sigma_2 = 0$) в первом случае и с $\tilde{m}_1 = -2(\epsilon_{01} + i\frac{4\pi\sigma_1}{\omega})$ и $\tilde{m}_2 = 1$ - во втором. При рассмотрении системы "нелинейная частица - нелинейная среда" окончательные выражения для рассеянной волны будут отличаться от классических. Такое отличие обусловлено тем, что величина $\tilde{m}_2 < 0$. Действительно, в классической теории для рассеянной волны используются функции Ханкеля первого рода, так как они обращаются в нуль на бесконечности при положительной мнимой части. Поскольку в рассматриваемом случае аргументом радиальных функций будет величина $-i2\epsilon_{02}\frac{\omega}{c}r$, то для рассеянной волны оказываются подходящими функции Ханкеля второго рода, которые обращаются в нуль на бесконечности в комплексной плоскости при отрицательной мнимой части. Мы выпишем здесь поэтому необходимые выражения для рассеянной электрической волны:

$$E'_{sr} = \frac{\cos\phi}{\tilde{m}_2^2 k^2 r^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell(\ell+1)\, {}^eB_\ell\, \xi_\ell^{(2)}(k\tilde{m}_2 r)\, P_\ell^{(1)}(\cos\theta);$$

$$E'_{s\theta} = -\frac{\cos\phi}{m_2 r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ {}^{e}B_\ell \, \xi_\ell^{(2)\prime}(k\tilde{m}_2 r) \, P_\ell^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta -$$

$$- i\, {}^{m}B_\ell \, \xi_\ell^{(2)}(k\tilde{m}_2 r) \, P_\ell^{(1)}(\cos\theta) \frac{1}{\sin\theta} \},$$

$$E'_{s\phi} = -\frac{\sin\theta}{\tilde{m}_2 r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ {}^{e}B_\ell \, \xi_\ell^{(2)\prime}(\tilde{m}_2 k r) \, P_\ell^{(1)}(\cos\theta) \frac{1}{\sin\theta} -$$

$$- i\, {}^{m}B_\ell \, \xi_\ell^{(2)}(\tilde{m}_2 k r) \, P_\ell^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta \}, \qquad (14)$$

$${}^{e}B = i^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \frac{\tilde{m}_1 \psi'_\ell(d_2)\psi_\ell(d_1) - \tilde{m}_2 \psi'_\ell(d_1)\psi_\ell(d_2)}{\tilde{m}_1 \xi_\ell^{(2)\prime}(d_2)\psi_\ell(d_1) - \tilde{m}_2 \psi'_\ell(d_1)\xi_\ell^{(2)}(d_2)},$$

$${}^{m}B_\ell = i \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \frac{\tilde{m}_1 \psi_\ell(d_2)\psi'_\ell(d_1) - \tilde{m}_2 \psi_\ell(d_2)\psi_\ell(d_1)}{\tilde{m}_1 \xi_\ell^{(2)}\psi'_\ell(d_1) - \tilde{m}_2 \xi_\ell^{(2)\prime}(d_2)\psi_\ell(d_1)},$$

$d_i = k\tilde{m}_i R, \quad i = 1,2.$

Здесь вместо функций

$$\xi_\ell^{(1)}(x) = \psi_\ell(x) - i\chi_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H^{(1)}(x)$$

используются функции

$$\xi_\ell^{(2)}(x) = \psi_\ell(x) + i\chi_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H^{(2)}(x).$$

Соответственно меняются и условия определения резонансных частот, т.е. условия обращения в нуль знаменателей коэффициентов ${}^{e}B_\ell$, ${}^{m}B_\ell$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борен К., Хафмен Д.- Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
2. Борн М., Вольф Э. - Основы оптики. М.: Наука, 1973.

3. Абловиц М., Сигур Х. - Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
4. Агранович В.М., Бавиченко В.С., Черняк В.Я. - Письма в ЖЭТФ, 1980, т.32, вып.8, с.532.
5. Fedyanin V.K., Micalache D. - Z.Phys. B., v.47, p.167.
6. Михалаке Д., Федянин В.К. - ТМФ, 1983, т.54, с.443.
7. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. - ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.1, с.198.
8. Уварова Л.А. - ОИЯИ, Р17-87-693, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 августа 1989 года.