объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-89-168

А.А.Бакасов

СТРОГОЕ КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОМОДОВОГО ЛАЗЕРА - КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1989

I. ВВЕДЕНИЕ

I.I. Цели работы и терминология

Вероятно, единственным достоверным путем для выяснения области применимости динамической модели является ее качественное исследование. В самом деле, обычно динамические модели содержат один или несколько параметров, вариация которых в заданной области изменения производится вместе с вариацией начальных условий. Численное моделирование, т.е. численное решение задачи Коши, дает результаты для счетного набора значений параметров и начальных условий, хотя известно, что качественно иные решения могут, например, иметь начальные условия на множестве меры нуль среди множества возможных начальных условий. В такой ситуации при дискретном переборе начальных значений качественно иное решение может и не попасть в поле зрения исследователя.

Простейшим примером, иллюстрирующим это утверждение, являются точки равновесия маятника. Нижняя точка подвеса является единственной устойчивой точкой равновесия, а верхняя – единственной неустойчивой точкой равновесия.

Вместе с тем при качественном исследовании весьма желательно, чтобы такое исследование проводилось строго. Приближенное в каком-либо смысле качественное исследование динамической модели, будь то исследование уравнений, "аппроксимирующих" исходные, или исследование решений, полученных по теории возмущений, может дать иную качественную картину, нежели строгое и правильное рассмотрение. Примером может служить работа /I/, в которой было строго показано, что все решения одной динамической модели /2/, физически соответствующие сверхизлучению, являются устойчивыми асимптотически, хотя исследование уравнений, считавшихся приближением к исходным, показывало наличие неустойчивых решений, имеющих физический смысл /2-4/. В этом примере строгое исследование /I/ показало, что "сверхизлучательного порога" /3,4/ не существует.

В данной работе будет строго рассмотрена одна из широкоизвестных в квантовой оптике динамических моделей одномодового лазера с двухуровневыми излучателями и некогерентной накачкой. Эта модель получается естественным образом путем усреднения операторных уравнений в представлении взаимодействия для одномодового поля, взаимодействующего с двухуровневыми атомами, при простейшем учете релаксаций /5/. Качественное исследование стационарных решений этой динамической модели было приближенно проведено Хакеном /6/ и чрезвычайно широко цитировалось в литературе, посвященной процессам самоорганизации.

Тем более интересным представляется тот факт, что найденная в /6/ асимптотическая устойчивость стационарных решений выше порога генерации не имеет места почти при всех физических значениях параметров, входящих в исследуемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. математический комментарий). Как будет показано ниже, эти решения могут быть либо просто устойчивыми и, следовательно, неустойчивыми при учете внешней случайной силы, либо, что еще более неожиданно, экспоненциально неустойчивыми в некоторой области значений параметров выше порога генерации.

Поясним также терминологию. Одной из особенностей рассматриваемой динамической модели является то, что некоторые ее стационарные решения не допускают исследования устойчивости по линейному приближению. Последнее обусловлено тем, что матрица линейной части данной системы выражена, т.е. ее детерминант равен нулю. Следовательно, среди корней характеристического уравнения этой матрицы есть нулевые. В теории устойчивости такая ситуация называется критическим случаем, если среди ненулевых корней нет корней с положительной действительной частью /7-9/.

Физическое обсуждение полученных строгих результатов дано в конце настоящей работы.

I.2. Исходная динамическая модель

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих одномодовый лазер с некогерентной накачкой, может быть записана в следующем виде /5,6/:

$$\begin{aligned}
\dot{b}^* &= -\varkappa b^* + ig\alpha^*, \\
\dot{b} &= -\varkappa b - ig\alpha, \\
\dot{\alpha}^* &= -\gamma\alpha^* - igb^*S, \\
\dot{\alpha} &= -\gamma\alpha + igbS, \\
\dot{S} &= \frac{Nd_0 - S}{T} + 2ig(\alpha b^* - b\alpha^*).
\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

В этих уравнениях b^* и b – средние от операторов рождения и уничтожения фотонов, а α^* и α – средние от операторов перехода с нижнего уровня на верхний и обратно. Операторы берутся в представлении взаимодействия. Переменная S есть просто разность числа возбужденных и невозбужденных излучателей, N – общее число излучателей, $\varkappa>0$ – скорость релаксации поля за счет излучения, $\gamma>0$ – скорость поперечной релаксации излучателей, $T>0$ – время продольной релаксации излучателей, $g>0$ – константа взаимодействия поля и излучателей. α_0 – интенсивность накачки, являющаяся бифуркационным параметром.

В правой части уравнений (I) может фигурировать случайно зависящая от времени сила. Ее влияние на устойчивость стационарных решений выше порога генерации будет обсуждено в математическом и физическом комментариях.

I.3. Известные приближенные результаты /6/

Уравнения (I) были рассмотрены Хакеном (раздел 8.4 книги /6/) следующим образом. Если принимать во внимание только формулы, то можно видеть, что сначала были отобраны стационарные решения. Действительно, уравнение (8.I3) в /6/ означает, что $\mathscr{B}\mathscr{S}$ и, следовательно, α взяты не зависящими от времени, а уравнение (8.I7) в /6/ означает, что от времени не зависит величина $\mathscr{S}$, а следовательно, в силу уравнения (8.I3) и величина $\mathscr{B}$. Для рассмотрения временной эволюции около стационарных решений правая часть строгого соотношения между стационарными значениями $\mathscr{S}$ и $\mathscr{B}^*\mathscr{B}$, представляющая сумму геометрической прогрессии, была заменена суммой двух ее первых членов. Получилось уравнение известного вида /6/

$$\dot{\mathscr{B}} = \left(-\varkappa + \frac{g^2}{\gamma} N\alpha_0\right)\mathscr{B} - 4\,\frac{g^2\varkappa T}{\gamma}\,\mathscr{B}^*\mathscr{B}\mathscr{B}, \tag{2}$$

имеющее, в зависимости от знаков коэффициентов, для действительного $\mathscr{B}$ два набора стационарных решений. Именно, если $\alpha_0 < \varkappa\gamma/Ng^2$, то существует одно только нулевое стационарное решение, являющееся асимптотически устойчивым. Однако главный интерес представляет стационарное решение выше порога генерации, когда $\alpha_0 > \alpha_c = \varkappa\gamma/Ng^2$. В этом случае, как сразу видно из (2), имеется два ненулевых стационарных решения, которые являются асимптотически устойчивыми, и нулевое решение, которое является экспоненциально неустойчивым. Была приведена функция Ляпунова, хорошо известная для уравнения (2) (уравнение (8.23) в /6/).

Как будет показано ниже, несмотря на то, что стационарные решения уравнений (I) и (2) совпадают, качественные свойства этих решений существенно различны. Поэтому уравнение (2) ни в коей мере не может служить приближением исходной динамической системы (I), а следовательно, результаты, полученные для уравнения (2), не могут быть использованы для физического обсуждения динамической системы (I).

Необходимо также отметить следующее. Систему (I) не следует отождествлять с описывающей лазер динамической системой, состоящей из трех уравнений, разрешенных относительно первых производных и рассмотренных в /6,10,11/. Легко видеть, что исследуемая нами система пяти обыкновенных дифференциальных уравнений не редуцируется каким-либо точным преобразованием к системе трех дифференциальных уравнений /6,10,11/, взятых для пространственно однородных решений (модель Лоренца /13,6/). Поэтому результаты, полученные для последней системы, в общем случае не применимы к системе (I).

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для исследования устойчивости стационарных решений необходимо записать систему уравнений в вариациях около этих стационарных решений. Поэтому получим стационарные решения в явном виде. Впервые эти решения рассматривались в /12/.

2.1. Переход к действительным переменным и система уравнений в вариациях

Как с точки зрения удобства вычислений, так и для физического обсуждения предпочтительнее действительные переменные. Набор таких переменных $\{b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, S\}$ вводится следующим очевидным преобразованием:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= b^* + b,\\
b_2 &= i(b^* - b),\\
\alpha_1 &= \alpha^* + \alpha,\\
\alpha_2 &= i(\alpha^* - \alpha).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Система уравнений (I) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_1 &= -\varkappa b_1 + g\alpha_2,\\
\dot{b}_2 &= -\varkappa b_2 - g\alpha_1,\\
\dot{\alpha}_1 &= -\gamma\alpha_1 - g b_2 S,\\
\dot{\alpha}_2 &= -\gamma\alpha_2 + g b_1 S,\\
\dot{S} &= \frac{Nd_0 - S}{T} + g(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Обозначим стационарные решения уравнений (4) через $\{b_1^0, b_2^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, S^0\}$. Введем вариации $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ около этих стационарных решений заменой переменных:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= b_1 - b_1^0,\\
X_2 &= b_2 - b_2^0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3 &= \alpha_1 - \alpha_1^0, \\
X_4 &= \alpha_2 - \alpha_2^0, \\
X_5 &= S - S^0.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Уравнения в вариациях имеют вид

$$\dot{x} = Lx + F(x), \qquad (6)$$

где L – матрица линейной части уравнений (6):

$$
L = \begin{pmatrix}
-\varkappa & 0 & 0 & g & 0 \\
0 & -\varkappa & -g & 0 & 0 \\
0 & -gS^0 & -\gamma & 0 & -g\beta_2^0 \\
gS^0 & 0 & 0 & -\gamma & g\beta_1^0 \\
-g\alpha_2^0 & g\alpha_1^0 & g\beta_2^0 & -g\beta_1^0 & -\frac{1}{T}
\end{pmatrix}, \qquad (7)
$$

а $F(x)$ – столбец, содержащий нелинейные члены:

$$F(x) = \{0,\ 0,\ -gx_2x_5,\ gx_1x_5,\ g(x_2x_3 - x_1x_4)\}. \qquad (8)$$

Матричные элементы L_{ij} в общем случае зависят от стационарного решения $\{\beta_1^0, \beta_2^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, S^0\}$, которое определяется из уравнений

$$
\begin{aligned}
\beta_1^0 &= \frac{g}{\varkappa}\alpha_2^0, \\
\beta_2^0 &= -\frac{g}{\varkappa}\alpha_1^0, \\
\alpha_1^0&\left(\frac{g^2}{\varkappa}S^0 - \gamma\right) = 0, \\
\alpha_2^0&\left(\frac{g^2}{\varkappa}S^0 - \gamma\right) = 0, \\
\frac{Nd_0 - S^0}{T} &= \frac{g^2}{\varkappa}\left((\alpha_1^0)^2 + (\alpha_2^0)^2\right) \geq 0.
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

2.2. Стационарное решение ниже порога генерации и его асимптотическая устойчивость

Основной целью данной работы является исследование стационарных решений выше порога генерации

$$d_c = \frac{\varkappa\gamma}{Ng^2},$$

однако для полноты коротко рассмотрим и случай, когда $d_0 < d_c$. Ниже порога генерации существует только одно стационарное решение вида $\{0, 0, 0, 0, Nd_0\}$, соответствующее спонтанному излучению.

Подставим его в матрицу (7) и обозначим ее через L_{sp}. Легко убедиться, что в силу $d_0 < d_c$ справедливо неравенство

$$\det L_{sp} = -\frac{(\varkappa\gamma - Nd_0 g^2)^2}{T} < 0, \tag{10}$$

т.е. L_{sp} – не вырождена. Поскольку

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} = 0, \tag{11}$$

то применима теорема об устойчивости по линейному приближению /7-9/. Характеристическое уравнение для матрицы L_{sp} имеет вид

$$\left(\lambda + \frac{1}{T}\right)\left(\lambda^2 + (\varkappa+\gamma)\lambda + \varkappa\gamma - Nd_0 g^2\right)^2 = 0. \tag{12}$$

Легко видеть, что при $-(\varkappa-\gamma)^2/4g^2N < d_0 < d_c$ это уравнение имеет три различных отрицательных корня, из которых два двукратно вырождены. Если $d_0 = -(\varkappa-\gamma)^2/4g^2N$, то имеется два различных отрицательных корня, один из которых четырехкратно вырожден. При $d_0 < -(\varkappa-\gamma)^2/4g^2N$ имеется один отрицательный корень и два двукратно вырожденных комплексно-сопряженных корня с отрицательными действительными частями.

Таким образом, согласно теореме об устойчивости по линейному приближению режим спонтанного излучения, описываемый стационарным решением $\{0, 0, 0, 0, Nd_0\}$, при всех значениях $d_0 < d_c$ является асимптотически устойчивым.

2.3. Стационарное решение выше порога генерации

Из уравнений (8) видно, что если

$$d_0 > d_c = \frac{\varkappa\gamma}{Ng^2},$$

то кроме рассмотренного в подразделе 2.2 режима спонтанного излучения возможно стационарное решение с ненулевыми значениями b_i^0 и α_i^0. Для последних величин можно ввести естественную параметризацию:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^0 = \alpha\cos\vartheta, \\ &\alpha_2^0 = \alpha\sin\vartheta, \\ &\alpha = \sqrt{(\alpha_1^0)^2 + (\alpha_2^0)^2}, \\ &0 \le \vartheta < 2\pi. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку для стационарного решения с ненулевыми α_i^0 и b_i^0 всегда выполняется

$$S^0 = \frac{\varkappa\gamma}{g^2}, \tag{14}$$

то из (9) получим

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa}{g^2 T}\left(N d_0 - \frac{\varkappa \gamma}{g^2}\right)}. \tag{15}$$

Таким образом, стационарное решение выше порога генерации, соответствующее лазерному режиму, имеет вид

$$\left\{ \frac{g}{\varkappa}\alpha \sin\vartheta, -\frac{g}{\varkappa}\alpha\cos\vartheta, \alpha\cos\vartheta, \alpha\sin\vartheta, \frac{\varkappa\gamma}{g^2} \right\}, \tag{16}$$

где величина α определена согласно (15), а фаза ϑ является свободным параметром, определяемым только из начальных условий.

Попутно отметим, что выше порога генерации, т.е. при условии $d_0 > d_c$, стационарное решение $\{0, 0, 0, 0, N d_0\}$, которое также возможно и соответствует спонтанному излучению, становится уже экспоненциально неустойчивым. Как видно из уравнения (12), один из его двукратно вырожденных корней в этом случае положителен.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

3.1. Уравнения в вариациях относительно стационарных решений (15)-(16), соответствующих лазерной генерации

Подставим решения (16) в матрицу (7). Обозначим получившуюся матрицу L_{las} и, пользуясь (6)-(8), запишем уравнения в вариациях $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\varkappa x_1 + g x_4, \\
\dot{x}_2 &= -\varkappa x_2 - g x_3, \\
\dot{x}_3 &= -\gamma x_3 - \frac{\varkappa\gamma}{g} x_2 + \frac{g^2}{\varkappa}\alpha\cos\vartheta\, x_5 - g x_2 x_5, \\
\dot{x}_4 &= -\gamma x_4 + \frac{\varkappa\gamma}{g} x_1 + \frac{g^2}{\varkappa}\alpha\sin\vartheta\, x_5 + g x_1 x_5, \\
\dot{x}_5 &= -\frac{x_5}{T} + g\alpha\cos\vartheta\, x_2 - \frac{g^2}{\varkappa}\alpha\cos\vartheta\, x_3 - g\alpha\sin\vartheta\, x_1 - \\
&\quad - \frac{g^2}{\varkappa}\alpha\sin\vartheta\, x_4 + g x_2 x_3 - g x_1 x_4.
\end{aligned} \tag{17}$$

Задача состоит в исследовании устойчивости нулевого решения системы (17) или, что то же самое, стационарного решения $\{b_1^0, b_2^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, S\} = \left\{\frac{g}{\varkappa}\alpha\sin\vartheta, -\frac{g}{\varkappa}\alpha\cos\vartheta, \alpha\cos\vartheta, \alpha\sin\vartheta, \varkappa\gamma/g^2\right\}$ исходной системы (4) или (1).

3.2. Вырожденность матрицы линейной части уравнений в вариациях и условия критического случая

Вычислим детерминант матрицы L_{las} линейной части системы (I7). После простых, но продолжительных вычислений получим, что при всех значениях $\text{æ}, \gamma, q, 1/T$ и N

$$\det L_{las} \equiv 0. \tag{I8}$$

Равенство (I8) отражает важнейшую особенность стационарного решения (I6) рассматриваемой динамической системы (4) или (I). Оно означает, что среди характеристических чисел матрицы L_{las} есть хотя бы одно нулевое. Тогда если среди ненулевых характеристических чисел матрицы L_{las} есть хотя бы одно с положительной действительной частью, то нулевое решение системы (I7), или, что то же самое, стационарное решение (I6) исходной системы (4) или (I), допускает исследование устойчивости по линейному приближению /7-9/ и является экспоненциально неустойчивым.

Если же среди ненулевых характеристических чисел матрицы L_{las} нет таковых с положительной действительной частью, то нулевое решение системы (I7) или решение (I6) исходной системы (4) или (I) не может быть исследовано на устойчивость по линейному приближению – реализуется критический случай.

Мы исчерпывающе рассмотрим в данной работе критический случай для системы (I7), когда есть один нулевой корень и ненулевые корни с отрицательной действительной частью.

Найдем характеристическое уравнение для матрицы L_{las}, вычисляя следующий детерминант:

$$\det(L_{las}-\lambda\hat{1}) = \begin{vmatrix} -(\lambda+\text{æ}) & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & -(\lambda+\text{æ}) & -q & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\text{æ}\gamma}{q} & -(\lambda+\gamma) & 0 & \frac{q^2}{\text{æ}}\alpha\cos 2\varphi \\ \frac{\text{æ}\gamma}{q} & 0 & 0 & -(\lambda+\gamma) & \frac{q^2}{\text{æ}}\alpha\sin 2\varphi \\ -q\alpha\sin 2\varphi & q\alpha\cos 2\varphi & -\frac{q^2\alpha\cos 2\varphi}{\text{æ}} & -\frac{q^2\alpha\sin 2\varphi}{\text{æ}} & -(\lambda+\frac{1}{T}) \end{vmatrix}. \tag{I9}$$

Приравнивая нулю определитель (I9), после длительных вычислений получим уравнение

$$\lambda^5 + C_1\lambda^4 + C_2\lambda^3 + C_3\lambda^2 + C_4\lambda = 0, \tag{20}$$

имеющее, как и следовало ожидать в силу (I8), один нулевой корень. Входящие в (20) коэффициенты равны

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2\varkappa + 2\gamma + \frac{1}{T} > 0, \\
C_2 &= (\varkappa+\gamma)\left(\varkappa+\gamma+\frac{2}{T}\right) + \frac{g^4}{\varkappa^2}\alpha^2 > 0, \\
C_3 &= \frac{(\varkappa+\gamma)^2}{T} + \frac{g^4}{\varkappa}\left(3+\frac{\gamma}{\varkappa}\right)\alpha^2 > 0, \\
C_4 &= 2g^4\left(1+\frac{\gamma}{\varkappa}\right)\alpha^2 > 0.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Все величины C_i положительны, следовательно, нулевой корень – единственный, и выполнено необходимое условие отрицательности действительных частей ненулевых корней уравнения (20). Потребуем далее, чтобы выполнялся критерий Рауса-Гурвица:

$$
\begin{aligned}
&T_0 = 1 > 0, \; T_1 = C_1 > 0, \; T_2 = C_1C_2 - C_0C_3 > 0, \\
&T_3 = C_3T_2 - C_1^2C_4 > 0, \; T_4 = C_4T_3 > 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

При выполнении условий (22), т.е. при положительности миноров Гурвица уравнения

$$
\lambda^4 + C_1\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_3\lambda + C_4 = 0, \tag{23}
$$

матрица L_{eas} имеет одно нулевое собственное значение и четыре отличных от нуля собственных значений с отрицательной действительной частью. В этом случае рассматриваемое нулевое решение системы (I7) или же стационарное решение исходной системы (4) не может быть исследовано на устойчивость по линейному приближению – требуются специальные методы /7-9/.

Выполнение условий (22) существенно зависит от знаков миноров T_2 и T_3, являющихся громоздкими рациональными функциями многих переменных:

$$
\begin{aligned}
T_2 &= T_2(d_0, \varkappa, \gamma, T, g, N), \\
T_3 &= T_3(d_0, \varkappa, \gamma, T, g, N).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Исследованию функций T_2 и T_3 посвящена отдельная работа, поскольку ситуации, которые возникают при их различных значениях, настолько разнообразны и интересны физически, что не входят в предмет исследования данной работы. Лишь один из возможных случаев ввиду его важности анонсирован в подразделе 3.3, а пока заметим следующее.

Условия (22) выполняются при значениях параметров, присущих большинству практических лазеров (см. книгу /I4/ и таблицу I на с.48 сборника /I5/). Не приводя здесь громоздких вычислений и трудноанализируемых общих выражений для величин T_2 и T_3, рассмотрим естественные для эксперимента частные случаи. Именно, пусть

$$
\frac{1}{T} = \gamma, \qquad \varkappa = K\gamma, \tag{25}
$$

где $K > 0$ – некоторое число. Тогда

$$T_2 = g^2\gamma N\left(\frac{2}{k}-1\right)d_0 + \gamma^3(2k^3+10k^2+17k+6), \tag{26}$$

$$\begin{aligned} T_3 = {} & g^4\gamma^2N^2\left(\frac{2}{k^2}+\frac{5}{k}-3\right)d_0^2 + \\ & + g^2\gamma^4N\left(\frac{6}{k}+15+22k-k^2-2k^3\right)d_0 + \\ & + \gamma^6\left(2k^5+16k^4+39k^3+31k^2+12k\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Положительность величин T_2 и T_3 при $d_0 > d_c = \varkappa\gamma/g^2N$ для большинства практических лазеров, когда $\varkappa < \gamma$, очевидна. В самом деле, если $\varkappa < \gamma$, то $k < 1$. Тогда T_2 как линейная функция d_0 положительна в области $d_0 > d_c > 0$. Величина T_3 как функция d_0 является полиномом второй степени, коэффициенты которого при $k < 1$ положительны. Поэтому T_2 имеет два отрицательных корня и ограничена снизу, следовательно, в области $d_0 > d_c > 0$ функция $T_2 = T_2(d_0)$ положительна.

Таким образом, условия (22) рассматриваемого нами критического случая для большинства практических лазеров /14,15/ выполняются.

3.3. Существование порога накачки для экспоненциально неустойчивого режима лазерного излучения в рассматриваемой модели

Некритический случай, т.е. когда действительная часть хотя бы одного из корней характеристического уравнения (20) положительна, представляет особый интерес. В некритическом случае, который в данной работе подробно рассматриваться не будет, решение (16) является экспоненциально неустойчивым. Поиск таких режимов излучения в лазерах является сейчас популярной экспериментальной и теоретической задачей (см., например, подраздел 2.3 сборника /16/ и дополнительную литературу там же). Однако для динамической системы (1) такая задача не ставилась, что, по всей видимости, было обусловлено теоретическими результатами (раздел 8.4 в книге /6/), упоминавшимися нами в подразделе 1.3).

Покажем, что экспоненциально неустойчивый режим излучения имеет место выше порога генерации для лазера, описываемого динамической системой (1). Для этого достаточно привести пример, т.е. указать такой набор значений $d_0 > d_c$, $\varkappa$, γ, T, g, N, имеющих физический смысл, когда по крайней мере одна из функций T_2 или T_3 является отрицательной. Тогда в силу теоремы Рауса-Гурвица /17/ среди корней уравнения (23) есть корни с положительной действительной частью, и решение (16) системы (4) экспоненциально неустойчиво /7-9/. Проще всего рассмотреть линейную по d_0 функцию $T_2'(d_0)$:

$$T_2'(d_0) = r(\varkappa, \gamma, T, g, N)\,d_0 + q(\varkappa, \gamma, T), \tag{28}$$

где коэффициенты равны

$$r(\varkappa,\gamma,T,g,N) = \frac{g^2 N}{\varkappa T}\left(\gamma + \frac{1}{T} - \varkappa\right), \tag{29}$$

$$q(\varkappa,\gamma,T) = 2(\varkappa+\gamma)^3 + \frac{4\varkappa^2 + 9\varkappa\gamma + 3\gamma^2}{T} + \frac{2\varkappa+\gamma}{T^2}. \tag{30}$$

Если выполняется условие

$$\varkappa > \gamma + \frac{1}{T}, \tag{31}$$

то $r(\varkappa,\gamma,T,g,N) < 0$, и функция $T_2(d_0)$ при

$$d_0 > d_{exp} = -\frac{q(\varkappa,\gamma,T)}{r(\varkappa,\gamma,T,g,N)} \tag{32}$$

становится отрицательной. Следовательно, при условии (31), по крайней мере в области (32), решение (16) будет экспоненциально неустойчиво. Осталось убедиться, что наше рассуждение имеет смысл, т.е. d_{exp} лежит в области существования решения (16). Для этого необходимо выполнение неравенства

$$d_{exp} \geq d_c = \frac{\varkappa\gamma}{g^2 N}. \tag{33}$$

Чтобы показать, что (33) имеет место, ограничимся примером. Пусть снова выполняются соотношения (25). Тогда

$$d_{exp} = \frac{\gamma^2}{g^2 N}\,\frac{6K + 17K^2 + 10K^3 + 2K^4}{K-2} = d_c\,\frac{6K + 17K^2 + 10K^3 + 2K^4}{K-2}. \tag{34}$$

Видно, что при К > 2 условие (33) выполнено. К примеру, если К = 3, то $d_{exp} = 603\,\gamma^2/g^2 N = 603\,d_c$. Таким образом, мы доказали существование порога экспоненциальной неустойчивости, не известного ранее для рассматриваемой модели, и получили примерные оценки (31) и (32) для области его существования и его значения. Очевидно, что оценки (31)-(32) могут быть заменены другими после исследования функции $T_3(d_0)$.

3.4. Приведение уравнений в вариациях к специальному виду, "особенный случай" критического случая и устойчивость лазерных решений

Итак, мы уже показали, что наличие у характеристического уравнения (20) кроме нулевого четырех ненулевых корней с отрицательными действительными частями является физически весьма вероятной ситуацией для практических лазеров. Поскольку в этом случае лазерное решение

(I6) не может быть исследовано на устойчивость по линейному приближению, следует воспользоваться теорией критических случаев для установившихся движений [7-9]. В нашей ситуации система (I7) сначала должна быть приведена к виду, когда производная одной из переменных [9] не имеет линейной части [7-9]. Не приводя здесь метода вычисления [9], введем новую переменную:

$$y = b_2^0 x_1 - b_1^0 x_2 + \frac{g}{\gamma} b_1^0 x_3 + \frac{g}{\gamma} b_2^0 x_4 . \tag{35}$$

Производная от этой переменной является нелинейной функцией x_i :

$$\dot{y} = \frac{g^2}{\gamma} x_5 \left(b_2^0 x_1 - b_1^0 x_2 \right). \tag{36}$$

Предположим далее, что

$$b_2^0 \neq 0, \tag{37}$$

и заменим в уравнениях (I7) переменную x_1 на y. Если бы $b_2^0 = 0$, то мы заменяли бы x_2 на y, действуя аналогично дальнейшему (выше порога $\alpha > 0$, поэтому, как видно из параметризации (I3), одновременное равенство нулю b_1^0 и b_2^0 невозможно). Система (I7) примет в переменных $\{y, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ вид

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{g^2}{\gamma} x_5 \left(y - \frac{g}{\gamma} b_1^0 x_3 - \frac{g}{\gamma} b_2^0 x_4 \right), \\
\dot{x}_2 &= -\varkappa x_2 - g x_3 , \\
\dot{x}_3 &= -\gamma x_3 - g S^0 x_2 - g b_2^0 x_5 - g x_2 x_5 ; \\
\dot{x}_4 &= -(\varkappa + \gamma) x_4 + \frac{\varkappa \gamma}{g b_2^0} y + \frac{\varkappa \gamma}{g} \frac{b_1^0}{b_2^0} x_2 - \varkappa \frac{b_1^0}{b_2^0} x_3 + \\
&\quad + g b_1^0 x_5 + g x_5 \left(\frac{1}{b_2^0} y + \frac{b_1^0}{b_2^0} x_2 - \frac{g}{\gamma} \frac{b_1^0}{b_2^0} x_3 - \frac{g}{\gamma} x_4 \right), \qquad (38) \\
\dot{x}_5 &= -\frac{x_5}{T} - g \frac{\alpha_2^0}{b_2^0} y + g \left(\alpha_1^0 - \frac{b_1^0 \alpha_2^0}{b_2^0} \right) x_2 + \\
&\quad + g \left(b_2^0 + \frac{g}{\gamma} \frac{b_1^0 \alpha_2^0}{b_2^0} \right) x_3 + g \left(\frac{g \alpha_2^0}{\gamma} - b_1^0 \right) x_4 + \\
&\quad + g x_2 x_3 - g x_4 \left(\frac{1}{b_2^0} y + \frac{b_1^0}{b_2^0} x_2 - \frac{g}{\gamma} \frac{b_1^0}{b_2^0} x_3 - \frac{g}{\gamma} x_4 \right),
\end{aligned}$$

где в коэффициентах фигурируют компоненты стационарного решения (I5)-(I6).

Чтобы применить теорему о критическом случае с одним нулевым характеристическим корнем [7,9], необходимо еще раз преобразовать уравнения (38) с тем, чтобы избавиться от линейных по y членов в правых частях этих уравнений. Не приводя метода нахождения такого нелинейного преобразования [7-9], выпишем конечный результат. Преобразование имеет вид

$$X_i = \xi_i + u_i(y), \qquad i = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \tag{39}$$

где функции $u_i(y)$, $i = 2, 3, 4, 5$, обращаются в нуль при $y = 0$ и обращают в нуль правые части уравнений (38) при $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$. Эти функции задаются соотношениями

$$\begin{aligned}
u_2(y) &= \frac{-A_1 - By + \sqrt{(A_1 + By)^2 - 4A_2(D_1 y + D_2 y^2)}}{2A_2}, \\
u_3(y) &= -\frac{\varkappa}{g} u_2(y), \\
u_4(y) &= \frac{\varkappa\gamma}{g b_2^0(\varkappa+\gamma)} y + \frac{\varkappa b_1^0}{g b_2^0}, \\
u_5(y) &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Параметры A_1, A_2, B, D_1 и D_2 следующим образом зависят от параметров исходной системы (4) или (I) и стационарного решения (I5)-(I6):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2g\alpha^2}{\alpha_1^0}, \\
A_2 &= -\frac{\varkappa\alpha^2}{(\alpha_1^0)^2}, \\
B &= -\frac{2\varkappa^2\gamma}{g(\varkappa+\gamma)} \frac{\alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2}, \\
D_1 &= \frac{2\varkappa\gamma}{\varkappa+\gamma} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0}, \\
D_2 &= -\frac{\varkappa^3\gamma^2}{g^2(\varkappa+\gamma)^2(\alpha_1^0)^2}.
\end{aligned} \tag{41}$$

После преобразований (35) и (39)-(4I) система (I7) принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot y &= Y(y, \xi_3, \xi_4, \xi_5), \\
\dot\xi_2 &= -\varkappa\xi_2 - g\xi_3, \\
\dot\xi_3 &= -\gamma\xi_3 - g s^0 \xi_2 - g b_2^0 \xi_5 - \Xi_3(y, \xi_2, \xi_5), \\
\dot\xi_4 &= -(\varkappa+\gamma)\xi_4 + \frac{\varkappa\gamma}{g}\frac{b_1^0}{b_2^0}\xi_2 - \varkappa\frac{b_1^0}{b_2^0}\xi_3 + \\
&\quad + g b_1^0 \xi_5 + \Xi_4(y, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5), \\
\dot\xi_5 &= -\frac{\xi_5}{T} + g\left(\alpha_1^0 - \frac{b_1^0\alpha_2^0}{b_2^0}\right)\xi_2 + g\left(b_2^0 + \frac{g}{\gamma}\frac{b_1^0\alpha_2^0}{b_2^0}\right)\xi_3 + \\
&\quad + g\left(\frac{g\alpha_2^0}{\gamma} - b_1^0\right)\xi_4 + \Xi_5(y, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5).
\end{aligned} \tag{42}$$

Не приводя здесь вида функций Y и Ξ_i, i = 3, 4, 5, которые легко вычисляются, отметим их главную особенность: при $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5$ = 0 эти функции становятся равными нулю:

$$Y(y,0,0,0,0) = \Xi_3(y,0,0) = \Xi_4(y,0,0,0,0) = \Xi_5(y,0,0,0,0) = 0. \qquad (43)$$

В этом случае система (42) допускает частное решение:

$$y = Const, \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0. \qquad (44)$$

Согласно соотношениям (43) по терминологии, принятой в теории устойчивости /7-9/, система (I7) относится к "особенному случаю" критического случая с одним нулевым корнем характеристического уравнения. При этом согласно соответствующей теореме Ляпунова /7-9/ тривиальное решение системы (I7), или, что то же самое, стационарное решение (I5)-(I6) исходной системы (4) или (I), является устойчивым, но не асимптотически устойчивым. Согласно следствию из этой теоремы любое нетривиальное решение системы (I7), достаточно близкое к тривиальному, или, что то же самое, любое решение исходной системы (4) или (I), достаточно близкое к стационарному решению, стремится с течением времени к одному из решений, определяемому из соотношений (44).

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Нами не рассмотрены два других критических случая, возможных для системы (4) или (I). Первый - это задача об устойчивости стационарного решения на пороге генерации, т.е. при $d_0 = d_c = æ\gamma/g^2N$, когда имеется два нулевых корня характеристического уравнения (20)-(2I), поскольку в этом случае C_4 = 0. Второй - это случай, когда характеристическое уравнение (20)-(2I) имеет один нулевой и два чисто мнимых корня. Последняя ситуация реализуется, когда $T_3(d_0, æ, \gamma, T, g, N)$ = 0. Уравнение четвертого порядка (23) может иметь одни только мнимые корни, если они двукратно вырождены. Дискриминант /I7/ уравнения (23) согласно аналитическим вычислениям на компьютере при ненулевых параметрах $æ$, γ, T, g и N отличен от нуля, следовательно, критический случай с одним нулевым и четырьмя мнимыми корнями для рассмотренной системы не имеет места.

Два вышеуказанных возможных критических случая требуют особых методов исследования /7-9/, отличных от примененного. Поэтому они не вошли в эту работу.

В рассмотренном случае учет случайной внешней силы приводит к неустойчивости решения, поскольку только асимптотическая устойчивость является достаточным условием устойчивости решения уравнений с постоянно действующим возмущением (см.основную теорему в § 74 книги [9]), а исследованное решение не является асимптотически устойчивым.

Асимптотически устойчивое лазерное решение можно искать только в критическом случае с одним нулевым и двумя мнимыми корнями характеристического уравнения. Даже если таковое и найдется (это, по мнению автора, маловероятно), то из условия $T_3 = 0$ следует, что это решение реализуется при единственном значениии $d_0 > d_c$ для фиксированных параметров задачи (см., к примеру, (27)).

5. ФИЗИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Известный приближенный результат (Хакен [6]) состоял в том, что лазерное излучение, описываемое системой (I), асимптотически устойчиво при $\varkappa \ll \gamma, 1/T$. Следовательно, влиянием флуктуаций, например температурных, можно было пренебречь хотя бы для $\varkappa \ll \gamma, 1/T$, что означало пригодность модели для описания лазеров с достаточно стабильными фазой и амплитудой излучения.

Здесь проведено строгое исследование практически для всех физических значений параметров. Выяснилось, что асимптотическая устойчивость не имеет места - система может быть либо просто устойчивой, либо экспоненциально неустойчивой.

Первое означает, что случайной силой, т.е. флуктуациями, нельзя пренебрегать. Учет флуктуаций приводит к неустойчивости. Это будет неустойчивость фазы излучения ϑ, поскольку именно она в силу (I3) параметризует семейство решений (44), к одному из которых в силу следствия из теоремы об устойчивости в критическом случае стремится всякое мало возмущенное решение. Следовательно, в этом случае модель описывает лазер с неустойчивой фазой и устойчивой амплитудой излучения.

Второе означает, что по крайней мере при условии (3I) при повышении интенсивности накачки такой лазер переходит в экспоненциально неустойчивый режим. Существование порога экспоненциальной неустойчивости для данной модели ранее известно не было. Анализ параметров практических лазеров [I4,I5] показывает, что наиболее удобным объектом экспериментальной проверки предсказаний модели при условии (3I) является CO_2-лазер. Эксперимент, по-видимому, возможен и на других газовых лазерах, если длина резонатора в них может быть изменена до нужной величины. Отметим, что условие (3I) совпадает с аналогичным для модели Лоренца (см. соотношения (I2.I0) в [6]), что указывает на качественное сходство моделей в данной области параметров.

И, наконец, вспомним об аналогии между порогом генерации в лазере и фазовым переходом 2-го рода /I8,I5/. Такая аналогия строится на сходстве функции Ляпунова для лазерной системы и разложения Ландау для термодинамического потенциала вблизи критической точки. Из устойчивости лазерного решения следует существование для этого случая функции Ляпунова /I9/, однако не совсем ясно, будет ли ее разложение при малых амплитудах поля иметь вид, аналогичный вышеупомянутому разложению Ландау. Поэтому данный вопрос остается открытым для рассмотренной нами системы.

Автор признателен Е.П.Жидкову и П.Е.Жидкову за внимание и ценные замечания.

Литература

I. A.A.Bakasov. Phys.Lett., A130 (1988), 461.
2. А.В.Андреев, В.И.Емельянов, Ю.А.Ильинский. УФН, 1980, т.131, с.653.
3. F.T.Arecchi and E.Courtens. Phys.Rev., A2 (1970), 1730.
4. R.Bonifacio, P.Schwendimann and F.Haake. Phys.Rev., A4 (1971), 302.
5. H.Haken. Encyclopedia of physics, Vol. XXV/2c, Laser theory (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970).
6. H.Haken. Synergetics (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978).
7. А.М.Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., Гос. изд.техн.-теор. лит., 1950.
8. Н.Г.Четаев. Устойчивость движения. М.-Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1955.
9. И.Г.Малкин. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
I0. H.Haken, H.Ohno. Opt.Comm., 16 (1976), 205.
II. H.Ohno, H.Haken. Phys.Lett., A59 (1976), 261.
I2. H.Haken. Zs.Phys., 181 (1964), 96.
I3. E.N.Lorenz. J.Atmosph.Sci., 20 (1963), 130.
I4. Laser handbook, ed.by F.T.Arecchi and E.O.Schultz-Dubois, Vol. 1 (North-Holland, Amsterdam, 1972).
I5. Nonequilibrium Cooperative Phenomena in Physics and Related Fields, ed.by M.G.Velarde (Plenum Press, New York-London, 1984).
I6. Universality of Chaos, ed.by P.Cvitanović (Adam Hilger Ltd., Bristol, 1984).

I7. Д.К.Фаддеев, И.С.Соминский. Сборник задач по высшей алгебре, М., Наука, I968.
I8. V.DeGiorgio and M.O.Scully. Phys.Rev., A2 (1970), 1170.
I9. Н.Н.Красовский. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.,Физматгиз,I959.

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 марта I989 года.