ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17-89-146

О.К.Пашаев

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА НА СУПЕРАЛГЕБРАХ SU(N|M)

Направлено в Оргкомитет школы-семинара
"Представления групп в физике",
г.Тамбов, 24-28 января 1989 г.

1989

В последнее время значительный интерес представляют суперсимметричные интегрируемые модели. Они связаны с теорией суперструн и суперконформной теорией, с одной стороны[1], с теорией высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) - с другой[2,3]. Построение микроскопической теории ВТСП возродило интерес к модели Хаббарда[4]. В работе Хаббарда были введены операторы Хаббарда X^{pq} и показано, что операторы, меняющие число электронов на нечетное, подчиняются антикоммутационным соотношениям, а сама алгебра операторов Хаббарда есть супералгебра. Если в i-узле имеется M состояний с нечетным числом электронов и N состояний с четным числом электронов, то операторы Хаббарда $X_i^{pq} = |p,i\rangle\langle i,q|$ образуют общую линейную градуированную алгебру Ли $p\ell(N|M)$:

$$[X_i^{pq}, X_j^{nm}\} = \delta_{ij}(X_i^{pm}\delta_{qn} \pm X_i^{nq}\delta_{mp}). \tag{1}$$

Пусть электроны в узлах решетки находятся в состоянии с угловым моментом ℓ и описываются ферми-операторами c_σ, $(\sigma = 1, \ldots, n = 2(2\ell+1))$,

$$\{c_{i\sigma}, c^+_{j\sigma'}\} = \delta_{ij}\,\delta_{\sigma\sigma'}, \quad \{c_{i\sigma}, c_{j\sigma'}\} = \{c^+_{i\sigma}, c^+_{j\sigma'}\} = 0. \tag{2}$$

Тогда полное число состояний в узле

$$|0\rangle, \ c^+_\sigma|0\rangle, \ c^+_{\sigma_1} c^+_{\sigma_2}|0\rangle, \ldots, c^+_{\sigma_1}c^+_{\sigma_2}\ldots c^+_{\sigma_n}|0\rangle \tag{3}$$

равно $2^{4\ell+2}$. Можно доказать[5], что количество бозе-состояний равно числу ферми-состояний, так что алгебра операторов Хаббарда будет $p\ell(2^{4\ell+1}, 2^{4\ell+1})$, а волновые функции преобразуются по ее представлению. В простейшем случае s-состояний в модели Хаббарда

$$H = \sum_{i,j}\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij}\, c^+_{i\sigma} c_{j\sigma} + \sum_{ij} U_{ij}\, n_{i\uparrow} n_{j\downarrow} \qquad (U_{ij} = U\delta_{ij}) \tag{4}$$

имеется 4 состояния (3): 2-бозе- и 2-ферми-состояния, преобразующихся по представлению супералгебры $p\ell(2|2)$. В области сильных корреляций (теория ВТСП), когда $U \to \infty$, дважды заполненные состояния $|2\rangle = c^+_\uparrow c^+_\downarrow|0\rangle$ отсутствуют, и гамильтониан

Хаббрада принимает вид

$$H = \sum_{ij} \{ t_{ij} (X_i^{\uparrow 0} X_j^{0\uparrow} + X_i^{\downarrow 0} X_j^{0\downarrow}) + U_{ij} X_i^{\uparrow\uparrow} X_j^{\downarrow\downarrow} \} \tag{5}$$

обобщенной модели Гейзенберга на супералгебре $p\ell(2|1)$ [2,8] . Учет валентности атомов также может менять число бозе- и ферми-состояний [5] . Поэтому мы рассмотрим общий случай - супералгебру $p\ell(N|M)$.

Возьмем линейную задачу для модели Гейзенберга на бесконечномерной супералгебре $p\ell(N|M) \otimes \boldsymbol{R}[\lambda, \lambda^{-1}]$. Пространство состояний линейной задачи в каждой точке пространства-времени (x, t) , аналогично квантовой задаче, описывается $(N + M)$-компонентным спинором

$$\Phi^{T(\lambda)}(x, t) = (\Phi_1^{(\lambda)}, \dots, \Phi_N^{(\lambda)} \mid \chi_1^{(\lambda)}, \dots, \chi_M^{(\lambda)})$$

градуированного векторного пространства $V(N|M)$ с N-бозе и M-ферми измерениями. Компактной формой супергруппы $PL(N|M)$ является

$$SU(N|M) = \{ R;\ R \in PL(N|M),\ s\det R = 1,\ RR^{+} = I \},$$

где $s\det$ - супердетерминант матрицы R. Одномерные модели Гейзенберга для супергруппы $SPL(2|1)$ были построены ранее в [6] , а для некомпактной супергруппы $OSPU(1,1|1)$ в [7] . В настоящей работе мы построим изотропную одномерную модель Гейзенберга на компактной супералгебре $su(N|M)$, а также двумерные модели Гейзенберга, являющиеся суперобобщением $su(2)$ σ-модели и модели Ишимори [8].

1. Генераторы супергруппы $SU(N|M)$ в фундаментальном представлении имеют вид [9]

$$SU(N): \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} \lambda_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right); \quad SU(M): \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_m \end{array}\right); U(1): \frac{2NM}{M-N}\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{N} I_N & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{M} I_M \end{array}\right) \tag{6}$$

- бозе-генераторы,

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ & \vdots & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \quad S_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ & \vdots & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

-ферми-генераторы.

Здесь λ_n и λ_m - λ -матрицы подгрупп $SU(N)$ и $SU(M)$. Рассмотрим матрично-значную функцию двух переменных $S(x, t) \in su(N|M)$. Диагонализуем ее

$$S(x, t) = g^{-1}(x, t)\, \Sigma\, g(x, t) \tag{7}$$

где $g \in SU(N|M)$. Локальные преобразования $g \to e^{ih(x,t)} g$, где $[\Sigma, h] = 0$, оставляют S на месте и принадлежат подгруппе $H \subset SU(N|M)$, так что $S \in SU(N|M)/H$. Структура матрицы Σ определяет проектор на однородное пространство $SU(N|M)/H$ и соответствующие связи на S. Выберем $U(1)$-генератор из (6) в качестве

$$\Sigma = \frac{2NM}{M-N}\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{N} I_N & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{M} I_M \end{array}\right). \tag{8}$$

Тогда имеем связи

$$S^2 = 2\frac{N+M}{M-N} S - \frac{4NM}{(M-N)^2} I \tag{9}$$

и проектор $P = \frac{1}{2}(S + \frac{2N}{N-M} I)$ на однородное суперпространство

$SU(N|M) / S(U(N) \otimes U(M) \otimes U(1))$. Линейная задача задается матричными операторами

$$U = i\lambda S, \quad V = i\lambda^2 S + \frac{\lambda}{2}[S, S_x]. \tag{10}$$

Условие нулевой кривизны $U_t - V_x + [U, V] = 0$ порождает уравнение Ландау - Лифшица

$$iS_t = [S, S_{xx}] \tag{11}$$

для изотропного $SU(N|M)/S(U(N) \otimes U(M) \otimes U(1))$ магнетика Гейзенберга.

Для построения нелинейного уравнения Шредингера, ассоциированного с моделью магнетика (11), введем ток J_μ, $(\mu = 0, 1)$:

$$J_1 = g_x g^{-1}, \quad J_0 = g_t g^{-1}, \tag{12}$$

где $g(x, t) \in SU(N|M)$ - диагонализирующая матрица из ур.(7). Разложим алгебру $su(N|M)$ на две ортогональные части $su(N|M) = L^{(0)} \oplus L^{(1)}$, где $[L^{(i)}, L^{(j)}] \subset L^{(i+j)\,\mathrm{mod}(2)}$ и

$$L^{(0)} = s(u(N) \oplus u(M) \oplus u(1)) . \qquad (13)$$

Допустим, что $J_1 \subset L^{(1)}$ и имеет вид

$$J_1 = i \left(\begin{array}{c|c} 0 & \Psi \\ \hline \Psi^+ & 0 \end{array} \right) \qquad (14)$$

где $\Psi(x, t)$ - грассманово-нечетная $N \times M$ -матрица. Из условия нулевой напряженности $\partial_0 J_1 - \partial_1 J_0 + [J_1, J_0] = 0$, чисто калибровочного неабелева поля (12), используя уравнения движения (11) и условие $\partial_\mu S = g^{-1}[\Sigma, J_\mu]g$, получим

$$J_0 = i \left(\begin{array}{c|c} \Psi\Psi^+ & i\Psi_x \\ \hline -i\Psi_x^+ & -\Psi^+\Psi \end{array} \right) . \qquad (15)$$

Выполняя калибровочное преобразование потенциалов (10), имеем

$$\tilde{U} = gUg^{-1} + g_x g^{-1} = i\lambda\Sigma + J_1 , \ \tilde{V} = gVg^{-1} + g_t g^{-1} = i\lambda^2 \Sigma + \lambda J_1 + J_0 . \qquad (16)$$

Условие нулевой кривизны для (16) приводит к матричному грассманову НУШ

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2\Psi\Psi^+\Psi = 0 . \qquad (17)$$

Отметим, что впервые НУШ на антимоммутирующих переменных рассматривал Кулиш [10]. Из уравнения (17) легко получить матрицу NM сохраняющихся зарядов

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\Psi^+ \, dx , \qquad (18)$$

соответствующих $U(N) \otimes U(M)$ -глобальной симметрии НУШ (17). Из условия $S_x = g^{-1}[\Sigma, J_1]g$ получаем связь

$$\frac{1}{8} \operatorname{str} S_x^2 = \operatorname{tr} \Psi\Psi^+ , \qquad (19)$$

показывающую, что интеграл движения

$$H = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{str} S_x^2 \, dx \qquad (20)$$

является функцией Гамильтона модели Гейзенберга. Из (20) видно, что модель Гейзенберга инвариантна относительно глобальной супергруппы $SU(N|M)$: $S \to S' = R^{-1}SR$, $R \in SU(N|M)$, в отличие от НУШ, обладающего лишь $U(N)\otimes U(M)$ группой симметрии. Очевидно, что НУШ обладает глобальной суперсимметрией лишь в случае, когда подгруппа $H\subset SU(N|M)$ является суперподгруппой. Такая возможность может быть реализована, если при разложении (13) супералгебры $su(N|M)$ в качестве $L^{(0)}$ мы выберем суперподалгебру $L^{(0)}=S(u(N-p)\oplus u(p|M)\oplus u(1))$. Тогда матрица

$$S\in SU(N|M)/S(U(N-p)\otimes U(p|M)\otimes U(1)),$$

и, повторяя приведенные выше рассуждения, можно получить калибровочно-эквивалентную модель НУШ. Отличие будет заключаться в том, что в уравнениях (14), (15) вместо $\Psi(x,t)$ будет $(N-p)\times(M+p)$ матрица $Z=(\underbrace{\Phi}_{p}\,\vdots\,\underbrace{\Psi}_{M})\}\,N-p$, в которой первые p-столбцов являются грассманово-четными функциями $\Phi(x,t)$, а остальные M столбцов - грассманово-нечетными $\Psi(x,t)$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} i\Phi_t+\Phi_{xx}+2\Phi\Phi^+\Phi+2\Psi\Psi^+\Phi=0,\\ i\Psi_t+\Psi_{xx}+2\Psi\Psi^+\Psi+2\Phi\Phi^+\Psi=0.\end{cases}\tag{21}$$

Матрица сохраняющихся зарядов содержит p^2+M^2 четных зарядов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\Phi^+dx,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Psi\Psi^+dx\tag{22}$$

и pM нечетных зарядов $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\Psi^+dx$. Они соответствуют глобальной суперсимметрии НУШ относительно супергруппы $U(N-p)\otimes U(p|M)$. Так как НУШ (21) интегрируемо, то оно обладает сериями бесконечного числа интегралов движения /11/. Локальные интегралы движения порождаются суперследом матрицы перехода $T(\lambda)\in SU(N|M)$. Нелокальные серии интегралов движения порождаются элементами сохраняющихся $(N-p)\times(N-p)$ - , $(p\times p)$ - и $(M\times M)$ -блоков. Единственными локальными интегралами в этих сериях будут первые интегралы, и они совпадают с зарядами (22) глобальной супергруппы $U(N-p)\otimes U(p|M)$. При этом серии нелокальных интегралов, соответствующие зарядам $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\Psi^+dx$, будут все грассманово-нечетными.

Гамильтонова структура для модели НУШ (21) задается суперскобками Пуассона

$$\{A,B\}_{sp}=\mathrm{str}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(A\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta Z}\,\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta Z^+}B-(-1)^{p(A)p(B)p(Z)p(Z^+)}B\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta Z}\,\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta Z^+}A\Big)dx,\tag{23}$$

где $p(X) = 0,$, $(X = A, B, Z, Z^{+})$ – для грассманово-четных и $p(X) = 1$ – для грассманово-нечетных элементов, и гамильтонианом

$$H = \mathrm{str} \int_{-\infty}^{+\infty} (Z_x^{+} Z_x - Z^{+} Z Z^{+} Z)\, dx \ . \tag{24}$$

Суперскобка Пуассона для магнетика Гейзенберга с гамильтонианом (20) определяется на искривленном фазовом пространстве супергруппы $SU(N|M)$ с структурными константами c_{abc}:

$$\{A, B\} = \sum_{a,b,c} c_{abc} A \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta S_a} S_c \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta S_b} B. \tag{25}$$

Для компонент супернамагниченности $M_a = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(x, t)\, dx$ получаем супералгебру $su(N|M)$:

$$\{M_a, M_b\} = c_{abc} M_c \ . \tag{26}$$

Причем грассманово-нечетные компоненты M_a есть нечетные интегралы движения, генерирующие преобразования суперсимметрии. Было показано /6/, что калибровочно-эквивалентные модели НУШ (17) и МГ (11) на супералгебре $su(2|1)$ соответствуют двум различным представлениям простейшей модели Хаббарда, в терминах ферми-операторов (4) и операторов Хаббарда (5) соответственно. Они могут быть получены усреднением соответствующих гамильтонианов по грассмановым когерентным состояниям и обобщенным когерентным состояниям на супералгебре $su(2|1)$.

2. Предыдущее рассмотрение касалось лишь одномерной модели Гейзенберга. Однако известно, что в теории ВТСП необходимо использовать двумерную решетку. Поэтому представляет интерес построение 2-мерных интегрируемых моделей Гейзенберга на супералгебрах Ли.

Известно, что статический предел $S_t = 0$ двумерной модели Гейзенберга

$$S_{xx} + S_{yy} + S(S_x S_x + S_y S_y) = 0 \tag{27}$$

совпадает с $O(3)$-нелинейной σ-моделью, калибровочно-эквивалентной эллиптическому уравнению Синус-Гордон /12/. В случае, когда

$$S \in SU(N|M) \,/\, S(U(N) \otimes U(M) \otimes U(1)) ,$$

уравнения (27) не меняются по форме и в переменных $\xi = x + iy$ имеют вид

$$[S, S_{\xi\bar{\xi}}] = 0.$$

Они возникают из условия совместности системы

$$\Phi_{\xi} = \frac{1}{4}(\lambda - 1)[S, S_{\xi}]\Phi, \quad \Phi_{\bar{\xi}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)[S, S_{\bar{\xi}}]\Phi, \tag{28}$$

где $\Phi \in V(N|M)$. Кроме нелинейной $SU(2)$ σ-модели, которая описывает статические 2-мерные конфигурации, интегрируемой эволюционной моделью магнетика является (2+1)-мерная модель, предложенная Ишимори [8]

$$\begin{cases} \vec{S}_t + \vec{S} \times (\vec{S}_{xx} + \epsilon^2 \vec{S}_{yy}) + \phi_x \vec{S}_y + \phi_y \vec{S}_x = 0, \\ \phi_{xx} - \epsilon^2 \phi_{yy} = -2\epsilon^2 \vec{S}(\vec{S}_x \times \vec{S}_y), \end{cases} \tag{29}$$

где $\vec{S}^2 = 1$ и $\epsilon^2 = \pm 1$. Особенностью этой системы является наличие топологического заряда

$$N = \frac{1}{4\pi} \iint dx\, dy\, \vec{S}(\vec{S}_x \times \vec{S}_y) \tag{30}$$

и связанного с ним дополнительного скалярного поля $\phi(x, y)$.

Суперобобщение модели (29) удобно выписать в матричном виде. Пусть $S \in SU(2|1)/H$, где $H = S(U(2) \otimes U(1))$ либо $H = S(L(1|1) \otimes U(1))$, и удовлетворяет условиям $S^2 = 3S - 2I$ и $S^2 = S$ соответственно [6]. Тогда уравнения движения для

$$S \in SU(2|1)/S(L(1|1) \otimes U(1)),$$

например, имеют вид

$$\begin{aligned} iS_t &= [S, S_{xx}] + \epsilon^2 [S, S_{yy}] + i(\phi_x S_y + \phi_y S_x) + \\ &+ \frac{i\epsilon}{2}(\epsilon^2 \phi_{xx} - \phi_{yy}) I + 2\epsilon [S_x, S_y](2S - I). \end{aligned} \tag{31}$$

Они возникают из уравнения Лакса $L_t = AL - LA$, где

$$\begin{aligned} L &= (2S - I)\partial_x + \epsilon \partial_y, \\ A &= -2i(2S - I)\partial_x^2 + [-2iS_x - 2i\epsilon S_y(2S - I) + \\ &+ \phi_y I - \epsilon^3 \phi_x (2S - I)]\partial_x. \end{aligned} \tag{32}$$

Разрешение системы связей при разложении по базису с двумя образующими Грассмана $\theta, \bar\theta$:

$$S_a = S_a^{(0)} + S_a^{(1)} \bar\theta\theta , \quad C_{1,2} = f_{1,2}(x, y, t)\, \theta .$$

где

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \tilde S + S_4 I_2 & f^- \\ \hline f^+ & 2S_4 \end{array} \right), \quad f^+ = (C_1^+ C_2^+), \quad \tilde S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix},$$

дает

а) $S \in SU(2|1) / S(U(2) \otimes U(1))$,

$$S_i^{(0)}(x, y, t) = 0, \quad S_- = S_1 - iS_2 = -f_1 \bar f_2 \bar\theta\theta .$$

$$S_3 = \frac{1}{2}(|f_1|^2 + |f_2|^2)\bar\theta\theta, \quad S_4 = 1 - \frac{1}{2}(|f_1|^2 + |f_2|^2)\bar\theta\theta$$

(для чисто грассманова НУШ (17) не существует модели Гейзенберга в нулевом, чисто бозонном приближении).

б) $S \in SU(2|1) / S(L(1|1) \otimes U(1))$.

В этом случае существует чисто бозонный предел МГ (как и у соответствующей модели НУШ (21))

$$S_-^{(0)} = -\frac{f_1 \bar f_2}{|f_1|^2 + |f_2|^2}, \quad S_3^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{|f_2|^2 - |f_1|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2}, \quad S_4^{(0)} = \frac{1}{2},$$

где фермионные компоненты $f_1(x, y, t)$, $f_2(x, y, t)$ задаются стереографической проекцией классического вектора спина

$$S_-^{(0)} = -\frac{\bar\zeta}{1 + |\zeta|^2}, \quad S_3^{(0)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2}, \quad \left(\zeta = \frac{f_2}{f_1}\right),$$

$$(S_1^{(0)})^2 + (S_2^{(0)})^2 + (S_3^{(0)})^2 = \frac{1}{4},$$

подчиняющегося уравнениям $su(2)$ магнетика (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sen A.Stanford Univ. preprint, SLAC-PUB-4136, 1986;
Saito S. - Preprint TMUP-HEL-8615, 1986;
Chaichian M., Kulish P. - Phys.Lett., 1987, 183B, p.169;
Yamanaka I., Sasaki R. - Preprint RRK 87-21, 1987.

2. Wiegmann P.B. - Phys.Rev.Lett., 1988, 60, p.821.
3. Zou Z., Anderson P.W. - Princeton Univ.preprint, May,1987
4. Hubbard J. - Proc.Roy.Soc., 1963, 276A, p.238.
5. Зайцев Р.О. - Препринт ИАЭ-3965/1, М., 1984.
6. Makhankov V.G., Pashaev O.K. - Report on the IX Congress of IAMP, Swansen, 1988. 1988, Preprint JINR E17-89-304, Dubna, 1989.
7. Makhankov V.G., Myrsakulov R., Pashaev O.K. - Lett.Math. Phys., 1988, 16, p.83.
8. Ishimori Y. - Progr.Theor.Phys., 1984, 72, p.33.
9. Bars I. - Preprint YTP 82-25, M., 1982.
10. Кулиш П.П. - ДАН СССР, 1980, 255, с.323.
11. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. - ТМФ, 1982, 53, с.55.
12. Додд Р. и др. - Солитоны и нелинейные волновые уравнения М.: Мир, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1989 года.