СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17 - 8820

С.С.Лапушкин

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С АДДИТИВНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

1975

P17 - 8820

С.С.Лапушкин

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С АДДИТИВНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Лапушкин С.С. P17 - 8820

Об асимптотически точном решении модельных задач с аддитивным гамильтонианом

Для модельных задач с аддитивным гамильтонианом построено асимптотически точное решение на основе принципа минимакса Н.Н.Боголюбова (мл.). В качестве примера рассматривается гейзенберговская модель с дальнодействием между спинами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Lapushkin S.S. P17 - 8820

On Asymptotically Exact Solution of Model Problems with Additive Hamiltonian

For model problems with the additive Hamiltonian there were constructed asymptotically exact solutions on the basis of minimax principle by N.N. Bogolubov (junior). As an example the Heisenberg model with long-range interaction between spins is considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

Широкое признание в современной статистической физике получили методы исследования модельных систем, допускающих асимптотически точное решение в термодинамическом пределе. Значительный успех в изучении спиновых модельных гамильтонианов оказался возможным при применении принципа минимакса Н.Н.Боголюбова (мл.), основанного на введении аппроксимирующего гамильтониана для модельных задач, содержащих одновременно члены с положительным и отрицательным взаимодействием [I, 2].

Метод аппроксимирующих гамильтонианов позволил рассмотреть асимптотические свойства модели Изинга, включающей наряду со взаимодействием между ближайшими соседями положительное инфинитезимально малое дальнодействующее взаимодействие типа "все-со-всеми" [3]. Для определенного класса моделей с положительным дальнодействием в работе [4] предложено доказательство асимптотической близости плотностей свободных энергий модельной и аппроксимирующей систем исходя из аддитивности аппроксимирующего гамильтониана. Путем построения аддитивного аппроксимирующего гамильтониана удалось также асимптотически точно решить задачу с кластерным взаимодействием между спинами [5].

Условимся называть аддитивным аппроксимирующий гамильтониан, представляющий собой тензорную сумму одночастичных гамильтонианов, а модельные задачи, допускающие при таком построении асимптотически точное решение - задачами с аддитивным гамильтонианом. Заметим, что свойства тензорных сумм и произведений операторов в гильбертовых пространствах весьма эффективно применены Тиррингом [6] для изучения спиновых модельных систем типа Гейзенберга.

I.

Изложим сначала формально свойства аддитивного гамильтониана, не конкретизируя физическую модель. Пусть квантово-механическая система состоит из $\mathcal{N}$ невзаимодействующих подсистем и описывается гамильтонианом, который является тензорной суммой гамильтонианов подсистем:

$$H = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} {}^{\oplus} H_j = H_1 \underset{\mathcal{N}-1}{\otimes} \mathbb{1} + \ldots + \underset{K-1}{\otimes} \mathbb{1} \otimes H_K \underset{\mathcal{N}-K}{\otimes} \mathbb{1} + \ldots + \underset{\mathcal{N}-1}{\otimes} \mathbb{1} \otimes H_{\mathcal{N}}. \tag{I}$$

Здесь $\mathbb{1}$ – тождественный оператор. Каждая подсистема, в свою очередь, описывается гильбертовым пространством $\mathcal{H}_j$ и гамильтонианом H_j, действующим в $\mathcal{H}_j$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ состояний системы является тензорным произведением пространств $\mathcal{H}_j$ (см. [6] или [7]):

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{H}_j . \tag{2}$$

В частности, если система состоит из $\mathcal{N}$ одинаковых частиц, то пространства $\mathcal{H}_j$ совпадают, $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}$ является тензорной $\mathcal{N}$-ой степенью пространства $\mathcal{H}_j$.

Для любого набора векторов $f_1 \in \mathcal{H}_1, f_2 \in \mathcal{H}_2, \ldots, f_{\mathcal{N}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ определен вектор $\Phi = \mathcal{F}(f_1, f_2, \ldots, f_{\mathcal{N}}), \Phi \in \mathcal{H}$, причем $\mathcal{F}$ является полилинейной функцией $\mathcal{N}$ элементов [8] $\{f_1 f_2 \cdots f_{\mathcal{N}}\} = \mathcal{F}(f_1, \ldots, f_{\mathcal{N}})$, а линейный оператор H определен на $\mathcal{H}$ в

соответствии с (I):

$$H\{f_1 f_2 \cdots f_{\mathcal{N}}\} = (H_1 f_1) f_2 \cdots f_{\mathcal{N}} + f_1 (H_2 f_2) f_3 \cdots f_{\mathcal{N}} + \ldots + f_1 \cdots f_{\mathcal{N}-1} (H_{\mathcal{N}} f_{\mathcal{N}}). \tag{3}$$

Заданный правилом (3) оператор по линейности распространяется на множество конечных линейных комбинаций произведений $\{f_1 f_2 \cdots f_{\mathcal{N}}\}$.

Рассмотрим гильбертово пространство волновых функций одночастичных состояний. Пусть X_j – совокупность величин, использующихся для представления волновой функции j-ой частицы, $\varphi_{k_j}(X_j)$ – k-ая собственная функция оператора H_j, $\varepsilon_{j k_j}$ – соответствующее собственное значение $(k_j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$H_j \varphi_{k_j}(X_j) = \varepsilon_{j k_j} \varphi_{k_j}(X_j) .$$

Тогда аддитивность гамильтониана H выразится с помощью (3) следующим образом:

$$H \varphi_{k_1}(X_1) \cdots \varphi_{k_{\mathcal{N}}}(X_{\mathcal{N}}) = (\varepsilon_{1k_1} + \varepsilon_{2k_2} + \ldots + \varepsilon_{\mathcal{N}k_{\mathcal{N}}}) \varphi_{k_1}(X_1) \cdots \varphi_{k_{\mathcal{N}}}(X_{\mathcal{N}}). \tag{4}$$

Занумеруем все $n^{\mathcal{N}}$ наборов $(k_1, k_2, \ldots, k_{\mathcal{N}})$, например, в лексикографическом порядке и обозначим $\mathcal{N}$- частичную волновую функцию через

$$\Psi_m(X_1, \ldots, X_{\mathcal{N}}) = \bigotimes_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_{k_j}(X_j), \tag{5}$$

а соответствующее ей собственное значение через $E_m = (\varepsilon_{1k_1} + \varepsilon_{2k_2} + \ldots + \varepsilon_{\mathcal{N}k_{\mathcal{N}}})$, где m есть номер набора $(k_1, k_2, \ldots k_{\mathcal{N}})$. С учетом этих обозначений уравнение (4) выглядит, как обычно:

$$H \Psi_m(X_1, \ldots, X_{\mathcal{N}}) = E_m \Psi_m(X_1, \ldots, X_{\mathcal{N}}). \tag{6}$$

Определим условие ортонормированности базисных векторов $\Psi_m(x_1,\dots,x_N)$ в пространстве $\mathcal{H}$ через одночастичные базисные векторы $\varphi_{k_j}(x_j)$ в пространствах-копиях $\mathcal{H}_j$:

$$\sum_{x_1,\dots,x_N} \Psi_m(x_1,\dots,x_N)\overset{*}{\Psi}_{m'}(x_1,\dots,x_N)=\sum_{x_1,\dots,x_N}\left\{\overset{N}{\underset{\ell=1}{\otimes}}\varphi_{k_\ell}(x_\ell)\right\}\left\{\overset{N}{\underset{\ell=1}{\otimes}}\overset{*}{\varphi}_{k'_\ell}(x_\ell)\right\}=$$

$$=\prod_{j=1}^{N}\left\{\sum_{x_j}\varphi_{k_j}(x_j)\overset{*}{\varphi}_{k'_j}(x_j)\right\} = \prod_{j=1}^{N}\delta_{k_j}^{k'_j} = \delta_m^{m'}. \qquad (7)$$

Воспользуемся здесь для характеристики нашего ансамбля ненормированной матрицей плотности [7] и запишем для нее уравнение в операторном виде:

$$e^{-\beta H}\Psi_m(x_1,\dots,x_N)=\left\{\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}}e^{-\beta H_j}\right\}\left\{\overset{N}{\underset{\ell=1}{\otimes}}\varphi_{k_\ell}(x_\ell)\right\}=$$

$$= e^{-\beta\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{jk_j}}\left\{\overset{N}{\underset{\ell=1}{\otimes}}\varphi_{k_\ell}(x_\ell)\right\}= e^{-\beta E_m}\Psi_m(x_1,\dots,x_N). \qquad (8)$$

Затем, принимая во внимание (7) и (8), получаем известное свойство следа тензорного произведения [8]:

$$Sp\, e^{-\beta H}=\sum_{x_j=x'_j}\sum_{m} e^{-\beta E_m}\Psi_m(x_1,\dots,x_N)\overset{*}{\Psi}_m(x'_1,\dots,x'_N)=$$

$$=\sum_{\substack{x_j=x'_j\\(k_1,\dots,k_N)}}\left\{\overset{N}{\underset{j=1}{\otimes}}e^{-\beta H_j}\right\}\left\{\overset{N}{\underset{\ell=1}{\otimes}}\varphi_{k_\ell}(x_\ell)\right\}\left\{\overset{N}{\underset{\ell=1}{\otimes}}\overset{*}{\varphi}_{k_\ell}(x'_\ell)\right\}=\sum_{(k_1,\dots,k_N)}e^{-\beta\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{jk_j}}=\prod_{j=1}^{N}Sp\, e^{-\beta H_j}. \qquad (9)$$

Теперь, если мы аналогичным образом введем в $\mathcal{H}_j$ оператор J_j и потребуем, чтобы $[J_j\, H_j]=0$, будет очевидным, что

$$Sp\left\{\sum_{j=1}^{N}{}^{\oplus}J_j\right\}e^{-\beta\sum_{j=1}^{N}{}^{\oplus}H_j}=\sum_{j=1}^{N}\left\{Sp\,J_j\,e^{-\beta H_j}\prod_{j'\neq j}Sp\,e^{-\beta H_{j'}}\right\}. \qquad (10)$$

Поскольку нас интересуют главным образом спиновые модели, возьмем в качестве оператора J_j одночастичный спиновый оператор S_j j-го узла спиновой модельной системы [4]. В этом случае для оператора полного нормированного спина $S=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}{}^{\oplus}S_j$, с учетом (10) и эквивалентности узлов (см. [5]), имеем:

$$\langle S\rangle_H = \langle S_j\rangle_{H_j}\ , \qquad (11)$$

т.е. среднее значение полного оператора по полному гамильтониану равно среднему от одночастичного оператора по одночастичному гамильтониану.

В дальнейшем тензорные суммы будем обозначать так же, как и обычные.

II.

Принцип минимакса Н.Н.Боголюбова (мл.), впервые примененный в [I] для систем с положительным и отрицательным парным четырехфермионным взаимодействием и развитый далее в [2], позволяет исследовать модели, задаваемые гамильтонианом общего вида

$$H = T + U\,, \qquad (12)$$

где T является линейной формой, а U - квадратичной формой операторов, определенных в пространстве $\mathcal{H}$, если для них соблюдаются некоторые весьма общие дополнительные условия (см. [2 - 4]).

Приведем квадратичную форму

$$U=\sum_{\alpha,\beta}\sum_{(i)} a_{\alpha\beta} J_\alpha^{(i)} \overset{+}{J}{}_\beta^{(i)}, \quad i=1,2,3, \tag{I3}$$

к одному из канонических базисов преобразованием

$$J_\alpha^{(i)}=\sum_\beta C_{\alpha\beta} \Upsilon_\beta^{(i)}, \tag{I4}$$

причем операторы $\Upsilon_\alpha^{(i)}$ имеют ту же структуру, что и $J_\alpha^{(i)}$, т.е. представляют собой тензорные суммы некоторых одночастичных операторов $\tau_{\alpha j}^{(i)}$ $(j=1,2,\ldots,\mathcal{N})$.

Тогда вместо (I3) можно записать:

$$U=\sum_\alpha\sum_{(i)} \lambda_\alpha \Upsilon_\alpha^{(i)} \overset{+}{\Upsilon}{}_\alpha^{(i)}, \quad \lambda_\alpha=\sum_{\mu,\nu} C_{\mu\alpha} a_{\mu\nu} C_{\nu\alpha}, \tag{I5}$$

матрицы $A=(a_{\alpha\beta})$ и $C=(C_{\alpha\beta})$ - неособенные.

Введем теперь нормированные операторы $\tau_\alpha^{(i)}=\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\tau_{\alpha j}^{(i)}$, а все коэффициенты λ_α положим обратно пропорциональными числу частиц $\mathcal{N}$, что будет соответствовать, как мы покажем далее, случаю дальнодействия в системе (I2) - (I3):

$$\lambda_\alpha=\frac{g_\alpha}{\mathcal{N}}. \tag{I6}$$

Таким образом, гамильтониан (I2) принимает следующий вид, удобный для применения принципа минимакса [2]:

$$H=T+\mathcal{N}\sum_{1\le\alpha\le r}\sum_{(i)} g_\alpha \tau_\alpha^{(i)}\overset{+}{\tau}{}_\alpha^{(i)}-\mathcal{N}\sum_{r+1\le\alpha\le r+s}\sum_{(i)} g_\alpha \tau_\alpha^{(i)}\overset{+}{\tau}{}_\alpha^{(i)}, \tag{I7}$$

$$(g_\alpha>0,\ \alpha=1,2,\ldots,r+s).$$

Здесь S - фиксированное число (по теореме об инерции формы (I3)), равное для каждой заданной формы, с матрицей A в нашем базисе, числу перемен знака в последовательности ее главных миноров $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_0=1$, $n=r+s$ - ранг квадратичной формы. Разберем случай, когда $0<s<n$.

В качестве аппроксимирующего гамильтониана для (I7) выбираем гамильтониан

$$H_0(C^{(i)},S^{(i)})=T+\mathcal{N}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{(i)} g_\alpha\{C_\alpha^{(i)}\overset{+}{\tau}{}_\alpha^{(i)}+\overset{*}{C}{}_\alpha^{(i)}\tau_\alpha^{(i)}-C_\alpha^{(i)}\overset{*}{C}{}_\alpha^{(i)}\}-$$

$$-\mathcal{N}\sum_{\alpha=r+1}^{r+s}\sum_{(i)} g_\alpha\{S_\alpha^{(i)}\overset{+}{\tau}{}_\alpha^{(i)}+\overset{*}{S}{}_\alpha^{(i)}\tau_\alpha^{(i)}-\overset{*}{S}{}_\alpha^{(i)}S_\alpha^{(i)}\}, \tag{I8}$$

зависящий от $3n$ комплексных параметров $\{C_1^{(i)},\ldots,C_r^{(i)};S_{r+1}^{(i)},\ldots,S_{r+s}^{(i)}\}$.

Так как $H_0(C^{(i)},S^{(i)})$ является линейной формой по операторам $\tau_\alpha^{(i)}$, которые определены через первоначальные операторы $J_\alpha^{(i)}$ с помощью матрицы C^{-1} и имеют структуру тензорных сумм, совершенно очевидно, что (I8) обладает свойством аддитивности в смысле (4), а для вычисления следа $Sp\, e^{-\beta H_0(C^{(i)},S^{(i)})}$ можно использовать свойство (9).

Обозначим функцию удельной свободной энергии в термодинамическом пределе в соответствии с [2]:

$$f_\infty[H_0(C^{(i)},S^{(i)})]=\lim_{\mathcal{N}\to\infty}\{-(\beta\mathcal{N})^{-1}\ln Sp\, e^{-\beta H_0(C^{(i)},S^{(i)})}\}. \tag{I9}$$

Согласно минимаксной формулировке Н.Н.Боголюбова (мл.) сначала фиксируем параметры $S^{(i)}$ и находим $C^{(i)}=C^{(i)}(S^{(i)})$ в пространстве всех точек $\{C_1^{(i)},\ldots,C_r^{(i)}\}$ из условия абсолютного максимума функции (I9), а затем определяем те решения $S^{(i)}$, которые предоставляют функции $f_\infty[H_o(C^{(i)},S^{(i)}),S^{(i)}]$ абсолютный минимум в пространстве всех точек $\{S_{r+1}^{(i)},\ldots,S_{r+s}^{(i)}\}$.

В результате асимптотически точное решение задачи на минимакс для функции свободной энергии

$$\lim_{N\to\infty} f_N[H] = \min_{\{S^{(i)}\}} \max_{\{C^{(i)}\}} f_\infty[H_o(C^{(i)},S^{(i)})]$$

реализует система уравнений (см.[2]):

$$\frac{\partial f_\infty[H_o(C^{(i)},S^{(i)})]}{\partial C_\alpha^{(i)}}=0,\quad \frac{\partial f_\infty[H_o(C^{(i)},S^{(i)})]}{\partial \overset{*}{C}{}_\alpha^{(i)}}=0,\quad (\alpha=1,\ldots,r);$$

$$\frac{\partial f_\infty[H_o(C^{(i)},S^{(i)})]}{\partial S_\alpha^{(i)}}=0,\quad \frac{\partial f_\infty[H_o(C^{(i)},S^{(i)})]}{\partial \overset{*}{S}{}_\alpha^{(i)}}=0,\quad (\alpha=r+1,\ldots,r+s). \tag{20}$$

При этом параметры $C_\alpha^{(i)}, \overset{*}{C}{}_\alpha^{(i)}$ и $S_\alpha^{(i)}, \overset{*}{S}{}_\alpha^{(i)}$ обретают смысл термодинамических средних от соответствующих операторов $\langle \tau_\alpha^{(i)}\rangle$ и $\langle \overset{+}{\tau}{}_\alpha^{(i)}\rangle$ по аппроксимирующему гамильтониану (I8).

Легко убедиться, что в силу линейности преобразования (I4) усреднение операторов $\tau_\alpha^{(i)}$ приводит к усреднению операторов $J_\alpha^{(i)}$ и решение задачи можно записать через некоторые новые параметры:

$$\sigma_\alpha^{(i)} = \langle J_\alpha^{(i)}\rangle, \tag{2I}$$

где в правой части равенства средние берутся по аппроксимирующему гамильтониану, выраженному через операторы $J_\alpha^{(i)}$.

Это дает возможность для модельных гамильтонианов вида (I2) - (I3) сразу формулировать задачу через первоначальные операторы и получить ее асимптотически точное решение в виде уравнений самосогласования типа (2I).

Отметим, что в предположении (I6) мы имеем класс модельных систем, для которых точное решение (2I) дают уравнения молекулярного поля. Эквивалентность теории среднего поля и моделей с бесконечным радиусом взаимодействия была впервые доказана Кацем для случая "изинговского" взаимодействия в работе [9].

III.

В качестве примера мы рассмотрим гейзенберговскую модель сильно магнитного вещества с гамильтонианом следующего вида:

$$H=-\sum_f \mu_f \vec{h}\vec{S}_f - \frac{1}{2}\sum_{f,g} I(f,g)\vec{S}_f\vec{S}_g . \tag{22}$$

Аппроксимирующий и остаточный гамильтонианы

$$H_o = -\sum_f \vec{h}_f\vec{S}_f + \frac{1}{2}\sum_{f,g} I(f,g)\vec{C}_f\vec{C}_g , \tag{23}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\sum_{f,g} I(f,g)(\vec{S}_f-\vec{C}_f)(\vec{S}_g-\vec{C}_g) \tag{24}$$

выбираем таким образом, чтобы H_o был аддитивен в смысле (4) и удовлетворял изложенным выше свойствам тензорных сумм по спиновым операторам.

Здесь $$\vec{h}_f = \mu_f \vec{h} + \sum_g I(f,g)\vec{C}_g \, , \qquad (25)$$

а C - числа, как обычно, равны термодинамическим средним $\vec{C}_f = \langle \vec{S}_f \rangle$.

Исследуем для наглядности случай спиновой системы с двумя подрешетками $(f,g = 1,2)$. При этом $\vec{S}_f$ и $\vec{S}_g$ есть операторы полных спинов первой и второй подрешеток, μ_f - магнитные моменты атомов сорта f, $I(f,g)$ - обменные интегралы между узлами подрешеток, $\vec{h}$ - внешнее магнитное поле.

Плотность свободной энергии рассматриваемой системы в термодинамическом пределе совпадает с плотностью свободной энергии аппроксимирующей системы, которая дается выражением

$$f_o(\vec{h},\theta) = f[H_o] = -(\beta N_o)^{-1} \ln Sp\, e^{-\beta H_o} \, , \qquad (26)$$

где $N_o = \sum_f N_f$ - число частиц в системе.

Введем оператор полного нормированного спина для каждой подрешетки,

$$\vec{S}_f = N_f \vec{s}_f = \sum_j \vec{s}_{f_j} \, , \quad (j = 1,2,\ldots,N_f) \, ,$$

и выберем единичный вектор $\vec{\gamma}_f$, определяющий направление оси квантования, таким образом, чтобы он совпадал по направлению с вектором намагниченности соответствующей подрешетки. Будем считать, что в каждой из подрешеток спины ориентированы параллельно друг другу.

Вычислим теперь в рамках предложенной аппроксимации (26) средний магнитный момент, приходящийся на один узел:

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{\partial f_o(\vec{h},\theta)}{\partial \vec{h}} = \frac{\sum_f \mu_f N_f \sigma_f \vec{\gamma}_f}{\sum_f N_f} \, , \qquad (27)$$

при этом для парциальных намагниченностей σ_1, σ_2, исходя из свойства (II), имеем

$$\sigma_f = \langle s_f \rangle_{H_o(f)} = \langle s_{f_j} \rangle_{H_o(f,j)} \, . \qquad (28)$$

Асимптотическую близость намагниченностей, определяемых на основе модельного и аппроксимирующего гамильтонианов, нетрудно доказать методом, изложенным в работе [3].

Наконец, принимая во внимание, что

$$H_o(f,j) = -\alpha_f s_{f_j} + \frac{1}{2}\sum_{(g,j')} I(f_j, g_{j'})\sigma_f \sigma_g \, ,$$

приходим к известным уравнениям молекулярного поля для двухподрешеточного изотропного ферримагнетика [10]:

$$\sigma_f = th(\alpha_f \beta) \, , \qquad (29)$$

где параметры α_1 и α_2 соответственно равны

$$\alpha_1 = \mu_1 \vec{h}\vec{\gamma}_1 + \mathcal{J}_{11}(0)\sigma_1 + \mathcal{J}_{12}(0)\sigma_2(\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2) \, ,$$
$$\alpha_2 = \mu_2 \vec{h}\vec{\gamma}_2 + \mathcal{J}_{22}(0)\sigma_2 + \mathcal{J}_{21}(0)\sigma_1(\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2) \, .$$

Здесь $\mathcal{J}_{fg}(0)$ представляют собой суммы обменных интегралов по узлам соответствующих подрешеток:

$$\mathcal{J}_{11}(0) = \sum_j I(f_j, f_{j'}) \, , \qquad \mathcal{J}_{22}(0) = \sum_j I(g_j, g_{j'}) \, ,$$

$$\mathcal{J}_{12}(0)=\sum_{j'} I(f_j, g_{j'}), \quad \mathcal{J}_{21}(0)=\sum_{j'} I(f_{j'}, g_j). \qquad (30)$$

Следуя обозначениям [I0], все величины (30) получаем из спин-волнового разложения $\mathcal{J}_{fg}(\nu)=\sum_{j'} I(f_j,g_{j'})e^{i(f_j-g_{j'},\nu)}$ при нулевом значении волнового вектора ν, заданного в пространстве обратной решетки.

Как сказано выше, уравнения(29) в термодинамическом пределе, когда число частиц $N=N_1=N_2$ стремится к бесконечности, являются точным решением модели (22) с бесконечным радиусом взаимодействия. В самом деле, если предположить, что любая пара спинов внутри подрешетки f взаимодействует с одной и той же (см.[9]) интенсивностью $I(f_j, f_{j'}) \geqslant 0$ (то же самое внутри подрешетки g: $I(g_j, g_{j'}) \geqslant 0$ – ферромагнитное упорядочение), а каждая пара спинов, принадлежащих разным подрешеткам, взаимодействует с постоянной интенсивностью $I(f_j, g_{j'}) \leqslant 0$ (антиферромагнитное упорядочение), мы получаем модель двухподрешеточного ферримагнетика с дальнодействием типа $\frac{\mathcal{J}_{fg}(0)}{N}$, т.е. случай (I6).

Нетрудно видеть, что уравнения (29) являются уравнениями общего вида, из которых можно получить как частный случай уравнения молекулярного поля для ряда моделей.

Так, например, в случае одной решетки, при $\mathcal{J}_{11}(0)=\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_{22}(0)=\mathcal{J}_{12}(0)=\mathcal{J}_{21}(0)=0$ и $\vec{\gamma}\,\|\,\vec{h}$ получаем результат работы [II] для ферромагнетика Гейзенберга:

$$\sigma = th\,\frac{\mathcal{J}\sigma+\mu|\vec{h}|}{\theta},$$

а при $\mathcal{J}_{11}(0)=\mathcal{J}_{22}(0)=0$, $\mathcal{J}_{12}(0)=\mathcal{J}_{21}(0)=-\mathcal{J}$, $\mu_1=\mu_2=\mu$ и $\vec{h}(0,0,h)$, $\vec{\gamma}_1(0,0,1)$, $\vec{\gamma}_2(0,0,1)$ получаем результат работы [I2] для двух изинговских эквивалентных подрешеток с антиферромагнитным взаимодействием:

$$\sigma_\alpha = -th\,\frac{\mathcal{J}\sigma_\beta-\mu h}{\theta}, \quad \alpha\neq\beta, \ (\alpha,\beta=1,2).$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Н.Н.Боголюбову (мл.) за внимание к работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I Н.Н.Боголюбов (мл.). Ядерная физика, 10,2,425,1969.

2 Н.Н.Боголюбов(мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов, "Наука", М., 1974.

3 С.С.Лапушкин, В.Н.Плечко. Препринт ИТФ-73-149Р,Киев,1973.

4 С.С.Лапушкин. Сообщения ОИЯИ, Р4-7738, Дубна, 1974.

5 С.С.Лапушкин. Сообщения ОИЯИ, Р4-8508, Дубна, 1974.

6 W.Thirring. The Many Body Problems, Trans. of Mallorca Intern. School of Phys., Plenum Press, 1969.

7 Д.Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты,"Мир", М., 1971.

8 Н.Бурбаки. Элементы математики, II. Алгебра, Физматгиз,М.,1962.

9 M.Kac.Statistical Physics,Phase Transitions and Superfluidity, New York,1, 241,1968.

10 С.В.Тябликов. Методы квантовой теории магнетизма,"Наука",М., 1965.

11 И.Г.Бранков,А.С.Шумовский. Сообщения ОИЯИ, Р4-6899,Дубна,1973.

12 И.Г.Бранков,А.С.Шумовский. Сообщения ОИЯИ, Р4-7205,Дубна,1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 апреля 1975 года.