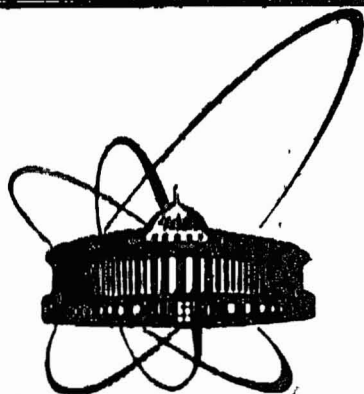


88. 893



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

10 233

P17-88-893

В.И.Юкалов

РЕНОРМГРУППА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ —  
ПОЛЕВАЯ И ИТЕРАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКИ

1988

В сообщении<sup>/1/</sup> были проанализированы основные принципы ренормгруппового подхода в статистической физике, а в работе<sup>/2/</sup> рассмотрены два наиболее распространенных варианта этого подхода, используемые при описании критических явлений.

В данном сообщении обсуждается теоретико-полевой вариант метода ренормгруппы в статистической физике. Приводятся уравнения, аналогичные ренормгрупповым уравнениям для инвариантного заряда в квантовой теории поля. Предлагается новый простой метод улучшения сходимости итерационных процедур или суммирования асимптотических рядов, основанный на введении группы автомодельных преобразований и приближенном вычислении функции Гелл - Манна - Лоу с помощью конечных разностей. Метод иллюстрируется на нескольких элементарных функциях, на суммировании  $\epsilon$ -разложения Вильсона для критических индексов модели Гинзбурга - Ландау и на теории поля  $\psi^4$ .

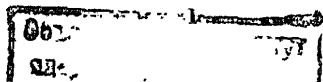
## 1. ПОЛЕВАЯ ГРУППА

Рассмотренные в работе<sup>/2/</sup> варианты ренормгруппы, как в прямом, так и в обратном пространстве, основаны на постепенном изменении пространственного масштаба и построении соответствующей последовательности эффективных моделей. В методе Вильсона меняется и масштаб импульсного пространства, и одновременно проводится скейлинг полевых переменных. При процедуре децимации осуществляется только укрупнение решетки в реальном пространстве, а полевые переменные - для модели Изинга это спиновые переменные  $s = \{\sigma_i\}$  - не меняются.

Главным в обоих случаях является то, что вводится новая переменная, характеризующая изменение пространственного масштаба. Ренормгруппа реализуется как группа некоторого автомодельного движения по этой новой переменной. Последняя может быть или непрерывной, или дискретной.

Ренормгруппа, используемая в теории поля<sup>/3/</sup>, в отличие от статистической, основывается на выявлении свойств внутренней симметрии изучаемой физической системы.

На первый взгляд может показаться, что между статистической и полевой ренормгруппами есть принципиальная разница: первая реализуется



на классе моделей, отличающихся искусственно введенной переменной; вторая формулируется на языке естественных переменных одной модели. Однако это различие в существенной степени кажущееся. С формальной точки зрения, и та, и другая ренормгруппы служат частными проявлениями общего свойства функциональной автомодельности<sup>/4-6/</sup>.

Более того, полевую ренормгруппу можно построить<sup>/7,8/</sup> и для статистических задач, что сейчас и будет продемонстрировано. А из метода построения станет ясна условность градации переменных на искусственные и естественные.

Для явного сравнения с уже разобранными примерами<sup>/2/</sup> разумно снова выбрать модель Изинга. Но только здесь мы опустим постоянное слагаемое, в дальнейшем не играющее роли, и добавим слагаемое, соответствующее наличию внешнего поля, вообще говоря, зависящего от номера узла.

Естественными переменными в модели Изинга являются спиновые поля  $\sigma_i$ . Чтобы выявить симметрию модели, связанную с варьированием этих полей, введем скейлинговый фактор посредством подстановки

$$\sigma_i \rightarrow \rho \sigma_i. \quad (I)$$

Итак, возьмем гамильтониан

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J_0 \rho^2 \sigma_i \sigma_j - \sum_i \rho \sigma_i B_i. \quad (2)$$

Переходя к безразмерным параметрам

$$g \equiv \frac{J_0}{2\theta}, \quad h_i \equiv \frac{B_i}{\theta},$$

имеем безразмерный гамильтониан

$$H\{s\} = -\rho^2 g \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \rho \sum_i \sigma_i h_i. \quad (3)$$

Статистическую сумму

$$Z(\rho, g, h) = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\rho^2 g \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \rho \sum_i \sigma_i h_i) \quad (4)$$

рассматриваем как функцию аргументов  $\rho, g, h = \{h_i\}$ .

Найдем такую группу мультипликативной перенормировки, которая при преобразовании аргументов

$$\rho \rightarrow z_1 \rho, \quad g \rightarrow z_2 g, \quad h \rightarrow z_3 h$$

оставляет инвариантной статистическую сумму:

$$Z(z_1 \rho, z_2 g, z_3 h) = Z(\rho, g, h). \quad (5)$$

Из вида (4) следует, что при условии (5) выполняются равенства

$$z_1^2 z_2 = 1, \quad z_1 z_3 = 1,$$

означающие, что только один из перенормировочных параметров  $z_1, z_2, z_3$  независим. Фиксируя, например,  $z_1 = l$ , имеем

$$z_1 = l^{-1/2}, \quad z_2 = l, \quad z_3 = l^{1/2}.$$

Условие инвариантности (5) принимает вид

$$Z(l^{-1/2} \rho, l g, l^{1/2} h) = Z(\rho, g, h). \quad (6)$$

Наша цель заключается в том, чтобы использовать это свойство для получения информации о корреляционных функциях, для которых статистическая сумма служит порождающим функционалом. Например, парная корреляционная функция задается второй производной

$$K_{ij}(\rho, g) = \left. \frac{\partial^2 \ln Z(\rho, g, h)}{\partial h_i \partial h_j} \right|_{h=0}. \quad (7)$$

Довольно просто усмотреть, что для нее справедливо соотношение

$$K_{ij}(l^{-1/2} \rho, l g) = l^{-1} K_{ij}(\rho, g).$$

Для фурье-образа этой функции

$$K(\vec{k}, \rho, g) = \frac{1}{N} \sum_{ij} K_{ij}(\rho, g) \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r}_{ij}),$$

в котором  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ ,  $\vec{r}_i$  - координата  $i$ -го узла, справедливо такое же равенство:

$$K(\vec{k}, l^{-1/2} \rho, l g) = l^{-1} K(\vec{k}, \rho, g). \quad (8)$$

Учитывая изотропность пространства, введем функцию

$$D(k^2, \rho, g) = g K(\vec{k}, \rho, g), \quad (9)$$

для которой из условия (8) следует

$$D(k^2, l^{-1/2} \rho, l g) = D(k^2, \rho, g). \quad (10)$$

Равенство (10) означает, что функция (9) зависит фактически только от двух аргументов:

$$D(k^2, \rho, g) = D(k^2, \rho^2 g). \quad (11)$$

В дальнейшем будет удобнее работать с безразмерными функциями безразмерных переменных. Во всякой задаче, в том числе и в рассматриваемой, всегда естественно возникают такие комбинации параметров гамильтониана, которые можно использовать для обезразмеривания переменных. Обозначим через  $\mathcal{E}$  одну из возможных характерных величин, имеющую размерность импульса. Однако для того, чтобы потом было удобно менять масштаб импульсной шкалы, проведем обезразмеривание  $k$  не с помощью  $\mathcal{E}$ , а используя некоторый произвольно фиксированный им-

пульс  $\lambda$ . Заддим безразмерную функцию

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, g, \frac{x^2}{\lambda^2}\right) = D(k^2, g) / D(\lambda^2, g), \quad (12)$$

для которой, очевидно, выполняется условие нормировки

$$d\left(1, g, \frac{x^2}{\lambda^2}\right) = 1. \quad (13)$$

Сказанное выше наглядно иллюстрируется в случае приближения Орнштейна - Цернике. Это приближение для модели Изинга дает корреляционную функцию

$$K(\vec{k}, p, g) = \frac{(g z_0 a^2)^{-1}}{k^2 + \xi^{-2}}, \quad (14)$$

где  $z_0$  - число ближайших соседей,  $a$  - параметр кубической решетки,  $\xi$  - корреляционная длина,

$$\xi^2 = \frac{a^2 g z_0}{1 - 2g z_0}.$$

Функция (9) с учетом (II) имеет вид

$$D(k^2, g) = \frac{(z_0 a^2)^{-1}}{k^2 + \xi^{-2}}. \quad (15)$$

В качестве характерной импульсной переменной здесь выступает обратная корреляционная длина

$$x = \xi^{-1}. \quad (16)$$

Безразмерная функция (12) равна

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, g, \frac{x^2}{\lambda^2}\right) = \frac{\lambda^2 + x^2}{k^2 + x^2} = \frac{1 + x^2/\lambda^2}{k^2/\lambda^2 + x^2/\lambda^2}. \quad (17)$$

Для выяснения свойств симметрии функции (12) необходимо иметь ее явное выражение. Такое выражение можно представить в форме ряда, например, по степеням константы связи  $g$ , получающегося при соответствующем разложении статистической суммы (4). Подобные ряды имеют весьма громоздкий вид<sup>[9]</sup>, поэтому мы не станем их здесь выписывать, а сразу сформулируем результат их анализа. Оказывается, функция (12) инвариантна относительно преобразования

$$\lambda \rightarrow \mu, \quad g \rightarrow \ell g, \quad d(\dots) \rightarrow \ell d(\dots), \quad (18)$$

то есть выполняется соотношение

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, g, \frac{x^2}{\lambda^2}\right) = \ell d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \ell g, \frac{x^2}{\mu^2}\right), \quad (19)$$

в котором согласно условию нормировки (13)

$$\ell = d\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}, g, \frac{x^2}{\lambda^2}\right). \quad (20)$$

Доказательство соотношения (19) осуществляется следующим образом. Проводится частичное суммирование ряда, представляющего функцию (12), что дает приближенное выражение этой функции. Для выбранного приближения проверяется свойство (19). Далее методом индукции доказывается, что поправки любого порядка к выбранному приближению обладают свойством инвариантности относительно преобразования (18). Отсюда следует, что и для всей функции (12) справедливо равенство (19).

Например, если просуммировать все лестничные диаграммы ряда, задающего (12), то получится приближение Орнштейна - Цернике (17). Для последнего соотношение (19) принимает вид

$$\frac{\lambda^2 + x^2}{k^2 + x^2} = \ell \frac{\mu^2 + x^2}{k^2 + x^2},$$

из которого сразу же вытекает (20):

$$\ell = \frac{\lambda^2 + x^2}{\mu^2 + x^2} = d\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}, g, \frac{x^2}{\lambda^2}\right).$$

Соотношения (19), (20) показывают, как связана ренормировка корреляционной функции с изменением величины нормировочного импульса.

Вводя безразмерные переменные

$$x \equiv \frac{k^2}{\lambda^2}, \quad t \equiv \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad s \equiv \frac{x^2}{\lambda^2}, \quad (21)$$

из (19) и (20) получаем функциональное уравнение ренормализационной группы

$$d(x, g, s) = d(t, g, s) d\left(\frac{x}{t}, d(t, g, s) g, \frac{s}{t}\right) \quad (22)$$

с граничным условием

$$d(1, g, s) = 1. \quad (23)$$

Вблизи критической точки асимптотическое значение функции (12) перестает зависеть от своего третьего аргумента,

$$d(x, g, s) \simeq d(x, g) \equiv d(x, g, 0). \quad (24)$$

При этом уравнение ренормгруппы (22) несколько упрощается:

$$d(x, g) = d(t, g) d\left(\frac{x}{t}, d(t, g) g\right), \quad d(1, g) = 1. \quad (25)$$

Исчезновение третьего аргумента в (24) легко понять, если вспомнить, что как раз для критического поведения и характерно отсутствие зависимости от несущественных переменных. Это происходит из-за того, что корреляционная длина в критической точке расходится. Если апеллировать к обозначениям (16) и (21), то очевидно, что

$$x \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty),$$

откуда следует (24).

Отметим, что изменение масштаба импульсной переменной сопровождается соответствующей ренормировкой параметра  $\alpha$ , а так как

$$\alpha^{-1} \sim \xi \sim a,$$

то это можно интерпретировать как изменение решеточной постоянной  $a$ .

## 2. ИНВАРИАНТНЫЙ ЗАРЯД

Уравнения вида (22) часто встречаются в квантовой теории поля<sup>/3/</sup>. Для еще большего сходства с теорией поля покажем, как в данном случае можно ввести понятие инвариантного заряда.

Введем функцию, играющую роль инвариантного заряда:

$$\bar{g}(x, g, s) = g d(x, g, s). \quad (26)$$

Проведем в (22) замену

$$x \rightarrow tx, \quad s \rightarrow ts,$$

для функции (26) получаем уравнение

$$\bar{g}(tx, g, ts) g = \bar{g}(t, g, ts) \bar{g}(x, \bar{g}(t, g, ts), s) \quad (27)$$

с граничным условием

$$\bar{g}(1, g, s) = g.$$

Дифференцируя (27) по  $x$  и делая подстановку

$$x \rightarrow 1, \quad t \rightarrow x,$$

находим дифференциальное уравнение ренормгруппы

$$\frac{\partial}{\partial \ln x} \bar{g}(x, g, xs) = B(\bar{g}(x, g, xs), g), \quad (28)$$

в котором

$$B(\bar{g}(x, g, xs), g) \equiv \frac{\bar{g}(x, g, xs)}{g} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \bar{g}(y, \bar{g}(x, g, xs), s) \right]_{y=1}$$

- функция Гелл - Манна - Лоу.

Вблизи критической точки, когда пропадает зависимость заряда (26) от третьего параметра, уравнение ренормгруппы (27) упрощается:

$$\bar{g}(tx, g) g = \bar{g}(t, g) \bar{g}(x, \bar{g}(t, g)), \quad (29)$$

где

$$\bar{g}(x, g) \equiv \bar{g}(x, g, c), \quad \bar{g}(1, g) = g.$$

При этом дифференциальное уравнение (28) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{g}(x, g)}{\partial \ln x} = B(\bar{g}(x, g), g), \quad (30)$$

а функция Гелл - Манна - Лоу равна

$$B(\bar{g}(x, g), g) \equiv \frac{\bar{g}(x, g)}{g} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \bar{g}(y, \bar{g}(x, g)) \right]_{y=1}$$

Интегрируя (28), имеем

$$\int_{\bar{g}(1, g)}^{\bar{g}(x, g)} \frac{d\bar{z}}{B(\bar{z}, g)} = \ln x.$$

То же самое получается и при интегрировании (29).

Неподвижная точка для инвариантного заряда (26) определяется равенством

$$\bar{g}(x, g^*, xs) = g^*,$$

или, вблизи критической точки, -

$$\bar{g}(x, g^*) = g^*.$$

Тогда, как следует из (28) или (30),

$$B(g^*, g^*) = 0.$$

Решение уравнения (30), отвечающее нетривиальной неподвижной точке, задает критическую температуру. Критические индексы, описывающие поведение различных термодинамических величин вблизи критической точки, выражаются через аномальные размерности пропагатора (29). Эта процедура полностью эквивалентна нахождению аномальных размерностей функций Грина для модели  $\psi^4$  в инфракрасно-стабильной точке<sup>/10/</sup>.

Пользуясь аналогией между теорией поля  $\psi^4$  и ангармоническим осциллятором четвертого порядка, для вычисления функции Гелл - Манна - Лоу можно также применять те же методы<sup>/11-13/</sup>, что и для вычисления энергии основного состояния ангармонического осциллятора. Для уточнения значений критических индексов, представляемых в форме рядов, используются<sup>/14-16/</sup> такие методы суммирования, как Паде и Паде - Бореля в комбинации с конформным отображением, интересен развитый недавно<sup>/17/</sup> для этих целей алгоритм Ромберга.

Полезно подчеркнуть еще раз, что полевая ренормгруппа является истинной группой Ли, имеющей обратное преобразование. В этом состоит ее основное отличие от вариантов ренормгруппы, фигурирующих в методе Вильсона и при процедуре децимации.

Точность вычисления критических индексов с помощью каждого из рассмотренных трех ренормгрупповых подходов практически одинакова. Поэтому выбор того или иного подхода определяется соображениями удобства или вкуса. Например, для решеток с идеальной периодичностью мож-

но использовать как ренормгруппу в реальном пространстве, так и, вводя коллективные переменные<sup>/18/</sup>, ренормгруппу в импульсном пространстве. Для систем с дефектами или спиновых стекол<sup>/19-21/</sup> удобнее процедура децимации, для описания динамических критических явлений<sup>/22/</sup> проще метод Вильсона.

Если сравнивать значения критических индексов, получаемые в ренормгрупповом подходе, с соответствующими значениями, полученными с помощью различных методов суммирования высокотемпературных и низкотемпературных рядов<sup>/23-25/</sup>, то оказывается, что эти значения близки друг другу, при условии, что в ренормгрупповом подходе также использовались методы суммирования асимптотических рядов<sup>/26,27/</sup>.

Довольно часто сравнивают значения критических индексов, вычисленные не только различными методами, но и для разных моделей. Оправданием для этого служит предположение об универсальности критических явлений по отношению к моделям из одного класса универсальности (см.<sup>/1/</sup>). Однако весьма вероятно, что универсальность представляет собой лишь приближенное понятие, то есть критические индексы для двух разных моделей, хотя и из одного класса универсальности, возможно, не обязаны совпадать тождественно, но могут быть равны приближенно. Поэтому к сравнению критических индексов различающихся моделей, вообще говоря, следует относиться с осторожностью. Основанием для подобной осторожности является существование точно решаемых моделей, для которых гипотеза универсальности не выполняется, так как для них критические индексы зависят не только от вида, но и от интенсивности взаимодействия. К таким неуниверсальным моделям относятся модели Бэкстера<sup>/28/</sup>, Джойса<sup>/29/</sup>, Урумова<sup>/30/</sup>, а также модель Изинговского типа с непрерывным спином и четверным взаимодействием<sup>/31/</sup>.

### 3. ГРУППА ИТЕРАЦИЙ

Методы суммирования, применяемые при вычислении критических индексов, довольно громоздки, требуют знания достаточно большого числа членов ряда, а иногда, как, например, в методе суммирования Бореля, оказывается необходимым найти асимптотику коэффициентов степенного ряда для высоких порядков разложения. А как быть, если известны только несколько первых слагаемых ряда? Этот вопрос можно поставить в более общей форме, рассматривая теорию возмущений как частный случай некоторой итерационной процедуры. Как по нескольким первым итерациям можно построить искомую функцию? Ниже предлагается очень простой способ восстановления функции всего лишь по двум ее приближениям. Если эти при-

ближения относятся к малым значениям аргумента  $x \ll 1$ , то восстановленная функция имеет смысл до  $x \sim 1$ .

Допустим, нас интересует функция  $g(x)$ , подчиняющаяся некоторому уравнению. В физических приложениях уравнение на искомую функцию можно, как правило, записывать в разных формах. Кроме того, при фиксированной форме уравнения его решение можно находить различными способами, строя разные последовательности приближений. Это могут быть различные варианты итерационной процедуры, в частности, какая-либо теория возмущений. В свою очередь, ряды теории возмущений можно, как известно, пересуммировать с помощью разнообразных методов. Таким образом, в принципе можно построить бесконечное число последовательностей, пределом которых должна быть искомая функция. Если удастся определить последовательность, обладающую некоторым групповым свойством, то, естественно, поиск искомой функции облегчается, как, например, при одной из итерационных процедур<sup>/32/</sup> уравнения Чу - Лоу. Когда точно известен общий аналитический закон преобразования одних членов последовательности в другие, тогда оказывается возможным найти и точное выражение для предела последовательности. Именно такая ситуация и реализуется<sup>/2/</sup> при применении процедуры децимации к одномерной модели Изинга. Разумеется, возможность определения аналитического (неоператорного) закона преобразования для последовательных приближений является счастливой случайностью. Обычно же этот закон не известен.

Вместо того, чтобы пытаться установить аналитическую закономерность, связывающую последовательные приближения некоторой конкретной итерационной процедуры, поступим наоборот: предположим, что существует сходящаяся к искомой функции последовательность, члены которой подчиняются заданному закону преобразования. Реалистичность такого предположения основана на том, что, как обсуждалось выше, можно построить бесконечное число различных последовательностей, сходящихся к одной и той же функции.

Уточним сказанное. Пусть искомая функция  $g(x)$  подчиняется функциональному уравнению, которое представимо в операторной форме

$$g(x) = \hat{F} g(x). \quad (31)$$

Природа оператора  $\hat{F}$  здесь не важна, он может содержать дифференциальные, интегральные и любые другие операции. Можно построить итерационную последовательность, начиная с некоторой нулевой итерации  $g_0(x)$ , по закону

$$g_{n+1}(x) = \hat{F} g_n(x) = \hat{F}^n g_0(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \hat{F}^0 = 1). \quad (32)$$

Допустим, построенная итерационная последовательность  $\{g_n(x)\}$  сходится равномерно на множестве  $A$  к функции  $g(x)$ . То есть для всякого числа  $\varepsilon$  найдется такой номер  $n_\varepsilon = n_\varepsilon(\varepsilon)$ , что

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon, x \in A). \quad (33)$$

Значение  $n_\varepsilon$ , начиная с которого  $g_n(x)$  с заданной степенью точности равняется  $g(x)$ , назовем точкой насыщения итерационной процедуры. Вообще говоря, можно построить не одну, а целый класс итерационных последовательностей. Для этого достаточно провести какое-либо тождественное преобразование уравнения (31), так, чтобы на месте оператора  $\hat{F}$  стоял новый оператор  $\hat{F}'$ , а потом задать новую последовательность с помощью закона

$$g'_{n+1}(x) = \hat{F}' g'_n(x) = (\hat{F}')^n g'_0(x). \quad (34)$$

Преобразование уравнения (31) можно проделать, например, следующим образом: подействовать на (31) некоторым оператором  $\hat{R}$  и добавить слева и справа функцию  $g(x)$ , что дает

$$\hat{R}g(x) + g(x) = \hat{R}\hat{F}g(x) + g(x).$$

Последнее равенство переписывается в форме

$$g(x) = \hat{F}'g(x), \quad \hat{F}' \equiv \hat{R}\hat{F} + 1 - \hat{R}, \quad (35)$$

а затем задается последовательность  $\{g'_n(x)\}$  по закону (34). Для уравнения (31) можно придумать и другие преобразования. Разумеется, каждая последовательность  $\{g'_n(x)\}$  сходится на своем множестве  $A'$  и со своей точкой насыщения  $n'_\varepsilon$ . Таким образом, уравнение (31) надо рассматривать как сокращенную запись класса уравнений, порождаемых классом операторов  $\{\hat{F}\}$ , задающих по закону (32) класс последовательностей, сходящихся к одной и той же функции  $g(x)$ . Какой же из представителей данного класса последовательностей является оптимальным, то есть наиболее удобным для отыскания предельной функции  $g(x)$ ? Оптимальной, по-видимому, будет та последовательность, которая приводит к наиболее простой форме рекуррентных соотношений (32). Заметим, что для всякой последовательности из класса, генерируемого операторным классом  $\{\hat{F}\}$ , вблизи соответствующей точки насыщения преобразование (32) приближенно сохраняет форму  $n$ -й итерации. Изменение функции  $g_n(x)$  при изменении параметра  $n$  можно назвать движением по этому параметру. Движение с сохранением формы называется автомодельным. Следовательно, движение функции  $g_n(x)$  по  $n$  вблизи точки насыщения приближенно автомодельно. Этим свойством асимптотической автомодельности при  $n \rightarrow n_\varepsilon$  обладают все последовательности рассматриваемого класса.

**Гипотеза.** В классе последовательностей, генерируемых по закону (32) операторным классом  $\{\hat{F}\}$ , имеется одна, обладающая свойством автомодельности для всех  $n$ , а не только вблизи точки насыщения.

Данное предположение является центральным в предлагаемом методе восстановления функции по ее приближениям. Приведенные выше рассуждения позволяют пояснить происхождение высказанной гипотезы.

Для математической формулировки свойства функциональной автомодельности введем ряд обозначений. Определим дискретную переменную

$$t_n \equiv e^n \quad (t_0 \equiv 1, t_s \equiv e^{n_s}) \quad (36)$$

и функцию от этой переменной

$$g(t_n, x) \equiv g_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots, n_s). \quad (37)$$

Очевидно, что выполняются равенства

$$g(t_0, x) = g(1, x) = g_0(x), \quad (38)$$

$$g(t_s, x) = g_{n_s}(x) \equiv g(x). \quad (39)$$

Зададим функцию  $x(g)$  уравнением

$$g_c(x) = g \rightarrow x(g). \quad (40)$$

Для  $x(g)$  справедливы соотношения

$$g_c(x(g)) = g, \quad x(g_c(x)) = x. \quad (41)$$

Введем непрерывную переменную  $t \in [1, t_s]$ , проходящую через все точки (36), и функцию этой переменной

$$\bar{g}(t, g) \equiv g(t, x(g)). \quad (42)$$

Из равенств (38)–(41) следует

$$\bar{g}(1, g) = g(1, x(g)) = g_0(x(g)) = g, \quad (43)$$

$$\bar{g}(t_s, g) = g(t_s, x(g)) = g(x(g)) = g(x). \quad (44)$$

Свойство функциональной автомодельности<sup>/5/</sup> записывается в форме

$$\bar{g}(lt, g) = \bar{g}(t, \bar{g}(l, g)). \quad (45)$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial \ln t} = \beta(\bar{g}(t, g)), \quad (46)$$

в котором

$$\beta(g) \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, g) \right]_{t=1} \quad (47)$$

- функция Гелл - Манна - Лоу. Интегрирование уравнения (46) дает

$$\int_{g_c(x)}^{g(x)} \frac{dg}{\beta(g)} = \ln t_s = n_s. \quad (48)$$

Для явного вычисления интеграла (48) необходимо найти приближенное выражение функции  $\beta(g)$ . Допустим, известны два последовательных приближения для искомой функции:  $g_0(x)$  и  $g_1(x)$ . Тогда функцию Гелл - Манна - Лоу можно задать в виде конечной разности

$$\beta(g) = \bar{g}(t, g) - \bar{g}(1, g) = g_1(x(g)) - g. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (48) и проводя интегрирование, получаем восстановленную функцию  $g(x)$ . Значение параметра насыщения  $n_s$  находится из сравнения асимптотического поведения восстановленной функции с некоторой известной асимптотикой. Например, если  $g_1(x)$  отвечает  $x \ll 1$ , то точка насыщения  $n_s$  определяется из сравнения разложения по  $x \ll 1$  для восстановленной функции  $g(x)$  с приближением  $g_1(x)$ .

Предложенный метод позволяет построить функцию  $g(x)$  всего по двум ее приближениям  $g_0(x)$  и  $g_1(x)$ . Для анализа этого метода ниже будут рассмотрены примеры, когда искомая функция известна точно. Данное точное значение будем обозначать  $g_{ex}(x)$ . Функцию, восстановленную по формулам (48), (49), обозначим  $g_{ap}(x)$ . Для оценки точности метода исследуем относительное отклонение

$$J'g(x) \equiv \left| \frac{g_{ap}(x) - g_{ex}(x)}{g_{ex}(x)} \right|. \quad (50)$$

#### 4. ПРОСТЕЙШИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора по малому аргументу для простых аналитических функций.

Пример I.  $g_{ex}(x) = \frac{1}{1-x}$

Для определения функции  $x(g)$  согласно (40) необходимо, чтобы нижнее разложение обязательно содержало аргумент  $x$ . В данном случае

$$g_0(x) = 1+x, \quad g_1(x) = 1+x+x^2.$$

При этом (40) дает

$$x(g) = g-1.$$

Для функции Гелл - Манна - Лоу (49) имеем

$$\beta(g) = (1-g)^2.$$

Приближенное выражение для искомой функции получаем из (48), откуда

$$g_{ap}(x) = 1 + \frac{x}{1-x n_s}.$$

Разложение этой функции в ряд по  $x$  приводит к асимптотическому выражению

$$g_{ap}(x) \approx 1+x+n_s x^2 \quad (x \ll 1),$$

сравнивая которое с  $g_1(x)$ , находим точку насыщения  $n_s = 1$ . Подставляя  $n_s = 1$  в  $g_{ap}(x)$ , убеждаемся, что восстановленная функция тождественно равна искомой:

$$g_{ap}(x) = \frac{1}{1-x} = g_{ex}(x).$$

Отклонение (50) равно нулю при всех значениях  $x$ .

Пример 2.  $g_{ex}(x) = \sin x$

Из разложений

$$g_0(x) = x, \quad g_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

по формулам (40) и (49) получаем

$$x(g) = g, \quad \beta(g) = -\frac{g^3}{6}.$$

Интегрирование (48) дает

$$g_{ap}(x) = \frac{\sqrt{3} x}{\sqrt{3+x^2 n_s}}.$$

Если при определении зависимости  $x(g)$  согласно (40) получается несколько корней, то выбирается тот, который соответствует правильному асимптотическому поведению при  $x \ll 1$ . Здесь

$$g_{ap}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} n_s \quad (x \ll 1).$$

Отсюда  $n_s = 1$ , чтобы  $g_{ap}(x)$  совпадало с  $g_1(x)$ . Следовательно,

$$g_{ap}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2/3}}.$$

Сравнивая значения точной и приближенной функций в точке  $x = 1$ ,



$$g_{ex}(I) = 0,84I, \quad g_{ap}(I) = 0,866,$$

в качестве погрешности метода имеем  $\delta y(I) = 0,029$ . При  $x \gg I$  точность метода существенно ухудшается.

Пример 3.  $g_{ex}(x) = \cos x$

Два низших разложения

$$g_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad g_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

дают

$$x(g) = \sqrt{2(1-g)}, \quad \beta(g) = \frac{(1-g)^2}{6}$$

Из уравнения (48) находим

$$g_{ap}(x) = 1 - \frac{6x}{12 + x^2 n_3}$$

Сравнивая асимптотическое выражение

$$g_{ap}(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} n_3 \quad (x \ll 1)$$

с  $g_1(x)$ , получаем точку насыщения  $n_3 = I$ . Поэтому

$$g_{ap}(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}$$

При  $x = I$

$$g_{ex}(I) = 0,540,$$

$$g_{ap}(I) = 0,538,$$

и для относительного отклонения имеем

$$\delta g(I) = 0,003.$$

Пример 4.  $g_{ex}(x) = \lg x$

По первым двум приближениям

$$g_0(x) = x, \quad g_1(x) = x + \frac{x^3}{3}$$

находим

$$x(g) = g, \quad \beta(g) = \frac{g^3}{3}$$

Уравнение (48) дает

$$g_{ap}(x) = \frac{\sqrt{3} x}{\sqrt{3 - 2x^2 n_3}}$$

Асимптотическое разложение

$$g_{ap}(x) \approx x + \frac{x^3}{3} n_3 \quad (x \ll 1)$$

согласуется с  $g_1(x)$  при  $n_3 = I$ . Тогда

$$g_{ap}(x) \approx \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2/3}}$$

Значения функций в точке  $x = I$

$$g_{ex}(I) = I,557, \quad g_{ap}(I) = I,732$$

определяют отклонение  $\delta g(I) = 0,112$ .

Пример 5.  $g_{ex} = \operatorname{ctg} x$

Из приближений

$$g_0(x) = \frac{1}{x}, \quad g_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$$

получаем

$$x(g) = \frac{1}{g}, \quad \beta(g) = -\frac{1}{3g}$$

Отсюда

$$g_{ap}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{2}{3} x^2 n_3}$$

Разлагая последнее выражение по  $x$ ,

$$g_{ap}(x) \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} n_3 \quad (x \ll 1),$$

и сравнивая с  $g_1(x)$ , снова имеем  $n_3 = I$ . Следовательно,

$$g_{ap}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{2}{3} x^2}$$

Величины

$$g_{ex}(I) = 0,642,$$

$$g_{ap}(I) = 0,577$$

дают для отклонения (50)  $\delta y(I) = 0,101$ .

Пример 6.  $g_{ex}(x) = e^x$

Действуя аналогично предыдущему, по приближениям

$$g_0(x) = 1+x, \quad g_1(x) = 1+x + \frac{x^2}{2}$$

находим

$$x(g) = g-1, \quad \beta(g) = \frac{(g-1)^2}{2}$$

Согласно (48)

$$g_{ap}(x) = 1 + \frac{2x}{2 - x n_3}$$

Асимптотика

$$g_{ap}(x) \approx 1+x + \frac{x^2}{2} n_3 \quad (x \ll 1)$$

совпадает с  $g_1(x)$  при  $n_3 = I$ . Значит,

$$g_{ap}(x) = \frac{2+x}{2-x}$$

Для относительного отклонения (50) при  $x = I$ , где

$$g_{ex}(I) = e, \quad g_{ap}(I) = 3,$$

имеем  $\partial g(I) = 0,104$ . При увеличении  $x \gg I$  точность метода резко ухудшается.

Пример 7.  $g_{ex}(x) = \ln(1+x)$

Используя в качестве первых двух приближений

$$g_0(x) = x, \quad g_1(x) = x - \frac{x^2}{2},$$

по формулам (40) и (49) находим

$$x(g) = g, \quad \beta(g) = -\frac{g^2}{2}.$$

Уравнение (48) приводит к функции

$$g_{ap}(x) = \frac{2x}{2+xn_3}.$$

Сравнение ее асимптотики

$$g_{ap}(x) \approx x - \frac{x^2}{2} n_3 \quad (x \ll 1)$$

с  $g_1(x)$  показывает, что опять  $n_3 = 1$ , то есть

$$g_{ap}(x) = \frac{2x}{2+x}.$$

По значениям

$$g_{ex}(I) = 0,693, \quad g_{ap}(I) = 0,667$$

определяем отклонение  $\partial g(I) = 0,038$ .

Приведенные простые примеры показывают, что предложенный метод позволяет по двум приближениям  $g_0(x)$  и  $g_1(x)$ , соответствующим  $x \ll I$ , восстановить функцию  $g(x)$  при  $x \sim I$  с точностью порядка или менее 10%. Эту точность следует признать не такой уж плохой, если помнить, что было использовано только два простейших приближения.

## 5. ПЕТЛЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

В качестве еще одного примера рассмотрим вычисление функции Гелл - Манна - Лоу для модели  $\varphi^4$  теории поля с плотностью гамильтониана взаимодействия

$$H_{int}(\varphi) = \frac{16\pi^2}{4!} g \varphi^4, \quad \varphi \equiv \varphi(\vec{r}, t)$$

в четырехмерном пространстве-времени. Функцию Гелл - Манна - Лоу для этой модели вычисляют с помощью теории возмущений по константе связи, что приводит к разложению в ряд, слагаемые которого описываются петлевыми диаграммами Фейнмана. В случае  $n$ -компонентного скалярного поля  $\varphi = \{\varphi_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в плотности гамильтониана стоит  $\varphi^4 = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^2\right)^2$ , а для функции Гелл - Манна - Лоу можно найти <sup>/33/</sup> в двухпетлевом приближении

$$\beta(g) \approx \frac{8+n}{6} g^2 - \frac{14+3n}{6} g^3 \quad (g \ll 1).$$

Далее ограничимся однокомпонентным полем ( $n = 1$ ), для которого в однопетлевом и двухпетлевом приближении, соответственно, имеем

$$\beta_0(g) = \frac{3}{2} g^2, \quad \beta_1(g) = \frac{3}{2} g^2 - \frac{17}{6} g^3.$$

Функцию (47), чтобы не спутать с рассматриваемой функцией  $\beta(g)$ , обозначим  $B(\beta)$ . Определение (49) дает

$$B(\beta) = -\frac{17}{6} \left(\frac{2}{3} \beta\right)^{3/2}.$$

Из уравнения (48) следует

$$\beta(g) = \frac{486 g^2}{(18+17g n_3)^2}.$$

Разлагая по  $g$  и сравнивая с  $\beta_1(g)$ , как и прежде, имеем  $n_3 = 1$ , откуда

$$\beta(g) = \frac{486 g^2}{(18+17g)^2}.$$

О точности метода в данном случае говорить затруднительно, так как не известно точное значение  $\beta(g)$ .

## 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ВИЛЬСОНА

Так называемое  $\varepsilon$ -разложение Вильсона <sup>/26/</sup> используется для описания критических явлений в пространстве с размерностью  $4 - \varepsilon$ , причем в процессе вычислений считается, что  $\varepsilon \ll 1$ , а в конце получается  $\varepsilon = 1$  (см. обсуждение <sup>/2/</sup>). Но как раз для суммирования таких разложений и предназначен предложенный выше метод автоматического приближения. Применим этот метод для определения критических индексов <sup>/1/</sup> систем из класса универсальности модели Изинга (теории поля  $\varphi^4$ ). В случае модели Гинзбурга - Ландау с  $n$ -компонентным полем  $\varepsilon$ -разложение для критических индексов имеет вид <sup>/26/</sup>

$$\alpha = \frac{4-n}{2(8+n)} \varepsilon - \frac{(2+n)^2(28+n)}{4(8+n)^3} \varepsilon^2,$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(8+n)} \varepsilon + \frac{(2+n)(1+2n)}{2(8+n)^3} \varepsilon^2,$$

$$\gamma = 1 + \frac{2+n}{2(8+n)} \varepsilon + \frac{(2+n)(52+22n+n^2)}{4(8+n)^3} \varepsilon^2,$$

$$\delta = 3 + \varepsilon + \frac{60+14n+n^2}{2(8+n)^2} \varepsilon^2,$$

$$\eta = \frac{2+n}{2(8+n)^2} \varepsilon^2 + \frac{(2+n)(272+56n-n^2)}{8(8+n)^4} \varepsilon^3,$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{2+n}{4(8+n)} \varepsilon + \frac{(2+n)(60+23n+n^2)}{8(8+n)^3} \varepsilon^2.$$

Для применения рассматриваемого метода автомодельного приближения необходимо иметь два нетривиальных приближенных значения каждой из искомых функций. Поэтому для всех индексов, кроме  $\eta$ , взят второй порядок  $\varepsilon$ -разложения, а для  $\eta$ -третий, поскольку в первом порядке  $\varepsilon$ -разложения  $\eta = 0$ . Модели Изинга соответствует однокомпонентное поле ( $n = 1$ ), то есть следующие разложения для критических индексов:

$$\alpha = \frac{1}{6} \varepsilon - \frac{29}{324} \varepsilon^2,$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \varepsilon + \frac{1}{162} \varepsilon^2,$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{6} \varepsilon + \frac{25}{324} \varepsilon^2,$$

$$\delta = 3 + \varepsilon + \frac{25}{54} \varepsilon^2,$$

$$\eta = \frac{1}{54} \varepsilon^2 + \frac{109}{5832} \varepsilon^3,$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \varepsilon + \frac{7}{162} \varepsilon^2.$$

Полагая здесь  $\varepsilon = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,077; & \beta &= 0,340; & \gamma &= 1,244; \\ \delta &= 4,463; & \eta &= 0,037; & \nu &= 0,627. \end{aligned}$$

Функцию Гелл - Манна - Лоу (49) будем обозначать далее  $B(\cdot)$ , чтобы

не путать ее с критическим индексом  $\beta$ . Из приведенных выше  $\varepsilon$ -разложений находим функции (49) для каждого из индексов:

$$B(\alpha) = -\frac{29}{9} \alpha^2, \quad B(\beta) = \frac{(1-2\beta)^2}{18}, \quad B(\gamma) = \frac{25}{9} (\gamma-1)^2,$$

$$B(\delta) = \frac{25}{54} (\delta-3)^2, \quad B(\eta) = \frac{109}{6\sqrt{6}} \eta^{3/2}, \quad B(\nu) = \frac{14}{9} (2\nu-1)^2.$$

Уравнение (48) дает

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{9\varepsilon}{54+29\varepsilon n_3}, \quad \beta(\varepsilon) = \frac{1}{2} - \frac{9\varepsilon}{2(27+\varepsilon n_3)},$$

$$\gamma(\varepsilon) = 1 + \frac{9\varepsilon}{54-25\varepsilon n_3}, \quad \delta(\varepsilon) = 3 + \frac{54\varepsilon}{54-25\varepsilon n_3},$$

$$\eta(\varepsilon) = \frac{864\varepsilon^2}{(216-109\varepsilon n_3)^2}, \quad \nu(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{9\varepsilon}{4(27-14\varepsilon n_3)}.$$

Рассматривая асимптотики этих выражений по  $\varepsilon \ll 1$  и сравнивая их с соответствующими  $\varepsilon$ -разложениями, убеждаемся, что во всех случаях  $n_3 = 1$ . Следовательно,

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{9\varepsilon}{54+29\varepsilon}, \quad \beta(\varepsilon) = \frac{27-8\varepsilon}{2(27+\varepsilon)}, \quad \gamma(\varepsilon) = \frac{2(27-8\varepsilon)}{54-25\varepsilon},$$

$$\delta(\varepsilon) = \frac{3(54-7\varepsilon)}{54-25\varepsilon}, \quad \eta(\varepsilon) = \frac{864\varepsilon^2}{(216-109\varepsilon)^2}, \quad \nu(\varepsilon) = \frac{54-19\varepsilon}{4(27-14\varepsilon)}.$$

Отсюда при  $\varepsilon = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= 0,108; & \beta(1) &= 0,339; & \gamma(1) &= 1,310; \\ \delta(1) &= 4,862; & \eta(1) &= 0,075; & \nu(1) &= 0,673. \end{aligned}$$

Точные критические индексы для трехмерной модели Изинга не известны, однако полученные результаты можно сопоставить с критическими индексами, вычисленными с помощью суммирования высокотемпературных рядов<sup>/26/</sup>:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,125 \pm 0,015; & \beta &= 0,312 \pm 0,003; & \gamma &= 1,250 \pm 0,003; \\ \delta &= 5,150 \pm 0,020; & \eta &= 0,055 \pm 0,010; & \nu &= 0,642 \pm 0,003. \end{aligned}$$

Как видно, с этими значениями лучше согласуются критические индексы, найденные при автомодельном приближении, нежели индексы простого  $\varepsilon$ -разложения.

Содержание работ<sup>1,2/</sup> и данного сообщения составило основу для цикла из десяти лекций, прочитанных автором в ЛТФ ОИЯИ. Я благодарен всем слушателям и коллегам, чей интерес, проявившийся в многочисленных вопросах и обсуждениях, был для меня не только приятен, но и полезен.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юкалов В.И. - Сообщение ОИЯИ P17-88-601, Дубна, 1988.
2. Юкалов В.И. - Сообщение ОИЯИ P17-88-630, Дубна, 1988.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
4. Ширков Д.В. - ДАН СССР, 1982, 263, с. 64.
5. Ширков Д.В. - ТМФ, 1984, 60, с. 218.
6. Shirkov D.V., Shumovsky A.S., Yukalov V.I. - Comm. JINR E2-86-460, Dubna, 1986.
7. De Pasquale F., Di Castro C., Jona Lasinio G. In: Critical Phenomena. New York, Academic, 1971.
8. Parisi G. - J. Stat. Phys., 1980, 23, p. 49.
9. Шумовский А.С., Юкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Дубна, ОИЯИ, P17-85-676, 1985.
10. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Владимиров А.А. - ЖЭТФ, 1979, 77, с. 1935.
11. Илчев А.С., Митрюшкин В.К. - ЯФ, 1983, 38, с. 115.
12. Ушверидзе А.Г. - ЯФ, 1983, 38, с. 798.
13. Banerjee K., Bhattacharjee J. - Phys. Rev., 1984, D29, p. 1111.
14. Ширков Д.В. - В сб.: Фундаментальные проблемы теоретической и математической физики. Дубна, ОИЯИ, Д-12831, 1979.
15. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. - ТМФ, 1979, 38, с. 15.
16. Владимиров А.А., Казаков Д.И., Тарасов О.В. - ЖЭТФ, 1979, 77, с. 1035.
17. Belezny F. - J. Phys., 1986, A19, p. 551.
18. Юхновский И.Р. Фазовые переходы второго рода. Киев: Наукова Думка, 1985.
19. Parisi G. - Physica, 1984, A124, p. 523.
20. Van Enter A.C., Van Nemen J.L. - Phys. Rev., 1984, A29, p. 355.
21. Владимир М.И., Доготарь Л.А., Москаленко В.А. - ТМФ, 1984, 59, с. 139.
22. Hohenberg P.C., Halperin B.I. - Rev. Mod. Phys., 1977, 49, p. 435.

23. Фишер М. Природа критического состояния. М.: Мир, 1968.
24. Singh R., Chakravarty S. - Phys. Rev., 1987, B36, p. 546.
25. Singh R., Chakravarty S. - Phys. Rev., 1987, B36, p. 559.
26. Wilson K., Kogut J. - Phys. Rep., 1974, 12, p. 75.
27. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
28. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической физике. М.: Мир, 1985.
29. Joyce G.S. - Phys. Rev., 1966, 146, p. 349.
30. Urumov V. - Physica, 1988, A150, p. 293.
31. Baker G.A. - Phys. Rev. Lett., 1988, 60, p. 1844.
32. Перих К.В. - Сообщение ОИЯИ P2-12714, Дубна, 1979.
33. Kazakov D.I., Shirkov D.V. - Forts. Phys., 1980, 28, p. 465.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 декабря 1988 года.