объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-88-715

А.А.Бакасов, Б.М.Нарбаев*, А.С.Шумовский

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Направлено в "International Journal of Modern Physics B"

*Московский инженерно-физический институт

1988

I. "Сверхизлучательный порог" и устойчивость по Ляпунову

В теории безрезонаторных систем, как и в теории лазеров, существуют такие значения некоторых физических величин, которые, как иногда считается, соответствуют переходу системы из одного режима излучения в другой. В теории лазеров параметром, принимающим критические значения, может быть интенсивность накачки. После превышения первого критического уровня накачки лазер излучает синусоидальную волну, которую при достижении второго порога сменяют ультракороткие импульсы /1,2/. Решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику такого лазера, при критических значениях интенсивности накачки становятся неустойчивыми: сначала реализуется устойчивый фокус, который затем сменяется предельным циклом, а в дальнейшем - тором /3/. При этом интенсивность накачки является управляющим внешним параметром системы.

Для безрезонаторных, в том числе и сверхизлучающих, систем, ситуация несколько иная. Объектом изучения обычно является предварительно инвертированная система, которая может переходить в основное состояние, вообще говоря, различными путями. При этом внешнего параметра, подобного интенсивности накачки для лазера, для сверхизлучающей системы не существует. Режим излучения зависит от того, в каком состоянии подготавливается система, содержащая инвертированные излучатели. Это находит отражение в начальных условиях для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику такой системы.

Одной из основных величин является число предварительно инвертированных излучателей $K(t_0)$, где t_0 - начальный момент времени. Иногда считают, что если $K(t_0) > K_{thr}$, где K_{thr} -

некоторое критическое значение, то реализуется режим кооперативного излучения [4]. В противном случае, $K(t_0) < K_{thr}$, излучение будет спонтанным. Другим примером является критерий Ареччи-Куртенса [5], в частности, для числа излучателей N. Так, если $N < N_c$, где N_c -критическое значение, то импульс сверхизлучения имеет гладкую секансообразную форму, если же $N > N_c$, то кооперативное излучение становится осцилляторным.

В данной работе строгими методами теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений будет исследован вопрос о характере изменений режима излучения предварительно инвертированной системы двухуровневых атомов. Если существуют такие критические значения величин K_{thr} или N_c, при которых решения соответствующих эволюционных уравнений становятся неустойчивыми, то режим излучения изменяется скачкообразно: спонтанное излучение сменяется кооперативным, или секансообразный импульс сменяется осцилляторным. Если же решения остаются устойчивыми, то переход через "критические" значения K_{thr} или N_c является плавным и непрерывным.

В основу нашего анализа будет положена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая излучение иглообразной системы двухуровневых атомов, взаимодействующей с двумя резонансными модами [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt} + \frac{n}{\tau} = F, \\
&\frac{dF}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_2}\right)F = \frac{1}{T_0^2}\left(2nK - Nn + K + S\right), \\
&\frac{dS}{dt} + \frac{S}{T_2} = F(2K - N), \\
&\frac{dK}{dt} + \frac{K}{T_{non}} = -F.
\end{aligned} \tag{I}$$

Здесь n – число фотонов внутри образца, K – число инвертированных атомов, S – величина корреляции между дипольными моментами переходов двухуровневых атомов, F – скорость обмена энергией между полем и атомами, τ – время релаксации поля за счет вылета фотонов из образца, T_2 – время однородной релаксации макроскопического дипольного момента, T_{non} – время релаксации инвертированных атомов за счет безизлучательных механизмов, N – число атомов в системе, $T_0^{-1} = \sqrt{2}|g|/\hbar$, где g – константа взаимодействия в гамильтониане Дикке.

Если при переходе начального числа инвертированных атомов через значение K_{thr} режим излучения меняется скачком, то соответствующее решение уравнений (I) становится неустойчивым.

Основные вопросы, связанные с устойчивостью режимов излучения сверхизлучательных систем, были рассмотрены в работах [7,8]. Поэтому наша задача состоит в исследовании некоторых стационарных решений уравнений (I) с точки зрения теории бифуркации. Попутно мы выясним, какие условия будут наложены на исследуемые решения.

2. Доказательство устойчивости

Введем безразмерные переменные и время

$$y_1 = n;\ y_2 = \tau F;\ y_3 = S;\ y_4 = K;\ \theta = \frac{t}{\tau}; \tag{2}$$

а также безразмерные константы

$$\alpha_1 = \tau/T_2,\ \alpha_2 = \tau/T_0,\ \alpha_3 = \tau/T_{non}. \tag{3}$$

Система (I) принимает вид

$$\dot{y}_1 = -y_1 + y_2,$$
$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{2}(1+\alpha_1)y_2 + \alpha_2^2(2y_1y_4 - Ny_1 + y_3 + y_4),$$
$$\dot{y}_3 = -\alpha_1 y_3 + 2y_2y_4 - Ny_2, \tag{4}$$
$$\dot{y}_4 = -\alpha_3 y_4 - y_2.$$

Точка означает дифференцирование по безразмерному времени θ.

Пусть $A(\theta)=\{A_1(\theta), A_2(\theta), A_3(\theta), A_4(\theta)\}$ – некоторое, пока еще произвольное, решение системы (4). Исследуем его на устойчивость. Записывая

$$y(\theta) = A(\theta) + x(\theta), \tag{5}$$

получим для вариаций $x(\theta)=\{x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta), x_4(\theta)\}$ приведенную неавтономную квазилинейную систему уравнений:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}(1+\alpha_1)x_2 + \alpha_2^2(2x_1x_4 + 2A_4(\theta)x_1 + 2A_1(\theta)x_4 - Nx_1 + x_3 + x_4),$$
$$\dot{x}_3 = -\alpha_1 x_3 - Nx_2 + 2x_2x_4 + 2A_2(\theta)x_4 + 2A_4(\theta)x_2, \tag{6}$$
$$\dot{x}_4 = -\alpha_3 x_4 - x_2.$$

В сокращенной записи имеем

$$\dot{x} = (B + D(\theta))x + f(x), \tag{7}$$

где B – постоянная матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 N & -\frac{1}{2}(1+\alpha_1) & \alpha_2^2 & \alpha_2^2 \\ 0 & -N & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$D(\theta)$ – матрица, зависящая от времени:

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_2^2 A_4(\theta) & 0 & 0 & 2\alpha_2^2 A_1(\theta) \\ 0 & 2A_4(\theta) & 0 & 2A_2(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$f(x) = \{0,\ 2\alpha_2^2 x_1x_4,\ 2x_2x_4,\ 0\}. \tag{10}$$

Чтобы применить критерий Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем /9/, необходимо показать, что неавтономная система первого приближения

$$\dot{\xi} = (B + D(\theta))\xi \tag{11}$$

является правильной по Ляпунову /10/. Потребуем, чтобы исследуемое решение $A(\theta)$ удовлетворяло условию

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \|D(\theta)\| d\theta < \infty, \quad \theta_0 = t_0/\tau. \tag{12}$$

Производя в системе (11) замену $\xi = C\eta$, где C – неособенная матрица, диагонализирующая матрицу B:

$$\Lambda = C^{-1}BC = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4). \tag{13}$$

получим линейную систему уравнений

$$\dot{\eta} = \Lambda\eta + C^{-1}D(\theta)C\eta, \tag{14}$$

где в правой части не зависящие от времени коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ стоят по диагонали. Из условия (12) вытекает, что

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \|C^{-1}D(\theta)C\| d\theta < \infty.$$

Тогда система (14) – правильная по Ляпунову, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ образуют ее полный спектр /11/. Поскольку нелинейность (10) удовлетворяет условиям критерия Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем, то исследование на устойчивость тривиального решения приведенной системы (6)-(I0), или, что то же, решения исходной системы (4), в силу условия (I2) сводится к простому вопросу об отрицательной определенности постоянной матрицы B. Пользуясь критерием Сильвестра, легко видеть, что при всех положительных значениях τ, T_2, T_0, T_{non} и N в уравнениях (I) главные миноры матрицы $-B$ положительны:

$$\begin{aligned} &\Delta_1(-B) = 1 > 0, \\ &\Delta_2(-B) = \tfrac{1}{2}(1+\alpha_1) + \alpha_2^2 N > 0, \\ &\Delta_3(-B) = \alpha_1 \Delta_2(-B) + \alpha_2^2 N > 0, \\ &\Delta_4(-B) = \alpha_3 \Delta_3(-B) + \alpha_1 \alpha_2^2 > 0, \end{aligned} \tag{I5}$$

и следовательно, матрица B отрицательно знакоопределена, т.е. $\lambda_i < 0$, i = I, 2, 3, 4. Тогда, согласно критерию Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем, тривиальное решение приведенной системы (6)-(I0) устойчиво по Ляпунову. Это значит, что решение $A(\theta)$ исходной системы (I) или (4), удовлетворяющее единственному условию (I2), является устойчивым. Более того, как следует из этого же критерия, решение $A(\theta)$ - экспоненциально устойчиво по Ляпунову /I2/.

Устойчивость решения $A(\theta)$, которое произвольно (за исключением условия (I2)), физически означает, что не существует начальных условий, в частности, такого начального числа инвертированных атомов K_{thr}, при которых режим излучения предварительно инвертированной системы, описываемой уравнениями (I), изменялся бы скачком. Следовательно, в данной системе переход из режима спонтанного излучения к сверхизлучению происходит непрерывным образом. Экспоненциальная устойчивость решения $A(\theta)$ означает,

что за время, сравнимое с $max(\tau, T_2, T_0, T_{non})$, в эволюции переменных R, F, S, K наступает стадия их экспоненциального стремления к нулевым значениям. Следовательно, уравнения (I) адекватно описывают диссипативный характер излучения предварительно инвентированной системы двухуровневых атомов.

Достаточное условие (I2), с точки зрения математика, является очень сильным. Однако физик не может не требовать выполнения этого условия, поскольку оно эквивалентно простым физически необходимым условиям. Покажем это.

3. Физические причины устойчивости

3.I. Достаточные условия устойчивости

Для некоторого решения $A(\theta) = \{A_1(\theta), A_2(\theta), A_3(\theta), A_4(\theta)\}$ системы эволюционных уравнений (4) достаточное условие устойчивости (I2) выглядит следующим образом:

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \|D(\theta)\| d\theta = \int_{\theta_0}^{\infty} \sqrt{\alpha_2^4 A_1^2(\theta) + A_2^2(\theta) + (1+\alpha_2^2)^2 A_4^2(\theta)}\, d\theta < \infty. \tag{I6}$$

Использована евклидова норма. Видно, что функция $A_3(\theta)$ в это условие не входит.

Для несобственного интеграла, фигурирующего в (I6), справедлива оценка сверху

$$\begin{aligned} &\int_{\theta_0}^{\infty} \sqrt{\alpha_2^4 A_1^2(\theta) + A_2^2(\theta) + (1+\alpha_2^2)^2 A_4^2(\theta)}\, d\theta \le \\ &\le \int_{\theta_0}^{\infty} \left(\alpha_2^2 |A_1(\theta)| + |A_2(\theta)| + (1+\alpha_2^2)|A_4(\theta)|\right) d\theta. \end{aligned} \tag{I7}$$

Если несобственный интеграл в правой части неравенства (17) существует и сходится, то, в силу неотрицательности подынтегральных функций, существуют и сходятся несобственные интегралы

$$\bar{I}_1 = \int_{\theta_0}^{\infty} |A_1(\theta)| d\theta, \tag{18}$$

$$\bar{I}_2 = \int_{\theta_0}^{\infty} |A_2(\theta)| d\theta, \tag{19}$$

$$\bar{I}_4 = \int_{\theta_0}^{\infty} |A_4(\theta)| d\theta. \tag{20}$$

Таким образом, если $\bar{I}_j < \infty$, j = 1, 2, 4, то достаточное условие устойчивости (16) заведомо выполняется.

3.2. Неотрицательность и конечность энергии излучающей системы, существование ее равновесного состояния в бесконечно удаленном будущем

Покажем сначала, что из условия неотрицательности и конечности энергии вытекает сходимость интегралов $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_4$. Действительно, функции $A_1(\theta)$ и $A_4(\theta)$ являются соответственно числом фотонов в рабочем объеме и числом возбужденных атомов. Они определяют энергию системы, поэтому

$$0 \le A_1(\theta) < \infty, \tag{21}$$

$$0 \le A_4(\theta) < \infty. \tag{22}$$

Для двух любых моментов приведенного времени $\theta_2 > \theta_1 \ge \theta_0$ можно записать

$$A_1(\theta_2) - A_1(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \dot{A}_1(\theta) d\theta, \tag{23}$$

$$A_4(\theta_2) - A_4(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \dot{A}_4(\theta) d\theta. \tag{24}$$

Суммируя (23) и (24) с учетом эволюционных уравнений (4), получим

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (A_1(\theta) + \alpha_3 A_4(\theta)) d\theta = A_1(\theta_1) - A_1(\theta_2) + A_4(\theta_1) - A_4(\theta_2). \tag{25}$$

Пусть пределы $A_1(\theta)$ и $A_4(\theta)$ при $\theta \to \infty$ существуют. Это означает, что открытая система излучателей по истечении бесконечно большого времени перейдет в равновесное состояние. Тогда в силу неравенств (21) и (22) имеем

$$\int_{\theta_0}^{\infty} (|A_1(\theta)| + \alpha_3 |A_4(\theta)|) d\theta \le |A_1(\theta_0)| + |A_1(\infty)| + |A_4(\theta_0)| + |A_4(\infty)| < \infty. \tag{26}$$

Отсюда сразу следует, что несобственные интегралы $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_4$ существуют и сходятся:

$$\bar{I}_1 = \int_{\theta_0}^{\infty} |A_1(\theta)| d\theta < \infty, \tag{27}$$

$$\bar{I}_4 = \int_{\theta_0}^{\infty} |A_4(\theta)| d\theta < \infty. \tag{28}$$

3.3. Конечность интенсивности излучения или поглощения

Перейдем теперь к оценке интеграла $\bar{I}_2$. Заметим, что в силу первого из эволюционных уравнений (4) справедливо неравенство

$$|A_2(\theta)| \le |A_1(\theta)| + |\dot{A}_1(\theta)|. \tag{29}$$

Далее будем различать два случая. Первый – монотонное асимптотическое поведение поля. Пусть существует такой момент времени $\theta' \ge \theta_0$, что на полуоси $[\theta', \infty)$ функция $A_1(\theta)$ является монотонной. Эта функция также непрерывно дифференцируема в силу теоремы существования и единственности /9/. Поэтому из сходимости интеграла $\bar{I}_1$ в (27) следует, что $A_1(\theta)$ - монотонно невозрастающая функция, такая, что

$$\bar{I}_1' = \int_{\theta_0}^{\infty} |\dot{A}_1(\theta)| d\theta \le \infty . \qquad (30)$$

Тогда интеграл $\bar{I}_2 \le \bar{I}_1 + \bar{I}_1'$ существует и сходится. Таким образом, если поле асимптотически монотонно, то ввиду (27), (28) и (30) выполняется условие (I6). Следовательно, в этом случае устойчивость режима излучения вполне определяется неотрицательностью и конечностью энергии системы.

Рассмотрим другой возможный случай - осцилляторное асимптотическое поведение поля, когда число фотонов осциллирует со временем.

Пусть $\theta_1, \theta_2 \ldots$ - последовательность изолированных экстремумов функции $A_1(\theta)$ на полуоси $[\theta_0, \infty)$. Если эта последовательность ограничена, то рассмотрение сводится к случаю асимптотически монотонного поведения поля. Действительно, достаточно рассматривать эволюцию поля на временах, больших, чем верхняя граница последовательности $\{\theta_i\}$.

Пусть возрастающая последовательность $\{\theta_i\}$ не ограничена. Рассмотрим следующий определенный интеграл:

$$\bar{I}_1''(m) = \int_{\theta_0}^{\theta_m} |\dot{A}_1(\theta)| d\theta = \sum_{i=1}^{m} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} |\dot{A}_1(\theta)| d\theta . \qquad (3I)$$

Согласно теореме о среднем

$$\bar{I}_1''(m) = \sum_{i=1}^{m} |\dot{A}_1(\theta_i^*)| (\theta_i - \theta_{i-1}), \quad \theta_{i-1} < \theta_i^* < \theta_i . \qquad (32)$$

Обозначим $p_i = max |\dot{A}_1(\theta)|$, где $\theta \in]\theta_{i-1}, \theta_i[$.

Тогда

$$\bar{I}_1''(m) \le \sum_{i=1}^{m} p_i (\theta_i - \theta_{i-1}) . \qquad (33)$$

Потребуем, чтобы, начиная с некоторого i, выполнялось неравенство

$$p_i \le M \bar{A}_1(i) = \frac{M}{\theta_i - \theta_{i-1}} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} A_1(\theta) d\theta , \qquad (34)$$

где M - произвольная константа, не зависящая от i, а $\bar{A}_1(i)$ - среднее значение функции $A_1(\theta)$ на интервале $]\theta_{i-1}, \theta_i[$.

Тогда сходящийся в силу (27) интеграл

$$\bar{I}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} A_1(\theta) d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{A}_1(i) (\theta_i - \theta_{i-1}) \qquad (35)$$

является рядом, мажорирующим ряд

$$\bar{I}_1'' = \lim_{m \to \infty} \bar{I}_1''(m) = \sum_{i=1}^{\infty} |\dot{A}_1(\theta_i^*)| (\theta_i - \theta_{i-1}) . \qquad (36)$$

Следовательно, в силу сходимости $\bar{I}_1$ и условия (34), существует и сходится интеграл $\bar{I}_1''$, а также существует и сходится интеграл

$$\bar{I}_2 = \int_{\theta_0}^{\infty} |A_2(\theta)| d\theta \le \bar{I}_1 + \bar{I}_1'' < \infty , \qquad (37)$$

что и требовалось показать. Тогда осцилляторный режим излучения является устойчивым.

4. Стационарные решения и бифуркационные свойства

Стационарные решения будем искать для исходной системы (I), записанной непосредственно в терминах физических величин. Приравнивая нулю производные и помечая компоненты стационарного решения волнистой чертой, получаем соотношения

$$\widetilde{F} = \frac{1}{\tau}\widetilde{n}, \tag{38}$$

$$\widetilde{K} = -\frac{T_{hon}}{\tau}\widetilde{n}, \tag{39}$$

$$\widetilde{S} = \frac{T_2}{\tau}\widetilde{n}\left\{-\frac{2T_{hon}}{\tau}n - N\right\}. \tag{40}$$

Полагая, что все константы релаксаций отличны от нуля и конечны, замечаем, что в силу (38) - (40) при $\widetilde{n} = 0$ реализуется тривиальное решение. Нетривиальные стационарные решения возможны лишь при $\widetilde{n} \neq 0$. Тогда, пользуясь вторым уравнением системы (I) и соотношениями (38) - (40), получим

$$\widetilde{n} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} < 0, \tag{41}$$

где обозначено

$$\beta_1 = \frac{1}{2\tau}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_2}\right) + \frac{1}{T_0^2}\left(N + \frac{NT_2}{\tau} + \frac{T_{hon}}{\tau}\right),$$

$$\beta_2 = \frac{2T_{hon}}{T_0^2\tau} + \frac{2T_2T_{hon}}{T_0^2\tau^2}.$$

Однако $\widetilde{n}$ является числом фотонов и не может быть отрицательным. Следовательно, нетривиальное стационарное решение, определяемое формулами (38) - (41), не является физическим.

Таким образом, среди стационарных решений физический смысл имеет лишь тривиальное: $\widetilde{n} = \widetilde{F} = \widetilde{S} = \widetilde{K} = 0$. Это решение, естественно, не содержит точек бифуркаций. Оно удовлетворяет условию (12), поэтому в силу экспоненциальной устойчивости является

устойчивым фокусом. Стационарные решения системы уравнений (I) не содержат бифуркаций, отвечающих каким-либо физическим ситуациям. Физическая система, описываемая такими уравнениями, не может испытывать неравновесный фазовый переход. Вообще говоря, понятие фазового перехода, как равновесного, так и неравновесного, предполагает наличие, по крайней мере, двух фаз, которым соответствуют стационарные состояния с различной симметрией /13/. Как показано выше, в задаче о сверхизлучательной генерации существует только одно физическое стационарное состояние. Вместе с тем парная функция корреляции диполей в разных узлах $S(t) - K(t)$ в процессе сверхизлучательной генерации меняется, достигая максимального значения при $t = t_D$ (t_D - время задержки импульса)/6/. Такое поведение парной функции соответствует наличию в системе упорядочения, реализующегося, однако, на весьма малых временах. Таким образом, в проблеме сверхизлучения следует говорить о динамическом дальнем порядке, а не о неравновесном фазовом переходе.

5. Комментарий

Перечислим еще раз физические условия, наложенные на рассмотренные здесь решения.

Условия (21) и (22) обеспечивают отбор решений с конечной и неотрицательной энергией.

Предположение о существовании пределов функций $A_1(\theta)$ и $A_{II}(\theta)$ при $\theta \to \infty$ есть просто констатация очевидного физического факта о переходе открытой системы, описываемой уравнениями (4), в равновесное состояние по истечении бесконечно большого времени.

Условие (34), как легко видеть, есть просто условие конечности наблюдаемой величины - интенсивности излучения или поглощения. Выбором константы М можно обеспечить достижение любой наперед заданной величины интенсивности, т.е. физическая общность не теряется.

Таким образом, мы потребовали при рассмотрении выполнения лишь самых необходимых физических условий. Если эти условия выполнены, то режим излучения предварительно инвертированной системы двухуровневых атомов является устойчивым. В такой системе никогда не возникает хаоса - экспоненциальной неустойчивости /I4/, более того, не существует и пороговых значений начальной инверсии населенности или числа излучателей. Это - строгий результат для рассмотренной системы (I).

Результат раздела 4 показывает, что в рамках системы (I) сверхизлучение не является неравновесным фазовым переходом и не может служить примером системы с самоорганизацией. Противоположная трактовка /I5/ этого явления основана на анализе уравнения 2-го порядка, которое представляется нам менее общим, нежели система (I), положенная в основу нашего анализа.

В заключение заметим, что исходные переменные n, P, S и K не позволяют воспользоваться прямо энергетическим способом построения функции Ляпунова для исследования решений уравнений (I) на устойчивость, поскольку энергия системы линейна по этим переменным /I6/.

Авторы благодарны П.Е.Жидкову за обсуждение некоторых математических аспектов работы.

Литература

1. M.Sargent III, M.O.Scully, W.E.Lamb Jr., Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
2. H.Haken, Light, vol. 2, Laser light dynamics, North-Holland, Amsterdam, 1985.
3. H.Haken, H.Ohno. Opt.Comm., 16 (1976) 205.
4. R.Bonifacio, F.Schwendimann, F.Haake. Phys.Rev., A4 (1971) 302.
5. F.T.Arecchi, E.Courtens. Phys.Rev., A2 (1970) 1730.
6. A.V.Andreev, V.I.Emel'yanov, Yu.A.Il'inski. Sov.Usp. 23 (1980) 493.
7. А.А.Бакасов. Препринт ОИЯИ Р17-87-238, Дубна, 1987.
8. A.A.Bakasov. Phys. Lett. A, 1988, 130, p.461.
9. I.Malkin. Theory of Stability of Motion, Atomic Energy Commission, Trans. No 3352, Dept.of Commerce, Washington, D.C., 1958.
10. A.M.Liapunov. Stability of Motion, Academic Press, New York, 1966.
11. N.Levinson. Duke Math.Journ. 15 (1948) 111.
12. N.N.Krasovski. Stability of Motion, Stanford Univ.Press, Stanford, 1963.
13. J.W.Gibbs. Collected Works, v. 1, Longmans, New York, 1928.
14. J.R.Ackerhalt, P.W.Milonni, M.-L.Shih. Phys.Rep., 128(1985) 205.
15. R.Bonifacio, L.A.Lugiato. Topp.Curr.Phys., vol. 27, p. 1-9, Springer-Verlag, 1982.
16. J.La Salle, S.Lefschetz. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York-London, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 сентября 1988 года.