

сообщения  
Объединенного  
Института  
Ядерных  
Исследований  
Дубна

Ю 233

P17-88-630 e

В.И. Юкалов

РЕНОРМГРУППА  
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ - ИМПУЛЬСНОЕ  
И РЕАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВА

1988

## ВВЕДЕНИЕ

Данное сообщение является продолжением предыдущей работы<sup>/1/</sup>, в которой были изложены основные принципы ренормгруппового подхода в статистической физике и сформулированы главные постулаты, составляющие основу метода. Ниже эти общие принципы конкретизируются для рассмотрения двух наиболее распространенных вариантов ренормгруппового подхода: для ренормгрупп в импульсном и реальном пространствах. Для исследования кроссовера между разными классами универсальности предложена простая модель, содержащая два типа взаимодействий.

Упомянутые пункты и формулы работы<sup>/1/</sup> сопровождаются соответствующим индексом. Например, пункт 8<sub>1</sub> означает пункт 8 работы<sup>/1/</sup> или формула /36/<sub>1</sub> обозначает формулу /36/ из работы<sup>/1/</sup>.

### 1. МЕТОД ВИЛЬСОНА

Существование неподвижных точек и свойства критических траекторий, выясненные в предыдущей работе, позволяют провести ренормгрупповые вычисления явно. Вильсону<sup>/2/</sup> принадлежит заслуга разработки такого метода вычислений, основанного на понятии неподвижной точки, а также использующего разложение вблизи критической размерности, которое будет пояснено ниже.

Следуя Вильсону и Когуту<sup>/2/</sup> или Ма<sup>/3/</sup>, будем работать в импульсном пространстве. Рассмотрим класс универсальности, к которому, по-видимому, принадлежит большинство реальных систем. Это класс универсальности, включающий модель Изинга и теорию поля  $\psi^4$ . Простейший гамильтониан, представляющий модели данного класса, - это гамильтониан Гинзбурга-Ландау

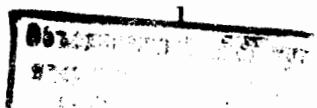
$$H\{\psi\} = \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(\bar{k}) |\psi(\bar{k})|^2 d\bar{k} + g \int_0^1 \psi(\bar{k}_1) \psi(\bar{k}_2) \psi(\bar{k}_3) \psi(\bar{k}_4) \delta^d(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 + \bar{k}_4) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 d\bar{k}_4, \quad / 1 /$$

в котором

$$\omega(\bar{k}) = m^2 + k^2, \quad \bar{k} = \{k_\mu | \mu = 1, 2, \dots, d\} \quad / 2 /$$

и введены обозначения

$$\int_0^1 d\bar{k} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d \prod_{\mu=1}^d \int_0^1 dk_\mu, \quad \delta^d(\bar{k}) \equiv \left(\frac{2\pi}{a}\right)^d \prod_{\mu=1}^d \delta(k_\mu).$$



Константа  $\alpha$  появляется при переходе к термодинамическому пределу

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^d \int d\vec{k}, \quad \frac{V}{N} \rightarrow \alpha^d.$$

Разделим пространство волновых векторов, как это было объяснено в пункте 8. При определении эффективного гамильтониана по соотношению /36/, необходимо проинтегрировать по "большим" переменным, то есть по полям  $\varphi^>(\vec{k})$  с волновыми векторами, для которых  $|\vec{k}| > \Lambda/\beta$ . Ясно, что эту процедуру невозможно проделать точно. Континуальный интеграл вычисляется только по теории возмущений. В данном случае надо пользоваться теорией возмущений по константе связи  $g$ . Кроме того, как было выяснено выше, можно отбрасывать появляющиеся при интегрировании слагаемые, которые искажают форму исходного гамильтониана. В результате происходит ренормировка

$$\omega(\vec{k}) \rightarrow m^2(\beta) + f(\beta)k^2, \quad g \rightarrow g(\beta), \quad / 3/$$

определяемая рекуррентными соотношениями.

$$m^2(\beta) = \frac{\zeta^2}{\beta^d} \left[ m^2 + 12g \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{m^2+k^2} \right] + O(g^2),$$

$$f(\beta) = \frac{\zeta^2}{\beta^{d+2}} + O(g^2), \quad / 4/$$

$$g(\beta) = \frac{\zeta^4}{\beta^{3d}} \left[ g - 36g^2 \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(m^2+k^2)^2} \right] + O(g^3).$$

Воспользуемся произвольностью масштабного фактора  $\zeta$ , введенного в преобразовании полей /38/, и выберем его так, чтобы коэффициент при  $k^2$  в гамильтониане сохранял свое начальное значение, равное единице:

$$f(\beta) = 1, \quad \zeta^2 = \beta^{d+2}.$$

В принципе, допустимы и другие варианты выбора  $\zeta$ . Теперь из /4/ следуют уравнения ренормгруппы

$$m^2(\beta) = \beta^2 \left[ m^2 + 12g \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{m^2+k^2} \right] + O(g^2), \quad / 5/$$

$$g(\beta) = \beta^{4-d} g \left[ 1 - 36g \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(m^2+k^2)^2} \right] + O(g^3).$$

Неподвижная точка преобразования /5/, в соответствии с определением /49/, задается набором параметров  $m^*$  и  $g^*$ :

$$(m^*)^2 = \beta^2 \left[ (m^*)^2 + 12g^* \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(m^*)^2+k^2} \right], \quad / 6/$$

$$g^* = \beta^{4-d} g^* \left[ 1 - 36g^* \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{((m^*)^2+k^2)^2} \right].$$

Эти уравнения имеют очевидное тривиальное решение

$$m^* = 0, \quad g^* = 0. \quad / 7/$$

Но нам хотелось бы найти нетривиальную неподвижную точку, соответствующую критическому режиму.

Прибегая к теории возмущений по константе связи, мы полагаем, что  $g^*$  мало. Из /6/ видно, что  $m^*$  пропорционально  $\sqrt{g^*}$ . Поэтому интегралы, входящие в /6/, можно упростить, разлагая их по степеням  $m^*$ . При этом нет смысла выходить за рамки приближения, уже использованного в /4/. Это означает, что для интегралов можно воспользоваться приближением

$$\int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(m^*)^2+k^2} \approx \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{k^2} = \frac{C_d}{d-2} \left[ \Lambda^{d-2} - (\Lambda/\beta)^{d-2} \right],$$

$$\int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{((m^*)^2+k^2)^2} \approx \int_{\Lambda/\beta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{k^4} = \frac{C_d}{d-4} \left[ \Lambda^{d-4} - (\Lambda/\beta)^{d-4} \right],$$

где

$$C_d = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^d \int d^d \Omega = \frac{\alpha^d}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)}.$$

Подставляя эти разложения в /6/, находим нетривиальные решения

$$(m^*)^2 = - \frac{12g^* C_d \beta^2 [\Lambda^{d-2} - (\Lambda/\beta)^{d-2}]}{(\beta^2-1)(d-2)}, \quad / 8/$$

$$g^* = \frac{(1-\beta^{d-4})(d-4)}{36 C_d [\Lambda^{d-4} - (\Lambda/\beta)^{d-4}]}.$$

К сожалению, радоваться еще рано, поскольку решения / 8/ явно зависят от произвольного масштабного фактора  $\delta$ , что физически бессмысленно. Вся процедура в целом имеет смысл только тогда, когда она дает значения параметров неподвижной точки, не зависящие от масштабного множителя  $\delta$ .

## 2. НЕЦЕЛАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Для того чтобы извлечь из / 8/ разумную информацию, обратимся к идее Вильсона и Фишера<sup>/4/</sup>, согласно которой размерность пространства  $d$  можно формально рассматривать как непрерывную переменную. Варьируя  $d$ , замечаем, что нетривиальные решения / 8/ превращаются в тривиальные / 7/ при критической размерности  $d_c = 4$ . Таким образом, размерность  $d = 4$  оказывается выделенной. В этом случае эффективный гамильтониан эквивалентен гамильтониану среднего поля, а статистическая сумма становится гауссовым континуальным интегралом. Соответствующий режим называется гауссовым.

Считая  $d$  непрерывной переменной, можно исследовать поведение системы с размерностью, близкой к  $d_c = 4$ . Такая система характеризуется малым числом

$$\varepsilon \equiv d_c - d = 4 - d. \quad / 9/$$

Подставляя в выражения, определяющие критические характеристики системы,  $d = 4 - \varepsilon$  и делая вид, что  $\varepsilon$  служит малым параметром, можно провести так называемое  $\varepsilon$ -разложение, при котором

$$x^\varepsilon = \exp(\varepsilon \ln x) \approx 1 + \varepsilon \ln x + \dots$$

Используя  $\varepsilon$ -разложение в / 8/, находим

$$\begin{aligned} (m^*)^2 &= -\varepsilon \Lambda^2 / \delta, \\ g^* &= \varepsilon \Lambda / 3\delta c_d. \end{aligned} \quad /10/$$

Достоинства этого подхода заключаются в следующем. Во-первых, найденные параметры критической неподвижной точки /10/, как и должно быть, не зависят от скейлингового фактора  $\delta$ . Во-вторых, верифицируется сделанное ранее предположение о малости перенормированной константы связи, поскольку  $g^* \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , следовательно, оправдывается применение теории возмущений по  $g^*$ .

Конечно, в конце концов приходится вспомнить, что физические системы имеют целые размерности. В общем случае  $d = 3$ , иногда можно полагать  $d = 1$  или  $d = 2$ . Значит, в /10/ мы вынуждены подставлять отнюдь не малое  $\varepsilon$ . Приведем для примера полученные из /10/ безразмерные величины

$$m_d^2 \equiv (m^*)^2 / \Lambda^2, \quad g_d \equiv g^* a^d / \Lambda.$$

В одномерном случае

$$d = 1, \quad \varepsilon = 3, \quad c_1 = a / \pi,$$

в двумерном

$$d = 2, \quad \varepsilon = 2, \quad c_2 = a^2 / 2\pi,$$

в трехмерном

$$d = 3, \quad \varepsilon = 1, \quad c_3 = a^3 / 2\pi^2.$$

Отсюда получаем

$$m_1^2 = -0,5; \quad g_1 = 0,262;$$

$$m_2^2 = -0,333; \quad g_2 = 0,349;$$

$$m_3^2 = -0,167; \quad g_3 = 0,548.$$

Анализ рядов  $\varepsilon$ -разложения показывает, что они, как и вообще ряды теории возмущений, являются асимптотическими. Результаты вычислений могут быть улучшены, если к этим рядам применить, например, метод суммирования Бореля или Паде-Бореля.

Выделенность размерности пространства  $d = 4$ , в соответствии с критерием Гинзбурга /см. пункт 4/, состоит в том, что начиная с этой размерности флуктуации несут существенны.

## 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнениям ренормгруппы можно придать и дифференциальную форму, которая более удобна для исследования траекторий гамильтониана. При этом надо рассмотреть перенормировку параметров, сопровождающую исключение полей, которым отвечают волновые векторы из бесконечно тонкой оболочки. Для этого в качестве масштабного фактора следует взять

$$\delta = 1 + \delta x \quad (\delta x \rightarrow 0). \quad /11/$$

Исследуем снова класс универсальности  $\psi^4$ . Тогда интегралы, входящие в рекуррентные соотношения /5/, при условии /11/ определяются выражениями

$$\int_{\Lambda/\delta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{m^2 + k^2} \approx \frac{c_d \Lambda^d \delta x}{m^2 + \Lambda^2},$$

$$\int_{\Lambda/\delta}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(m^2 + k^2)^2} \approx \frac{c_d \Lambda^d \delta x}{(m^2 + \Lambda^2)^2}.$$

При такой аппроксимации /5/ дает

$$\frac{m^2(1+\delta x)-m^2}{\delta x} = 2m^2 + \frac{12g C_d \Lambda^d}{m^2 + \Lambda^2}, \quad /12/$$

$$\frac{g(1+\delta x)-g}{\delta x} = (4-d)g - \frac{36g^2 C_d \Lambda^d}{(m^2 + \Lambda^2)^2}.$$

Последовательно применяя процесс бесконечно малых преобразований, получаем непрерывную последовательность параметров, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\frac{dm^2(x)}{dx} = 2m^2(x) + \frac{12g(x) C_d \Lambda^d}{m^2(x) + \Lambda^2}, \quad /13/$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = (4-d)g(x) - \frac{36g^2(x) C_d \Lambda^d}{(m^2(x) + \Lambda^2)^2}.$$

Начальными условиями для /13/ служат

$$m(0) = m, \quad g(0) = g. \quad /14/$$

Неподвижная точка задается параметрами  $m^*$  и  $g^*$ , определяемыми из условия стационарности  $m(x)$  и  $g(x)$ , то есть

$$\left[ \frac{dm(x)}{dx} \right]_{m^*, g^*} = 0, \quad \left[ \frac{dg(x)}{dx} \right]_{m^*, g^*} = 0. \quad /15/$$

При этом из /13/ следует

$$\begin{aligned} 6g^* C_d \Lambda^d + (m^*)^2 ((m^*)^2 + \Lambda^2) &= 0, \\ 36g^* C_d \Lambda^d - (4-d) ((m^*)^2 + \Lambda^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Считая, как обычно, что константа ультрафиолетового обрезания достаточно велика,

$$\frac{\Lambda^2}{m^2} \gg 1,$$

получаем

$$(m^*)^2 = -\frac{(4-d)\Lambda^2}{6}, \quad g^* = \frac{(4-d)\Lambda^{4-d}}{36 C_d}. \quad /16/$$

Подставляя сюда  $\epsilon = 4-d$ , возвращаемся к неподвижной точке /10/. Однако при получении /16/ никакого  $\epsilon$ -разложения не использовалось. Значит, дифференциальная формулировка уравнений ренормгруппы является, вообще говоря, альтернативной  $\epsilon$ -разложению.

Линеаризуя уравнения /13/ вблизи точек стационарности, несложно исследовать свойства критических траекторий, задающих критические характеристики системы, в частности ее критические индексы.

Можно также записать и дифференциальное уравнение для безразмерной корреляционной длины /42/, связывающее ее с ренормированной длиной

$$\bar{\xi}(b) = \bar{\xi} [H(b, \{\varphi\})].$$

В соответствии с /47/

$$\bar{\xi}(b) = \bar{\xi} / b. \quad /17/$$

Отсюда для бесконечно малого преобразования /11/ имеем

$$\frac{d\bar{\xi}(x)}{dx} = -\bar{\xi}(x), \quad /18/$$

при начальном условии

$$\bar{\xi}(0) = \bar{\xi}. \quad /19/$$

Из /18/ и /19/ сразу же находится решение

$$\bar{\xi}(x) = \bar{\xi} e^{-x}. \quad /20/$$

Сравнивая /17/ и /20/, видим, что между масштабным фактором  $b$  и параметром траекторий  $x$  существует соотношение

$$b = e^x.$$

Заметим, что уравнение для корреляционной длины /18/ в случае непрерывной системы - точное. Для решеточной системы оно выполняется приближенно<sup>/2,3/</sup>, если  $\bar{\xi}(x)$  конечно, но становится асимптотически точным при подходе к критической траектории, на которой корреляционная длина расходится.

#### 4. ПРОЦЕДУРА ДЕЦИМАЦИИ

Теперь рассмотрим, как метод статистической ренормгруппы реализуется в реальном пространстве. Этот метод, в отличие от импульсного пространства, в своих основных положениях выглядит более простым. Наиболее тесно с концепцией Каданова, изложенной в пункте 6, связана так называемая процедура децимации. Децимация означает отсуммирование части переменных, в результате чего происходит укрупнение масштаба в реальном пространстве. Этот термин заимствован из лексики Древнего Рима. Там под децимацией понималось умерщвление каждого десятого воина из легиона, проявившего трусость в бою.

Пусть имеется решетка из  $N$  узлов с расстоянием  $a$  между ближайшими соседями. В каждом узле задана спиновая переменная  $\sigma_i$ , так что полный набор переменных

$$S = \{\sigma_i | i = 1, 2, \dots, N\}. \quad /21/$$

Поэтапное отсуммирование части переменных при вычислении статсуммы, как это описано в пункте 6, эквивалентно тому, что мы последовательно переходим из решетки с постоянной  $a$  к укрупненной решетке с большим меж-узельным расстоянием.

Обратимся снова к изинговскому классу универсальности /теория поля  $\varphi^4$ /. Гамильтониан модели Изинга имеет вид

$$H = N \frac{U}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J_0 \sigma_i \sigma_j \quad (\sigma_i = \pm 1), \quad /22/$$

где  $\langle ij \rangle$  означает суммирование по ближайшим соседям. Здесь мы оставили обыкновенно отбрасываемое постоянное слагаемое  $N U / 2$ , чтобы посмотреть, как оно преобразуется в результате действия ренормгрупповых операций. Для дальнейшего удобно ввести безразмерные величины

$$u = \frac{U}{2\theta}, \quad g = \frac{J_0}{2\theta}. \quad /23/$$

Безразмерный гамильтониан /13/, в данном случае равен

$$H\{S\} = Nu - g \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j. \quad /24/$$

Рассмотрим квадратную решетку. Следуя идеологии пункта 6, проведем в статсумме /14/, отсуммирование по тем переменным, которые расположены в узлах, соответствующих ближайшим соседям. Такая процедура приводит к увеличению периода решетки:

$$a \rightarrow \sqrt{2} a.$$

После однократной децимации находим определенный в /15/ эффективный гамильтониан

$$H_1\{S_1\} = Nu_2 - g_2 \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - g_2' \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - g_2'' \sum_{[ijkl]} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l, \quad /25/$$

в котором ренормированы исходные параметры /23/:

$$u_2 = 2u - \ln 2 - \frac{1}{8} (\ln ch 4g + 4 \ln ch 2g), \quad /26/$$

$$g_2 = \frac{1}{4} \ln ch 4g,$$

а также появились новые параметры

$$g_2' = \frac{1}{2} g_2, \quad /27/$$

$$g_2'' = \frac{1}{8} (\ln ch 4g - 4 \ln ch 2g),$$

отвечающие третьему и четвертому слагаемым в /25/, где  $\langle ij \rangle$  означает соседей, следующих за ближайшими, а  $[ijkl]$  - плакет, то есть квадрат из узлов, не содержащий внутри себя других узлов. Индекс 2 в рекуррентных соотношениях /26/ и /27/ показывает, что ренормированные величины относятся к решетке с увеличенным периодом  $\sqrt{2} a$ .

Как видим, здесь опять произошло то самое размножение констант связи, которое обсуждалось в пункте 9. В данном случае число параметров исходного гамильтониана удвоилось:

$$\{u, g\} \rightarrow \{u_2, g_2, g_2', g_2''\}. \quad /28/$$

Но как было выяснено в пункте 10, слагаемыми, искажающими форму гамильтониана, можно пренебречь вблизи неподвижной точки. Поэтому последнюю можно определить уравнениями, следующими из /26/:

$$u^* = 2u^* - \ln 2 - \frac{1}{8} (\ln ch 4g^* + 4 \ln ch 2g^*), \quad /29/$$

$$g^* = \frac{1}{4} \ln ch 4g^*.$$

Первое из уравнений /29/ упрощается:

$$u^* = \ln 2 + \frac{1}{2} (g^* + \ln ch 2g^*), \quad /30/$$

а для второго надо искать нетривиальное решение  $g^* \neq 0$ . Тривиальное решение  $g^* = 0$  соответствует бесконечной температуре. Как видим, преимущество процедуры децимации, по сравнению с методом Вильсона, состоит в том, что не используются теория возмущений по константам связи и  $\epsilon$ -разложение.

Конечно, было бы наивно думать, что, сделав только одну ренормировку, мы получим ответ, совпадающий с известным точным решением Онзагера. Для получения ответа, достаточно близкого к точному, надо сделать более чем однократную децимацию.

## 5. ТОЧНАЯ ПОЛУГРУППА

В пункте 9, упоминалось, что существует несколько примеров, когда при проведении ренормализационных преобразований размножения констант связи не происходит, форма гамильтониана не меняется, потому ренормгруппа может быть реализована точно на всем множестве параметров гамильтониана, а не только асимптотически вблизи неподвижной точки. Одним

из таких немногих приятных исключений и является одномерная модель Изинга, на которой мы сейчас более подробно проиллюстрируем процедуру децимации.

Задавая для изинговской цепочки обычные периодические условия  $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ , гамильтониан /14/ можно записать так:

$$H\{S\} = \sum_{i=1}^N (u - g \sigma_i \sigma_{i+1}). \quad /31/$$

Снова следуя пунктам 6, и 7, разобьем набор  $S$  на два поднабора  $S_1$  и  $S'_1$ , таких что  $S_1$  содержит все нечетные, а  $S'_1$  все четные спиновые переменные:

$$S_1 = \{\sigma_{2i-1}\}, \quad S'_1 = \{\sigma_{2i}\} \quad (i = 1, 2, \dots, N/2).$$

В статсумме /14/, проведем суммирование по всем четным переменным. Тогда эффективный гамильтониан, определенный в /15/, имеет вид

$$H_1\{S_1\} = \sum_{i=1}^{N/2} (U_2 - g_2 \sigma_{2i-1} \sigma_{2i+1}), \quad /32/$$

в котором ренормированные константы задаются равенствами

$$\begin{aligned} U_2 &= 2u - \ln 2 - 2 \ln chg + \ln chg_2, \\ g_2 &= arth(th^2g). \end{aligned} \quad /33/$$

Подчеркнем, что эффективный гамильтониан /32/ имеет ту же операторную структуру, что и исходный гамильтониан /31/. Число констант связи сохраняется.

Рекуррентные соотношения /33/ переписываются значительно проще, если использовать обозначения

$$\begin{aligned} c &\equiv e^{-u} chg, & t &\equiv thg, \\ c_n &\equiv e^{-u_n} chg_n, & t_n &\equiv thg_n. \end{aligned} \quad /34/$$

Тогда /33/ эквивалентно

$$c_2 = 2c^2, \quad t_2 = t^2. \quad /35/$$

Проведем еще раз децимационную процедуру, переходя к цепочке с периодом 4а. Форма гамильтониана по-прежнему не меняется. А для перенормированных дважды констант находим

$$c_4 = 2c_2^2 = 2^3c^4, \quad t_4 = t_2^2 = t^4.$$

Еще раз удваивая период, так что межузельное расстояние становится равным 8а, получаем трижды перенормированный гамильтониан с константами, для которых

$$c_8 = 2^7c^8, \quad t_8 = t^8.$$

После  $k$  шагов децимации имеем

$$c_n = 2^{n-1}c^n, \quad t_n = t^n, \quad (n \equiv 2^k), \quad /36/$$

откуда для параметров  $k$  раз ренормированного гамильтониана следуют рекуррентные соотношения

$$u_n = nu - (n-1) \ln 2 - n \ln chg + \ln chg_n, \quad /37/$$

$$g_n = arth(th^n g).$$

Найдем теперь неподвижные точки преобразований /36/ и /37/. Согласно /36/

$$c^* = 2^{n-1}(c^*)^n, \quad t^* = (t^*)^n. \quad /38/$$

Отсюда для параметров неподвижных точек получаем

$$c^* = 0; \frac{1}{2}, \quad t^* = 0; 1. \quad /39/$$

Значение  $t^* = 0$  соответствует, в силу связи /34/, тривиальной неподвижной точке с  $g^* = 0$ . Для нетривиальной неподвижной точки находим

$$u^* = \infty, \quad g^* = \infty. \quad /40/$$

Эта точка определяет критическую температуру одномерной модели Изинга  $\theta_c = 0$ .

## 6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

На рассматриваемом примере точной реализации ренормгруппы исключительно наглядно проявляются некоторые общие свойства, обсуждавшиеся выше. Для того чтобы их проиллюстрировать, исследуем безразмерный термодинамический потенциал /26/, определяющий все основные термодинамические характеристики системы.

После  $k$ -кратной децимации одномерной модели Изинга эффективный гамильтониан принимает вид ряда

$$\begin{aligned} H_k\{S_k\} &= H_{1,2^{k+1}} + H_{2^{k+1},2^{k+1+1}} + \dots, \\ H_{i,j} &= U_{2^k} - g_{2^k} \sigma_i \sigma_j \equiv U_n - g_n \sigma_i \sigma_j, \end{aligned} \quad /41/$$

состоящего из  $N/2^k$  членов. При этом слагаемые, содержащие спиновые переменные, в пределе  $n \rightarrow \infty$  исчезают. Действительно, как видно из /37/, асимптотический по  $n \rightarrow \infty$  заряд стремится к нулю:

$$g_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad /42/$$

Таким образом, при любой конечной величине затравочного заряда  $g$  перенормированный заряд  $g_n$  становится достаточно малым для того, чтобы в более сложных случаях использовать теорию возмущений, как это делалось в пункте 1.

Множественная ренормировка, укрупняя масштаб системы и сглаживая флуктуации, приводит к тому, что исходный микроскопический гамильтониан  $H\{s\}$  асимптотически превращается в макроскопическую неоператорную величину. Этот эффект рассматривался в пункте 7. В данной ситуации /41/ и /42/ иллюстрируют сказанное, так как

$$H_k\{s_k\} = U_2 k \quad (k \rightarrow \infty). \quad /43/$$

Для термодинамического потенциала /26/, учитывая, что максимально возможный шаг перенормировки равен

$$\max k = \ell n N / \ell n 2,$$

получаем

$$y \approx U_2 k / 2^k \approx U_N / N \quad (N \rightarrow \infty). \quad /44/$$

Сравнивая /43/ и /44/, видим, что термодинамический потенциал пропорционален многократно перенормированному гамильтониану /см. пункт 7/.

В термодинамическом пределе

$$y = U - \ell n (2chg), \quad /45/$$

что совпадает с соответствующей величиной, вычисленной для цепочки Изинга в методе трансфер-матрицы.

## 7. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Как уже неоднократно упоминалось, исследование асимптотических свойств ренормгруппы вблизи неподвижной точки позволяет определить критические индексы для каждого из классов универсальности. Поясним это утверждение.

Допустим, ренормгруппа известна. Она может базироваться на рекуррентном соотношении

$$g_n = g_n(g),$$

как при децимационной процедуре, либо на непрерывном преобразовании

$$g(b) = \bar{g}(b, g),$$

как в методе Вильсона. Положим, нас интересует критическое поведение некоторой термодинамической функции /в зависимости от выбора заряда  $g$  это может быть теплоемкость, восприимчивость и т.д./

$$X \sim \frac{\partial y}{\partial g}, \quad /46/$$

являющейся производной от термодинамического потенциала

$$y = y(g_n(g))$$

или

$$y = y(\bar{g}(b, g)).$$

Общая схема нахождения критических индексов не зависит от того, какие ренормгрупповые преобразования рассматриваются, дискретные или непрерывные. Поэтому дальнейшие промежуточные выкладки будут записываться только для одного из них. Например, для децимационной процедуры

$$\frac{\partial y}{\partial g} = \frac{\partial y}{\partial g_n} \frac{\partial g_n}{\partial g}.$$

Вспоминая определение термодинамического потенциала

$$y = -\frac{1}{N} \ell n T z e^{-H_n},$$

в котором  $H_n$  -  $n$  раз перенормированный гамильтониан, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial g_n} &= \frac{1}{N} \left\langle \frac{\partial H_n}{\partial g_n} \right\rangle = \\ &= T z \frac{\partial H_n}{\partial g_n} e^{-H_n} / N T z e^{-H_n}. \end{aligned}$$

Для термодинамической функции /46/ получаем

$$X \sim \frac{1}{N} \left\langle \frac{\partial H_n}{\partial g_n} \right\rangle \frac{\partial g_n}{\partial g}. \quad /47/$$

Какой из сомножителей функции /47/ может приводить к особенностям вблизи критической точки?

Для обычных статистических систем, допускающих переход к термодинамическому пределу, справедливы условия

$$\|H_n\| \sim N \quad (N \rightarrow \infty),$$

$$0 < \frac{1}{N} \left\| \frac{\partial H_n}{\partial g_n} \right\| < \infty \quad (\forall N).$$

Поэтому сомножитель

$$\frac{1}{N} \left\langle \frac{\partial H_n}{\partial g_n} \right\rangle \sim A_c < \infty$$



определяет критическую амплитуду, не содержащую особенностей при асимптотическом приближении к критической точке. Стало быть, особенности могут появиться только у оставшегося сомножителя  $\partial g_n / \partial g$ .

Критическое поведение термодинамических функций характеризуется критическими индексами /см. пункт 3/. В данном случае для функции

$$\chi \sim \frac{\partial g_n(g)}{\partial g} (g - g^*) \quad /48/$$

критический индекс  $\lambda$  задается соотношением

$$\left( \frac{\partial g_n(g)}{\partial g} \right)_{g=g^*} \sim (\tau(g)^\lambda)_{\tau \rightarrow 0},$$

в котором

$$\tau(g) \equiv \frac{\theta - \theta_c(g)}{\theta_c(g)} \sim \frac{g - g^*}{g^*},$$

$\theta_c(g)$  - значение критической температуры.

Таким образом,

$$\chi \sim \tau(g)^\lambda \quad (\tau(g) \rightarrow 0). \quad /49/$$

а критический индекс определяется равенством

$$\lambda = \lim_{\tau(g) \rightarrow 0} \frac{\ln \chi}{\ln |\tau(g)|}.$$

Учтем /48/ и запишем выражения для критических индексов в случае обоих типов, как дискретных, так и непрерывных, ренормгрупповых процедур:

$$\lambda = \lim_{g \rightarrow g^*} \left( \ln \frac{\partial g_n(g)}{\partial g} \right) / \ln |\tau(g)|, \quad /50/$$

$$\lambda = \lim_{g \rightarrow g^*} \left( \ln \frac{\partial \bar{g}(b, g)}{\partial g} \right) / \ln |\tau(g)|,$$

здесь

$$\tau(g) \rightarrow 0 \quad (g \rightarrow g^*).$$

Формулы /50/ показывают, что для нахождения критических индексов действительно необходимо знать асимптотическое поведение ренормгрупповых преобразований вблизи неподвижной точки:

$$g_n(g) \approx g^* + \left( \frac{\partial g_n(g)}{\partial g} \right)_{g=g^*} \delta g,$$

$$\bar{g}(b, g) \approx g^* + \left( \frac{\partial \bar{g}(b, g)}{\partial g} \right)_{g=g^*} \delta g.$$

Именно такая асимптотическая линеаризация ренормгруппы определяет критическое поведение системы.

## 8. КРОССОВЕРНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

В пункте 5, объяснялось, что при классификации систем на классы универсальности важную роль играет тип взаимодействия. Но в сложных веществах может одновременно существовать несколько различных межчастичных потенциалов. Тогда возникает вопрос, к какому классу универсальности следует отнести такое вещество? В более развернутой форме можно задать три вопроса:

- 1/ какой тип взаимодействия определяет критическое поведение?
- 2/ что происходит, если взаимодействия различны по знаку?
- 3/ как осуществляется кроссовер от одного типа взаимодействия к другому?

В теории критических явлений кроссоверному поведению систем при переходе от одной предельной ситуации к другой всегда уделялось большое внимание. Например, Стинчкомб<sup>5, 6/</sup> исследовал кроссовер между изотропной моделью Гейзенберга и моделью Изинга, которая анизотропна. Кроссовер по параметру анизотропии для XY-модели в поперечном поле изучали Рей и Чакрабарти<sup>7/</sup>. Изучался также<sup>8/</sup> кроссовер между изотропным гейзенберговским и анизотропным поведением XY-модели при изменении внешнего магнитного поля. Стинчкомб<sup>9/</sup> рассмотрел кроссовер между одно- и двумерным поведением при включении взаимодействия между изинговскими цепочками, а также кроссовер между двумерными и трехмерными свойствами для слоистых гейзенберговских систем.

Напомним, что своеобразным кроссовером между размерностями пространства  $d=3$  и  $d=4$  является и обсуждавшееся в пункте 2  $\epsilon$ -разложение Фишера-Вильсона<sup>4/</sup>. Изменение критических свойств систем, изучаемых методом ренормгруппы, в зависимости от непрерывного значения размерности в интервале  $3 \leq d \leq 4$  подробно исследовалось Рудником и Нельсоном<sup>10/</sup> для модели Ландау-Гинзбурга-Вильсона и Рийпкема<sup>11/</sup> для модели Блюма-Капеля.

Кроссоверное поведение между дальнедействующими и близкодействующими моделями можно проанализировать на системах с потенциалами Джой-

са /см. пункт 5/, зависящими от межчастичного расстояния по закону  $J_{ij} \sim r_{ij}^{-(d+n)}$ . И критическая температура, и критические индексы в моделях с потенциалами Джойса являются непрерывными функциями параметра  $n (0 < n < 2)$ . Ренормгрупповой анализ такой модели проделал Сак<sup>12/</sup>.

Кроссовер, соответствующий изменению параметров гамильтониана или размерности пространства, надо отличать от кроссоверного поведения одной и той же модели при изменении температуры. В последнем случае вводится понятие эффективных критических индексов и изучается их зависимость от температуры /Рудник и Нельсон<sup>10/</sup>, Бейлин и Лав<sup>13/</sup>, Чокер и Геринг<sup>14/</sup>/. При проведении экспериментов на величины эффективных критических индексов, кроме температуры, влияют и другие внешние факторы /Чалый и др. /.

В данном пункте в качестве примера будет разобран кроссовер, при котором изменяются параметры гамильтониана так, что происходит непрерывный переход от близко- к дальнедействующей форме потенциалов. Комбинация двух таких форм взаимодействия для некоторых веществ вполне реалистична.

Рассмотрим одномерную модель Изинга с гамильтонианом

$$H = - \sum_{i,j=1}^N \Phi_{ij} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i \quad (s_i = \pm 1), \quad / 51/$$

в котором обменный интеграл состоит из двух слагаемых:

$$\Phi_{ij} = \nu I_{ij} + (1-\nu) J_{ij}; \quad / 52/$$

первое слагаемое отвечает взаимодействию ближайших соседей

$$I_{ij} = \begin{cases} I & ; i, j \text{ - ближайшие соседи,} \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad / 53/$$

а второе представляет собой потенциал Каца /см. пункт 5/, то есть удовлетворяет условиям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{ij} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} = J < \infty. \quad / 54/$$

В дальнейшем считается, что

$$I > 0, \quad J > 0. \quad / 55/$$

Константа  $\nu$  в / 52/ описывает относительный вклад короткодействия. Когда  $\nu = 1$ , взаимодействуют лишь ближайшие соседи; когда  $\nu = 0$ , система имеет чисто дальнедействующий характер; для  $\nu \neq 0, \nu \neq 1$  реализуется промежуточный вариант.

Впервые модель похожего типа была предложена Бейкером<sup>15/</sup>, рассмотревшим анизотропную модель Изинга с бесконечным дальнедействием в одном направлении и с взаимодействием ближайших соседей в двух направлениях. В дальнейшем модель, описываемую гамильтонианом / 51/ с взаимодействиями / 52/-/ 55/, будем также называть моделью Бейкера. Термодинамика аналогичных моделей для различных ситуаций была подробно исследована /Судзуки<sup>16/</sup>, Нэгл<sup>17/</sup>, Кислинский и Юкалов<sup>18,19/</sup>/. Были предложены и усложненные варианты. Так, Нэгл и Боннер<sup>20/</sup> добавили к гамильтониану / 51/ ступеньчатое внешнее поле, действующее в противоположных направлениях на четные и нечетные узлы. Теманн и Хее<sup>21/</sup> рассмотрели одномерную модель Изинга с ферромагнитным дальнедействием и антиферромагнитным взаимодействием между ближайшими и следующими за ближайшими соседями. Хее<sup>22/</sup> исследовал также линейную модель Изинга с близкодействующим отталкиванием и дальнедействующим притяжением, которое существовало только между четными узлами. Рассматривалась также изинговская цепочка с положительным дальнедействием /Лапушкин и Плечко<sup>23/</sup>/. Однако в такой модели фазовый переход отсутствует.

В нашем случае гамильтониан / 51/ с взаимодействием / 52/ принимает вид

$$H = -\nu I \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - (1-\nu) \sum_{ij} J_{ij} s_i s_j - B \sum_i s_i. \quad / 56/$$

Наша цель - исследовать изменения в критическом поведении системы при варьировании кроссоверного параметра  $\nu$ .

Вычисление термодинамического потенциала проводится в два этапа. Сначала воспользуемся тем, что в термодинамическом пределе дальнедействующая часть гамильтониана асимптотически эквивалентна приближению среднего поля /Лебовиц и Пенроуз<sup>24/</sup>, Боголюбов<sup>25/</sup>, Томпсон и Сильвер<sup>26/</sup>, Шумовский и Юкалов<sup>27/</sup>/. То есть справедливо следующее равенство:

$$y = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln Tz e^{-H/\theta} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Tz e^{-H_{app}/\theta}, \quad / 57/$$

в котором аппроксимирующий гамильтониан

$$H_{app} = -\nu I \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - 2(1-\nu) J \sigma \sum_i s_i + N(1-\nu) J \sigma^2 - B \sum_i s_i \quad / 58/$$

содержит средний спин

$$\sigma \equiv \langle s_i \rangle_{app} = \frac{Tz \exp(-H_{app}/\theta)}{Tz \exp(-H_{app}/\theta)}, \quad / 59/$$

и принята во внимание трансляционная инвариантность решетки.

Далее для одномерной модели с гамильтонианом / 58/ применяется процедура децимации /пункт 4/, строится точная полугруппа /пункт 5/ и находится термодинамический потенциал /пункт 6/, в данном случае имеющий вид

$$y = - \frac{\nu g - (1-\nu)\sigma^2}{T} - \ln \left\{ \operatorname{ch} \frac{2(1-\nu)\sigma+h}{T} + \left[ \operatorname{sh}^2 \frac{2(1-\nu)\sigma+h}{T} + \exp\left(-\frac{4\nu g}{T}\right) \right]^{1/2} \right\}, \quad / 60/$$

где

$$g \equiv \frac{I}{J}, \quad T \equiv \frac{\theta}{J}, \quad h \equiv \frac{B}{J}. \quad / 61/$$

Для параметра порядка / 59/ получаем

$$\sigma = \left[ \operatorname{sh}^2 \frac{2(1-\nu)\sigma+h}{T} + \exp\left(-\frac{4\nu g}{T}\right) \right]^{-1/2} \times \operatorname{sh} \frac{2(1-\nu)\sigma+h}{T}. \quad / 62/$$

Критическая температура определяется уравнением

$$T_c = T_c(\nu, g) = 2(1-\nu) \exp(2\nu g / T_c). \quad / 63/$$

Очевидно, что при  $\nu > 1$  это уравнение не имеет положительных решений. В короткодействующем пределе ( $\nu \rightarrow 1$ ) получаем тот же результат, что и в пункте 5:

$$T_c = 0 \quad (\nu = 1).$$

В дальнедействующем пределе ( $\nu \rightarrow 0$ ) имеем обычный результат теории среднего поля:

$$T_c = 2 \quad (\nu = 0).$$

Из уравнения / 63/ следует, что критическая точка отсутствует, если

$$\nu < \nu_0 < 0,$$

где

$$\nu_0 = - \frac{1}{ge-1} \quad (ge > 1). \quad / 64/$$

Ферромагнетизм в системе существует лишь при

$$\nu_0 < \nu < 1,$$

если  $ge > 0$ , если же  $ge \leq 1$ , то ферромагнетизм существует при всех  $\nu < 1$  - в этом случае следует положить  $\nu_0 \rightarrow -\infty$ .

Смена рода перехода со второго на первый происходит в трикритической точке, задаваемой уравнениями

$$\nu_t = - \frac{\ln 3}{4g} T_t, \quad / 65/$$

$$T_t = 2(1-\nu_t) \exp(2\nu_t g / T_t).$$

Появление этой точки обязано наличию в гамильтониане взаимодействий с разными знаками: антиферромагнитному близкоедействию и ферромагнитному дальноедействию.

В пункте 3, указывалось, что при подходе к трикритической точке критические индексы меняются скачком. Этот эффект очень наглядно иллюстрируется на рассматриваемой здесь простой модели с трикритической точкой:

$$\nu_t = \frac{\ln 3}{2\sqrt{3}g - \ln 3}, \quad T_t = \frac{4g}{2\sqrt{3}g - \ln 3}. \quad / 66/$$

Разлагая термодинамические функции по относительной температуре /1/, получаем асимптотические, при  $t \rightarrow -0$ , выражения для параметра порядка

$$\sigma \approx \begin{cases} 1.107(-\tau)^{1/4}, & \nu = \nu_t, \\ A_\sigma(-\tau)^{1/2}, & \nu > \nu_t, \end{cases} \quad / 67/$$

где критическая амплитуда

$$A_\sigma = \left[ \frac{6(T_c + 2\nu g)}{3T_c^2 - 4(1-\nu)^2} \right]^{1/2}.$$

Так же скачком изменяется и критический индекс теплоемкости

$$C_V \sim \begin{cases} (-\tau)^{-1/2}, & \nu = \nu_t, \\ \text{const}, & \nu > \nu_t. \end{cases} \quad / 68/$$

Критический индекс восприимчивости при этом сохраняется:

$$\chi \approx A_\chi(-\tau)^{-1} \quad (\nu \geq \nu_t), \quad / 69/$$

где соответствующая критическая амплитуда

$$A_x = \frac{T_c}{4(1-\nu)(T_c + 2\nu g)}$$

Таким образом, в отличие от обычной критической точки, в которой критические индексы теплоемкости ( $\alpha$ ), параметра порядка ( $\beta$ ) и восприимчивости ( $\gamma$ ) имеют классические значения:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1,$$

в трикритической точке они скачком заменяются на трикритические индексы

$$\alpha_t = \frac{1}{2}, \quad \beta_t = \frac{1}{4}, \quad \gamma_t = 1.$$

В обоих случаях неравенство Рашбрука выполняется как равенство

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 = \alpha_t + 2\beta_t + \gamma_t.$$

Кроссовер от критического к трикритическому поведению при изменении параметра  $\nu$  может оказаться немонотонным. Так, при  $g > 1$  кривая  $T_c(\nu)$  имеет максимум в точке

$$T_m = \frac{2g}{1 + \ln g}, \quad \nu_m = \frac{\ln g}{1 + \ln g} \quad / 70/$$

Немонотонно по  $\nu$  ведут себя также и критические амплитуды  $A_\sigma, A_x$ , значение энтропии в критической точке

$$S_c = \frac{4\nu(1-\nu)g}{T_c[T_c + 2(1-\nu)]} + \ln \left[ 1 + \frac{2(1-\nu)}{T_c} \right],$$

величина теплоемкости в критической точке справа

$$C_v^c \equiv \lim_{T \rightarrow T_c + 0} C_v = \frac{8\nu^2(1-\nu)g^2}{T_c[T_c + 2(1-\nu)]^2}$$

и скачок теплоемкости

$$\begin{aligned} \Delta C_v &\equiv \lim_{T \rightarrow T_c - 0} C_v - \lim_{T \rightarrow T_c + 0} C_v = \\ &= \frac{2(1-\nu)(T_c + 2\nu g)^2}{T_c[3T_c^2 - 4(1-\nu)^2]}. \end{aligned}$$

Теперь, после детального анализа этой модели, можно дать ответ на те вопросы, которые были сформулированы в начале данного пункта.

1. Критическое поведение определяется тем потенциалом, радиус действия которого больше. Это, конечно, не общая теорема, но эмпирический факт, проверенный на большом количестве моделей.

2. При разных по знаку потенциалах может появиться трикритическая точка. Более того, она должна появиться при определенном соотношении между интенсивностями конкурирующих потенциалов.

3. Кроссовер между разными типами взаимодействий может оказаться немонотонным по кроссоверному параметру. Это относится к неуниверсальным величинам, таким как критическая точка и критические амплитуды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юкалов В.И. - Сообщ. ОИЯИ, P17-88-601, Дубна, 1988.
2. Вильсон К., Когут Д. Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение. М., "Мир", 1975.
3. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М., "Мир", 1980.
4. Wilson K.G., Fisher M.E. - Phys.Rev.Lett., 1972, 28, p. 248.
5. Stinchcombe R.B. - J.Phys., 1980, C13, p. L133.
6. Stichcombe R.B. - J.Phys., 1980, C13, p. 3723.
7. Ray P., Chakranarti B. - Phys.Lett., 1983, 98A, p. 431.
8. Boucher J., Regnault L., Rossat - Mignod J., Villain J., Renard J. - Sol.State Comm., 1979, 31, p.311.
9. Stichcombe R.B. - J.Phys., 1980, C13, p. 5565.
10. Rudnick J., Nelson D. - Phys.Rev., 1976, B13, p. 2208.
11. Rijpkema J. - Phys.Rev., 1984, A29, p. 859.
12. Sak J. - Phys.Rev., 1973, B8, p. 281.
13. Bailin D., Love A. - J.Phys., 1977, C10, p. 3633.
14. Chalker J.T., Gehring G.A. - J.Phys., 1979, C12, p. 5545.
15. Baker G.A. - Phys.Rev., 1963, 130, p. 1406.
16. Suzuki M. - J.Phys.Soc.Jap., 1966, 21, p. 2140.
17. Nagle J.F. - Phys.Rev., 1970, A2, p. 2124.
18. Кислинский В.Б., Юкалов В.И. - ОИЯИ, P17-86-532, Дубна, 1986.
19. Kislinsky V.B., Yukalov V.I. - JINR, E17-86-535, Dubna, 1986.
20. Nagle J.F., Bonner J.C. - J.Chem.Phys., 1971, 54, p. 729.
21. Theumann W.K., Нюе J.S. - J.Chem.Phys., 1971, 55, p. 4159.
22. Нюе J.S. - Phys.Rev., 1972, B6, p. 4261.
23. Лапушкин С.С., Плечко В.Н. - ИТФ, 73-149Р, Киев, 1973.
24. Lebowitz J., Penrose O. - J.Math.Phys., 1966, 7, p. 98.
25. Боголюбов Н.Н. /мл./. Метод исследования модельных гамильтонианов. М., "Наука", 1974.
26. Thompson C., Silver H. - Comm.Math.Phys., 1973, 33, p. 53.
27. Shumovsky A.S., Yukalov V.I. - Physica, 1982, 110A, p. 518.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 августа 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

| Индекс | Тематика   |
|--------|--|
| 1.     | Экспериментальная физика высоких энергий   |
| 2.     | Теоретическая физика высоких энергий   |
| 3.     | Экспериментальная нейтронная физика  |
| 4.     | Теоретическая физика низких энергий  |
| 5.     | Математика   |
| 6.     | Ядерная спектроскопия и радиохимия   |
| 7.     | Физика тяжелых ионов   |
| 8.     | Криогеника   |
| 9.     | Ускорители   |
| 10.    | Автоматизация обработки экспериментальных данных   |
| 11.    | Вычислительная математика и техника  |
| 12.    | Химия  |
| 13.    | Техника физического эксперимента   |
| 14.    | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами   |
| 15.    | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях   |
| 16.    | Дозиметрия и физика защиты   |
| 17.    | Теория конденсированного состояния   |
| 18.    | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19.    | Биофизика  |