сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-88-601

В.И.Юкалов

РЕНОРМГРУППА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ – АНАЛИЗ ОБЩИХ ПРИНЦИПОВ

1988

ВВЕДЕНИЕ

Цель предлагаемой работы - изложить принципы ренормгруппового подхода в статистической физике. Обычно, в учебниках и обзорах на эту тему /Вильсон и Когут[1], Ма[2], Паташинский и Покровский[3], Ху[4]/ детально излагается один из известных вариантов метода ренормгруппы и анализируется его применение в различных конкреитных ситуациях. Существует три таких основных варианта: ренормгруппа в импульсном пространстве, ренормгруппа в реальном пространстве и полевая ренормгруппа. Отличие данной работы заключается в том, что внимание в ней сосредотачивается не на подробном рассмотрении одного из вариантов, а на анализе именно принципов подхода в целом, на выяснении основных положений, лежащих у истоков каждого из указанных трех вариантов, на выявлении общих черт и различий, достоинств и недостатков этих вариантов метода ренормгруппы. Говоря попросту, цель работы - максимально ясно,и по-возможности кратко,объяснить, откуда берется ренормгруппа, когда она применима и как устроены ее модификации. Разумеется, для того, чтобы прочувствовать тот или иной метод, нельзя обойтись без примеров. Они будут приводиться в тех случаях и в том объеме, где и сколько казалось необходимым для четкого изложения обсуждаемых вопросов. При написании работы постоянно приходилось решать минимаксную задачу относительно двух несовместимых, дополняющих друг друга, понятий - простота и точность. Чем более объяснения просты, тем они менее точны. И наоборот. Тем не менее, автор пытался следовать принципу: минимум подробностей и максимум ясности. Этот принцип является частным случаем более общего: минимум труда и максимум удовольствия, следовать которому в жизни так же трудно, как и в науке.

1. КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Под критическими явлениями понимаются особенности поведения системы в окрестности точки фазового перехода непрерывного типа по классификации Фишера-Стенли[5,6]. Точка такого перехода называется критической, потому что две термодинамические фазы становятся неразличнмыми в этой точке.

В критической области термодинамические функции статистических систем имеют особенности. Последние связаны с резким усилением флуктуаций. На простых примерах можно убедиться[7], что среднее число элементарных возбуждений при приближении к критической точке стремится к бесконечности.

Вообще говоря, по классификации Френкеля[8] все флуктуации делятся на гомофазные и гетерофазные. Первые связаны с вариациями параметра порядка в рамках одной термодинамической фазы, а вторые - с флуктуационным появлением зародышей одной фазы внутри другой. С динамической точки зрения гетерофазные флуктуации соответствуют квазисолитонам[9], отличающимся от истинных солитонов[10,11] конечным временем жизни. Существование гетерофазных флуктуаций надежно установлено экспериментально. Именно они приводят к возникновению своеобразных предпереходных явлений /Уббелоде[12]/. Отличительной чертой этих флуктуаций служит то, что они, как правило, происходят вблизи переходов первого рода. Статистическая теория гетерофазных флуктуаций представляет собой отдельную науку[13-16] и здесь излагаться не будет.

Далее будут рассматриваться только обычные критические явления, происходящие возле точек переходов непрерывного типа и обусловленные сильными гомофазными флуктуациями. Именно в этой ситуации оказался чрезвычайно плодотворным подход, основанный на применении ренормализационной группы. Данный подход, первоначально развитый в квантовой теории поля[17], при перенесении на статистическую физику был существенно модифицирован. В терминологии появилось даже разделение на полевую и статистическую ренормгруппы, настолько различны на первый взгляд их конкретные реализации, хотя и та, и другая ренормгруппы в идейном отношении являются различными проявлениями общего свойства функциональной автомодельности[18-20].

В свою очередь, статистическая ренормгруппа делится на ренормгруппу в импульсном пространстве[1-3] и на ренормгруппу в реальном пространстве[4]. Хотя эти два метода технически сильно отличаются друг от друга, их идейное содержание по сути одинаково[20,21]. Ренормгруппа в импульсном пространстве прекрасно работает в применении к непрерывным системам[1-3]. Для систем на решетке более удобна ренормгруппа в реальном пространстве, в особенности это относится к разбавленным магнетикам[22,23], моделям во внешнем поле со случайной величиной или направлением[24-27] и метастабильным фазам[28,29]. Ренормгруппа в реальном пространстве широко используется при формулировке квантовой теории поля на решетке[30]. Идеи этого метода ренормгруппы оказались очень плодотворными для улучшения компьютерных вычислений по методу Монте-Карло[31].

В других работах будут рассмотрены оба варианта статистической ренормгруппы, а также основы применения полевой ренормгруппы в теории критических явлений.

2. МУЛЬТИКРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

Критические точки, вообще говоря, бывают разных типов. Обычная критическая точка - это точка фазового перехода, в которой две фазы становятся неразличимыми. Если же в точке непрерывного фазового перехода сосуществуют несколько неразличимых термодинамических фаз, то такая точка называется мультикритической. Наиболее часто встречается трикритическая точка. Первоначально, следуя Ландау и Гриффитсу[32], под трикритической понимали именно такую точку, в которой три сосуществующие фазы становятся неразличимыми. Само название трикритической точки было предложено Гриффитсом[32,33]. В дальнейшем понятие трикритической точки было несколько расширено, так как было замечено, что в этой точке не обязательно должны реально сосуществовать три фазы, достаточно лишь, чтобы они могли сосуществовать в принципе, при наложении, например, некоторых внешних полей. Но во всех случаях трикритическая точка является конечной точкой для линий перехода второго рода, отделяющей их от линии перехода первого рода. Поэтому в настоящее время общепринятым определением трикритической точки служит следующее. Трикритическая точка - это точка, в которой непрерывный фазовый переход становится разрывным. Это определение применяется вне зависимости от числа термодинамических фаз, сосуществующих в данной точке.

Трикритические точки наблюдались экспериментально при фазовых переходах в смеси He^3-He^4, в других многокомпонентных жидкостях, при структурных и ориентационных переходах, при магнитных переходах в магнетиках с анизотропией и со спин-фононным взаимодействием, а также в метамагнетиках. Поведение таких систем в трикритической точке существенно отличается от обычного критического поведения[34-37]. Применение метода ренормгруппы для описания трикритических явлений также обладает рядом специфических особенностей[38-40]. Вот почему такие точки всегда надо отличать от обычных критических. Хороший обзор теории трикритических точек был дан Лоури и Сарбачем[41].

3. КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Асимптотическое поведение систем в критической области, при стремлении температуры θ к критическому значению θ_c, удобно анализировать, вводя относительное температурное отклонение

$$\tau \equiv (\theta - \theta_c)/\theta_c \to \pm 0 , \qquad /1/$$

соответственно подходу к θ_c справа или слева. Термодинамические функции в окрестности критической точки принято характеризовать критическими индексами, являющимися степенными показателями в выражениях для теплоемкости

$$C_B \sim \begin{cases} (-\tau)^{-\alpha'} , & \theta < \theta_c , \\ \tau^{-\alpha} , & \theta > \theta_c , \end{cases} \qquad /2/$$

намагниченности /или иного параметра порядка/

$$M \sim \begin{cases} (-\tau)^{\beta'} , & \theta < \theta_c , \\ \tau^{\beta} , & \theta > \theta_c , \end{cases} \qquad /3/$$

восприимчивости

$$\chi \sim \begin{cases} (-\tau)^{-\gamma'} , & \theta < \theta_c , \\ \tau^{-\gamma} , & \theta > \theta_c , \end{cases} \qquad /4/$$

магнитного поля как функции намагниченности

$$B \sim M^{\delta} , \quad \theta = \theta_c , \qquad /5/$$

корреляционной длины

$$\xi \sim \begin{cases} (-\tau)^{-\nu'} , & \theta < \theta_c , \\ \tau^{-\nu} , & \theta > \theta_c , \end{cases} \qquad /6/$$

и для корреляционной функции

$$K \sim r^{-(d-2+\eta)} , \quad \theta = \theta_c , \qquad /7/$$

где d - размерность пространства. Эти критические индексы наиболее важны, хотя в дополнение к ним можно задать и еще несколько[6]. Асимптотики /2/-/7/ показывают, что в критической области термодинамические функции удовлетворяют условию однородности при масштабных преобразованиях своих аргументов. Эта однородность носит название скейлинга.

Часто считают, что кроме скейлинга справедливо предположение о гиперскейлинге, согласно которому выполняются равенства

$$\alpha = \alpha' , \quad \beta = \beta' , \quad \gamma = \gamma' , \quad \nu = \nu' , \qquad /8/$$

обозначающие симметричность асимптотик вблизи критической точки, а также равенства

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 , \quad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2 , \qquad /9/$$
$$\gamma = \beta(\delta - 1) , \quad \gamma = (2-\eta)\nu , \quad \alpha + \nu d = 2 ,$$

основанные на термодинамических соображениях[6]. Из пяти соотношений /9/ четыре независимы. Значит, из шести критических индексов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta$ независимы только два - остальные выражаются через них.

В случае мультикритических явлений гиперскейлинг отсутствует. Скейлинговые соотношения /3/-/7/ остаются в силе, однако при подходе вдоль критической линии к мультикритической точке критические индексы меняются скачком.

4. ГИПОТЕЗА УНИВЕРСАЛЬНОСТИ

Если все критические индексы одинаковы для нескольких различных систем, то говорят, что эти системы критически эквивалентны между собой, а набор критических индексов называется совокупностью универсальных величин. Иногда в эту совокупность включают еще отношения некоторых критических амплитуд, характеризующих поведение выше и ниже критической точки. Однако в совокупность универсальных величин невозможно включить все критические характеристики. Абсолютные значения критических амплитуд для разных систем сильно отличаются друг от друга. И такая важная критическая величина как температура перехода, отражающая детали микроскопических взаимодействий, также не может быть универсальной. Таким образом, универсальность критического поведения - это понятие ограниченное, сводящееся в основном к совпадению критических индексов.

Первоначально предложение об универсальности критического поведения базировались на результатах теории среднего поля Кюри-Вейса. В этой теории все соответствующие критические индексы одинаковы для любых физических систем. То есть существует полная универсальность. Прекрасное изложение теории среднего поля можно найти в книге Браута[42]. Метод Ландау[43], являющийся частным случаем теории среднего поля, тоже, конечно, согласуется с полной универсальностью всех систем. В этом методе свободная энергия представляется в виде разложения по параметру порядка

$$F \simeq F_0 + F_2 M^2 + F_4 M^4 \qquad (M \ll 1 , \ \theta \leq \theta_c) , \qquad /10/$$

что справедливо вблизи критической точки. Полагая далее $(F-F_0)/F_2 \sim \tau$, несложно найти

$$M \sim (-\tau)^{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Значение критического индекса $\beta = \frac{1}{2}$ не зависит от конкретной системы.

Разложение Ландау /10/ имеет смысл, только если флуктуации в системе не слишком велики. Условием его применимости служит критерий Гинзбурга[44]

$$Gi \ll |\tau| \ll 1,$$

в котором число Гинзбурга

$$Gi = \left(\frac{r_{int}}{r_{cor}} \right)^{6} \sim |\tau|^{(d-4)/2},$$

здесь r_{int} - радиус взаимодействия, r_{cor} - минимальный корреляционный радиус, то есть корреляционная длина вдалеке от критической точки.

Из критерия Гинзбурга следует, что при размерности пространства больше четырех $(d>4)$ критические индексы определяются по теории среднего поля. Если же $d<4$, то в непосредственной близости от критической точки разложение Ландау теряет смысл. Размерность $d=4$ является маргинальной и требует отдельного рассмотрения.

5. КЛАССЫ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ

Эксперимент, однако, не подтвердил категоричного вывода теории самосогласованного поля о полной универсальности всех систем. Оказалось, что их критическое поведение может быть существенно различным. В то же время выяснилось, что имеются группы веществ с достаточно близкими критическими индексами, так что в пределах ошибок эксперимента их можно считать одинаковыми. Так возникло понятие классов универсальности.

Класс универсальности - это множество критически эквивалентных систем, то есть систем с одной и той же совокупностью критических величин.

Теоретический анализ показал, что имеются некоторые общие характеристики каждой системы, такие что при совпадении всех характеристик нескольких систем последние принадлежат одному классу универсальности, тогда как системы из разных классов универсальности отличаются хотя бы одной из этих характеристик. Имеется пять главных характеристик класса универсальности:

1/ размерность системы;

2/ число компонент параметра порядка;

3/ тип межатомных сил взаимодействия /близкодействие или дальнодействие/;

4/ наличие анизотропии взаимодействия, то есть его зависимости от углов;

5/ трансформационные свойства параметра порядка.

В зависимости от радиуса действия межатомных сил потенциалы делятся на три основные группы.

1/ Потенциалы Каца. Эти потенциалы соответствуют бесконечному дальнодействию и удовлетворяют условиям, которые для решетки из N узлов имеют вид

$$\lim_{N\to\infty} J_{ij} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i,j}^{N} J_{ij} = const.$$

Для непрерывной системы эти же условия записываются так:

$$\lim_{N\to\infty} J(\vec r, \vec r\,') = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\rho^2}{N^2} \int J(\vec r, \vec r\,')\, d\vec r\, d\vec r\,' = const,$$

где ρ - плотность системы, N - среднее число частиц, под $\lim_{N\to\infty}$ подразумевается термодинамический предельный переход

$$N \to \infty, \quad V \to \infty, \quad \rho = \frac{N}{V} \to const.$$

В обоих случаях потенциалы J_{ij} и $J(\vec r, \vec r\,')$ зависят от числа частиц N, но для краткости эта зависимость явно не указана.

Модели с потенциалами Каца в термодинамическом пределе допускают асимптотически точные решения, эквивалентные теории среднего поля[45].

2/ Потенциалы Джойса. Описывают умеренное дальнодействие и имеют вид

$$J_{ij} = J\left(\frac{a}{|\vec r_{ij}|} \right)^{d+n} \quad (0<n<2), \quad \vec r_{ij} \equiv \vec r_i - \vec r_j.$$

Этот тип потенциалов был детально исследован Джойсом[46]. Модели с такими потенциалами не обладают универсальностью, так как критические индексы зависят от n.

3/ Близкодействующие потенциалы. К ним относятся потенциалы с конечным радиусом действия, например со взаимодействием ближайших соседей или соседей, следующих за ближайшими, или других более отдаленных соседей вплоть до фиксированной координационной сферы. К этому же виду потенциалов принадлежат экспоненциальные потенциалы

$$J(\vec r - \vec r\,') = J \exp\left(- \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{r_0} \right)$$

с конечной величиной r_0, а также степенные потенциалы с достаточно быстрым убыванием,

$$J_{ij} = J\left(\frac{a}{|\vec r_{ij}|} \right)^{d+n} \quad (n>2).$$

Модели с близкодействующими потенциалами обычно хорошо классифицируются по классам универсальности.

Несколько особняком стоит дипольный потенциал, имеющий вид матрицы в пространстве декартовых индексов,

$$\hat{J}_{ij} = J \left(\frac{a}{|\vec{r}_{ij}|} \right)^d \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{r_{ij}^{\alpha} r_{ij}^{\beta}}{|\vec{r}_{ij}|^2} \right].$$

Критические индексы в случае моделей с таким потенциалом, с точностью до логарифмических поправок, те же, что и у моделей с близкодействующими потенциалами. Этот неожиданный факт обязан анизотропии дипольного потенциала.

Подчеркнем, что разбиение систем на классы универсальности относится к обычным критическим явлениям. Эта классификация нарушается в мультикритических точках.

Кроме того, если к системе добавляются некоторые дополнительные степени свободы, например примеси, фононные флуктуации или другие, по выражению Фишера[47], скрытые переменные, то критические индексы меняются.

Сравнение теоретических значений критических индексов с экспериментальными затруднено из-за того, что на результаты измерений оказывают существенное влияние различные, не всегда хорошо контролируемые внешние поля, дефекты образца, всевозможные методические ограничения и т.п. Поэтому критические индексы, аппроксимирующие экспериментальные данные, обнаруживают зависимость от температурной переменной τ, локального значения параметра порядка, геометрических размеров исследуемого объема и других факторов. Следовательно, измеряемые критические индексы в действительности являются эффективными индексами, сравнивать которые с индексами идеальных математических моделей надо с большой осторожностью. Наиболее полное исследование проблемы эффективных критических индексов было, по-видимому, проведено Чалым с сотрудниками[48-50].

Таким образом, к разделению систем на классы универсальности, строго говоря, следует относиться как к эмпирическому факту. При описании критического поведения реальных систем обычно предполагают и используют идею универсальности, а не доказывают ее справедливость. Само же существование универсальности внутри каждого класса интерпретируется следующими физическими соображениями: при приближении к критической точке корреляционная длина стремится к бесконечности, а основной вклад в вычисляемые величины вносят длинноволновые флуктуации, следовательно, мелкомасштабная структура системы не важна. Но это все-таки только наводящие соображения. Не существует общей теоремы, которая позволяла бы всякую наперед заданную систему причислить к тому или иному классу универсальности. Более того, известны модели, например Бэкстера[51] или Джойса[46], для которых понятие универсальности не имеет смысла.

Однако для многих систем наличие классов универсальности подтверждается и теоретическими вычислениями, и экспериментальными измерениями. Поэтому гипотеза универсальности служит хорошим рабочим инструментом. Ее принятие значительно упрощает проблему, так как когда надо вычислить лишь универсальные величины, соответствующие критическому поведению некоторой конкретной системы, то это можно сделать, изучая свойства самой простой модели, представляющей класс универсальности, к которому принадлежит интересующая нас система. То что мы приобретаем право моделировать поведение очень сложных систем очень простыми гамильтонианами, является главным достоинством гипотезы универсальности. Расплата за применение этого подхода заключается в том, что мы отказываемся от возможности доказать существование универсальности априори и оказываемся не в состоянии определить неуниверсальные величины для рассматриваемой системы.

6. КОНЦЕПЦИЯ КАДАНОВА

Допустим, задан гамильтониан модели из интересующего нас класса универсальности. Свойства системы вблизи критической точки рассчитать сложно из-за сильных крупномасштабных флуктуаций, нарушающих применимость обычных приближений. Напротив, в системе вне критической области флуктуации слабы и можно воспользоваться обычными аппроксимациями, например, одним из вариантов теории возмущений. Отсюда вытекает следующая идея: хорошо бы связать физические свойства системы вблизи критической точки со свойствами подобной системы, далекой от критического состояния.

Эту идею можно реализовать с помощью блочного построения Каданова[52], проведенного им для решетки со стороной a. Схема построения такова. Разобьем системы на блоки со стороной ab так, чтобы внутри каждого блока содержалось много узлов, $b \gg 1$. От узельных переменных гамильтониана перейдем к меньшему числу блочных переменных. Преобразованная таким образом система соответствует укрупнению масштаба:

$$a \to ab \gg a. \qquad /11/$$

При этом отношение корреляционной длины к постоянной решетки уменьшается:

$$\frac{\xi}{a} \to \frac{\xi}{ab} \ll \frac{\xi}{a}. \qquad /12/$$

Но это отношение и служит как раз мерой близости системы к критической точке. Система приближается к последней, когда ξ/a возрастает.

Следовательно, переход к системе с укрупненной решеткой означает удаление от критической точки.

Каданов проводил масштабные преобразования для решетки в реальном пространстве, каждому узлу сопоставлялась спиновая переменная. Однако эквивалентная процедура может быть распространена на любые системы в произвольном пространстве. Общая схема может быть формализована следующим образом.

Допустим, система с гамильтонианом H характеризуется набором некоторых переменных S. Удобно определить безразмерный гамильтониан

$$H\{s\} = H/\theta . \qquad /13/$$

Статистическая сумма, описывающая термодинамику системы, имеет вид

$$Z = \underset{s}{Tr}\ exp\ (-H\{s\}). \qquad /14/$$

Разобьем набор S на два поднабора:

$$S = \{s_1, s_1'\} .$$

Введем эффективный гамильтониан $H_1\{s_1\}$ с помощью соотношения

$$exp\,(-H_1\{s_1\} = \underset{s_1'}{Tr}\ exp\,(-H\{s_1, s_1'\}). \qquad /15/$$

Тогда статсумма /14/ принимает вид

$$Z = \underset{s_1}{Tr}\ exp\,(-H_1\{s_1\}). \qquad /16/$$

Теперь набор переменных s_1 разобьем на два поднабора:

$$s_1 = \{s_2, s_2'\}$$

Зададим новый эффективный гамильтониан $H_2\{s_2\}$ равенством

$$exp\,(-H_2\{s_2\}) = \underset{s_2'}{Tr}\ exp\,(-H_1\{s_2, s_2'\} .$$

При этом для статсуммы /16/ получаем

$$Z = \underset{s_2}{Tr}\ exp\ (-H_2\{s_2\}).$$

Продолжая далее процедуру последовательного разбиения переменных на поднаборы и суммирования по одному из поднаборов, на n - м шаге имеем

$$Z = \underset{s_n}{Tr}\ exp\ (-H_n\{s_n\}), \qquad /17/$$

где n раз ренормированный гамильтониан

$$H_n\{s_n\} = -\ell n\ \underset{s_n'}{Tr}\ exp\,(-H_{n-1}\{s_n, s_n'\}). \qquad /18/$$

Соотношения типа /15/ и /18/ называются рекуррентными. Переход посредством рекуррентных соотношений от исходного гамильтониана /13/ к гамильнониану /18/ означает переход к менее критической системе со сглаженными флуктуациями.

Определим оператор $R[s_n']$, действующий на функции штрихованных переменных

$$\varphi \equiv \varphi(\ldots s_n' \ldots)$$

согласно правилу

$$R[s_n']\varphi = -\ell n\ \underset{s_n'}{Tr}\ e^{-\varphi} . \qquad /19/$$

Используя это определение, соотношение /13/ можно переписать в форме

$$H_1\{s_1\} = R[s_1']H\{s_1, s_1'\}. \qquad /20/$$

Процедура получения эффективного гамильтониана из исходного называется преобразованием Каданова.

7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА

Концепция Каданова, заключающаяся в укрупнении масштаба системы с одновременным преобразованием гамильтониана, и составляет основу статистической ренормгруппы. Для окончательной формулировки сути этой ренормгруппы остается сделать только один шаг - исследовать свойство оператора ренормировки /19/.

Этот оператор позволяет записать рекуррентные соотношения /18/ в виде

$$H_n\{s_n\} = R[s_n']H_{n-1}\{s_n, s_n'\} \qquad (n > 1). \qquad /21/$$

Определим двойное преобразование

$$R[s_m', s_n']\varphi = -\ell n\ \underset{s_m'}{Tr}\ \underset{s_n'}{Tr}\ e^{-\varphi} \qquad /22/$$

и тождественное преобразование

$$R[0] = 1 . \qquad /23/$$

Вследствие определений /19/ и /22/ выполняются равенства

$$R[s_m', s_n'] = R[s_m']R[s_n'] = R[s_n']R[s_m'] , \qquad /24/$$

показывающие, что множество операторов $R[s_n']$ образует коммутативную полугруппу. Подчеркнем, что это именно полугруппа, а не группа, так как обратное преобразование не определено. Свойства оператора ренормировки позволяют переписать эффективный, или ренормированный, гамильтониан, задаваемый рекурретным соотношением /21/, в форме последовательных преобразований Каданова

$$H_n\{S_n\} = R[S'_n]\,R[S'_{n-1}]\ldots R[S'_1]\,H\{S\}\,. \qquad /25/$$

Полугруппа абелевых преобразований $R[S'_n]$ это и есть, то что называют статистической ренормгруппой.

Термодинамические характеристики системы определяются как производные от термодинамического потенциала. Удобно использовать безразмерный потенциал

$$y = -\frac{1}{N}\ln Z \qquad (N\to\infty)\,, \qquad /26/$$

в котором N - среднее число частиц в системе. Потенциал /26/ связан с удельной свободной энергией равенством

$$f = \theta y = F/N\,.$$

Из выражений для статистической суммы /17/ и оператора ренормировки /19/ следует, что

$$y = \frac{1}{N}\,R[S]\,H\{S\}\,. \qquad /27/$$

Кроме того, /16/ дает

$$y = \frac{1}{N}\,R[S_1]\,H_1\{S_1\}\,, \qquad /28/$$

а согласно /17/

$$y = \frac{1}{N}\,R[S_n]\,H_n\{S_n\}\,. \qquad /29/$$

Подставляя сюда ренормированный гамильтониан /25/, получаем

$$y = \frac{1}{N}\,R[S_n]\,R[S'_n]\,R[S'_{n-1}]\ldots R[S'_1]\,H\{S\}\,. \qquad /30/$$

Итак, последовательность преобразований Каданова, укрупняя масштаб системы и сглаживая флуктуации, трансформирует исходный микроскопический гамильтониан $H\{S\}$, приближая его по свойствам к макроскопической величине, пропорциональной термодинамическому потенциалу /26/.

8. ИМПУЛЬСНЫЙ СКЕЙЛИНГ

Уточним характер ренормгрупповых преобразований в случае импульсного пространства, когда гамильтониан $H\{\varphi\}$ является функционалом от полей

$$\varphi = \varphi(\vec{k})\,, \quad 0 < |\vec{k}| < \Lambda\,, \qquad /31/$$

где $\vec{k}$ - вектор d-мерного пространства, Λ - константа ультрафиолетового обрезания. Статистическая сумма записывается как функциональный интеграл

$$Z = \int \exp(-H\{\varphi\})\,\mathcal{D}[\varphi]\,. \qquad /32/$$

Выделим две области волновых векторов:

$$0 < |\vec{k}| < \Lambda/b\,; \quad \Lambda/b < |\vec{k}| < \Lambda\,, \qquad /33/$$

здесь $b > 1$ - произвольная величина, имеющая смысл масштабного множителя. Соответственно областям /33/ поле /31/ разбивается на два типа полей:

$$\varphi(\vec{k}) = \begin{cases} \varphi^{<}(\vec{k})\,, & |\vec{k}| < \Lambda/b\,, \\ \varphi^{>}(k)\,, & |k| > \Lambda/b\,. \end{cases} \qquad /34/$$

При этом континуальный интеграл /32/ становится двойным, так как

$$\mathcal{D}[\varphi] = \mathcal{D}[\varphi^{<}]\,\mathcal{D}[\varphi^{>}]\,. \qquad /35/$$

Эффективный гамильтониан определяется соотношением

$$\exp[-H(b,\{\varphi^{<}\})] = \int \exp(-H\{\varphi\})\,\mathcal{D}[\varphi^{>}]\,. \qquad /36/$$

После интегрирования по полям с большими волновыми векторами статсумма /32/ принимает вид

$$Z = \int \exp[-H(b,\{\varphi^{<}\})]\,\mathcal{D}[\varphi^{<}] \qquad /37/$$

В выражении /37/ удобно изменить масштаб векторов обратного пространства, чтобы они снова находились в интервале от нуля до Λ, то есть сделать замену $\vec{k}\to b\vec{k}$, и одновременно ренормировать поле,

$$\varphi^{<}(\vec{k}) \to \zeta\varphi(\vec{k}) \qquad (\vec{k}\to b\vec{k})\,, \qquad /38/$$

где ζ - произвольный масштабный фактор, значение которого будет выбрано позднее. Вместо /37/ получаем статсумму

$$Z = \int I(\zeta)\,\exp[-H(b,\{\varphi\})]\,\mathcal{D}[\varphi]\,, \qquad /39/$$

в которой $I(\zeta)$ - якобиан преобразования /38/.

Действие элемента ренормализационной группы $R(b)$, определяемое заданием эффективного гамильтониана в соотношении /36/ и преобразованием /38/, символически записывается как

$$R(b)\,H\{\varphi\} = H(b,\{\varphi\})\,. \qquad /40/$$

Для единичного элемента ренормгруппы имеем

$$R(1) = 1\,, \quad H(1,\{\varphi\}) = H\{\varphi\}\,.$$

9. ТРАЕКТОРИИ ГАМИЛЬТОНИАНА

Применение действия ренормгруппы порождает непрерывную последовательность эффективных гамильтонианов/40/. Образно говоря, эффективный гамильтониан движется вдоль траектории, параметризованной масштабным множителем b. Так как действие ренормгруппы имеет свойства полугруппы

$$R(b_1)R(b_2) = R(b,b_2), \qquad /41/$$

то ее повторное применение порождает такую же последовательность эффективных гамильтонианов, как и единичное применение ренормгруппы с соответствующей последовательностью значений множителя b. Следовательно, траектории параметризуются так, что множитель b возрастает вдоль направления движения.

Интегрирование по полям с большими $|k|$ приводит к образованию системы, у которой масштаб реального пространства возрастает в b раз, то есть происходит кадановское укрупнение масштаба /11/. При этом безразмерная корреляционная длина

$$\bar{\xi} = \xi/a, \qquad /42/$$

согласно /13/, уменьшается в b раз. Поэтому траектории гамильтониана можно интерпретировать как линии, соответствующие уменьшающейся безразмерной корреляционной длине. Таким образом, при движении вдоль траектории эффективный гамильтониан становится менее критичным, то есть описывающим систему в менее критическом состоянии, чем его предшественники, расположенные выше по течению.

Очень важно подчеркнуть следующий факт. Форма исходного гамильтониана при движении вдоль траектории не сохраняется. Так, например, допустим, исходный гамильтониан имеет вид полинома четвертой степени по полям, то есть отвечает теории поля φ^4. Коэффициенты при каждой степени поля определяют константы связи. В данном случае набор констант связи состоит из двух параметров

$$\{g\} = \{g_2, g_4\}. \qquad /43/$$

В результате ренормгруппового преобразования $R(b)$ эти константы перенормируются:

$$g_2 \to g_2(b), \quad g_4 \to g_4(b). \qquad /44/$$

Но кроме того, появляется бесконечный ряд членов, не содержавшихся в исходном гамильтониане. Условно говоря, происходит размножение двух начальных констант связи в бесконечный набор параметров:

$$\{g_2, g_4\} \to \{g_2(b), g_4(b), g_6(b), \ldots\}. \qquad /45/$$

Этот аспект действия ренормгруппы в существенной степени обесценивает упрощения, которые можно получить с помощью соображений, основанных на

универсальности. Размножение констант связи представляет собой главное препятствие при практических вычислениях методом ренормгруппы. Вычисления становятся возможными только в тех случаях, когда линии потока в пространстве параметров $\{g(b)\}$ лежат на гиперплоскости конечной размерности. Попросту говоря, когда число ренормированных параметров остается конечным.

Существует лишь несколько простых моделей, для которых ренормированный набор констант связи конечен, и возможна точная реализация ренормгрупповых преобразований. Среди этих моделей - одномерная модель Изинга, которую мы рассмотрим позже. В остальных случаях статистическую ренормгруппу удается реализовать лишь приближенно, ограничивая число параметров эффективного гамильтониана /40/. Так, в примере /45/ можно просто выбросить все слагаемые, содержащие поля выше, чем в четвертой степени. Основанием для такого выбрасывания служит то, что некоторые траектории гамильтониана обладают особыми свойствами, которые мы обсудим в следующем пункте.

10. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

В результате ренормгруппового преобразования /40/ исходный, физический гамильтониан $H\{\varphi\}$, характеризуемый набором констант связи $\{g\}$, образует непрерывную последовательность эффективных гамильтонианов $H(b, \{\varphi\})$, характеризуемых ренормированными параметрами $\{g(b)\}$. Новые константы связи являются функциями исходных параметров и масштабного множителя:

$$g(b) = \bar{g}(b, g). \qquad /46/$$

Уравнения типа /46/ представляют собой рекуррентные соотношения для констант связи в пространстве, в котором происходит движение гамильтониана. Ренормгрупповое уравнение для безразмерной корреляционной длины /42/, рассматриваемой как функционал от соответствующего гамильтониана, имеет вид

$$\bar{\xi}[H(b, \{\varphi\})] = b^{-1}\bar{\xi}[H\{\varphi\}]. \qquad /47/$$

Уравнения /46/ и /47/ дополняются очевидными начальными условиями

$$\bar{g}(1,g) = g(1) = g, \quad \bar{\xi}[H\{\varphi\}] = \xi/a.$$

В пределе многих применений преобразования $R(b)$ или, что то же самое, при больших b из множества возможных траекторий гамильтониана наиболее интересной является та, которая имеет конечную точку. Такая точка называется неподвижной точкой ренормгруппового преобразования. В этом случае эффективный гамильтониан H^* удовлетворяет условию инвариантности

$$R(b)H^* = H^*. \qquad /48/$$

Неподвижная точка в пространстве констант связи определяется равенством

$$\bar{g}(b, g^*) = g^*. \qquad /49/$$

Имеется два типа неподвижных точек, что вытекает из преобразования корреляционной длины. Так, применяя повторно ренормгрупповую операцию к уравнению /47/, имеем

$$\bar{\xi}[H(bb', \{\varphi\})] = b^{-1}\bar{\xi}[H(b', \{\varphi\})].$$

Отсюда при $b' \to \infty$ в неподвижной точке получаем

$$\bar{\xi}[H^*] = b^{-1}\bar{\xi}[H^*]. \qquad /50/$$

Масштабный фактор b здесь произволен, поэтому из уравнения /50/ следует, что корреляционная длина в неподвижной точке либо равна нулю, либо бесконечна:

$$\bar{\xi}[H^*] = 0;\ \infty.$$

Следовательно, эффективный гамильтониан в неподвижной точке может быть либо абсолютно некритическим, либо точно критическим.

Некритическая неподвижная точка называется тривиальной.

В пункте 9 объяснялось, что траектории гамильтониана являются линиями уменьшения корреляционной длины. Тривиальная неподвижная точка, отвечающая $\bar{\xi}[H^*] = 0$, является аттрактором. И только в том случае, когда исходный гамильтониан сам является критическим, то есть ему соответствует бесконечная корреляционная длина, его траектория может окончиться в нетривиальной неподвижной точке. Такую траекторию, соединяющую начальную критическую точку с неподвижной критической точкой при движении гамильтониана, можно назвать критической траекторией.

Критическая неподвижная точка, в направлении к которой движется эффективный гамильтониан вдоль критической траектории, должна, вместе с последней, представлять класс универсальности физического гамильтониана, так как каждая неподвижная точка определяет свойственное ей критическое поведение системы. Для обоснования универсальности критического поведения необходимо провести глобальный анализ совокупности всех траекторий, порождаемых ренормгрупповым преобразованием. Такой анализ должен установить, что существует только одна достижимая критическая неподвижная точка для любого выбранного класса универсальности, к которой направлены все траектории критического движения. Однако указанная программа, за исключением нескольких простейших систем, практически невыполнима.

Обычный подход, используемый в ренормгрупповых вычислениях, состоит в поиске какой-либо одной критической неподвижной точки. После чего

делается предположение, что эта неподвижная точка, если она существует, единственна. Критическое поведение класса универсальности определяют, рассматривая траекторию, началу которой соответствует некоторый близкий к критическому состоянию гамильтониан.

Таким образом, гипотезу универсальности в методе ренормгруппы используют, а не доказывают.

Зато удается убедиться в том, что с приближением к неподвижной точке ренормгруппу можно реализовать асимптотически точно. Действительно, в самой неподвижной точке, согласно /48/, эффективный гамильтониан не меняет своего вида при действии преобразования $R(b)$. Значит вблизи неподвижной точки форма гамильтониана должна меняться асимптотически мало при его движении по критической траектории. Поэтому размножение констант связи, обсуждавшееся в пункте 9, не настолько опасно. В окрестности неподвижной точки число этих констант можно ограничить, отбрасывая те слагаемые гамильтониана, которые искажают его форму при ренормгрупповом преобразовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильсон К., Когут Д. Ренормализационная группа и ε-разложение. М., "Мир", 1975.
2. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М., "Мир", 1980.
3. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М., "Наука", 1982.
4. Hu B. - Phys.Rep., 1982, 91, p. 233.
5. Фишер М. Природа критического состояния. М., "Мир", 1968.
6. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. М., "Мир", 1973.
7. Шумовский А.С., Юкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. Дубна, ОИЯИ Р17-85-676, 1985.
8. Френкель Я.И. Статистическая физика. М., АН СССР, 1948.
9. Makhankov V.G. - Phys.Rep., 1978, 35, p. 1.
10. Faddeev L.D., Korepin V.E. - Phys.Rep., 1978, 42, p. 1.
11. Thornhill S., Ter Haar D. - Phys.Rep., 1978, 43, p. 43.
12. Ubbelohde A.R. Molten State of Matter. New York, Wiley, 1978.
13. Юкалов В.И. - ТМФ, 1976, 26, с. 403.
14. Yukalov V.I. - Physica, 1981, 108A, p. 402.
15. Yukalov V.I. - Phys.Rev., 1985, B32, p. 436.
16. Yukalov V.I. - Physica, 1987, 141A, p. 352.
17. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1973.
18. Ширков Д.В. - ТМФ, 1984, 60, с. 218.
19. Shirkov D.V. in: Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, v.3. New York, Harwood Academic, 1984, p. 1637.

20. Shirkov D.V., Shumovsky A.S., Yukalov V.I. - Comm. JINR, E2-86-460, Dubna, 1986.
21. Шумовский А.С., Юкалов В.И. В сб.: Международная школа по физике высоких энергий. Дубна, ОИЯИ Д24-83-179, 1983, с. 223.
22. Stinchcombe R.B. - J.Phys., 1979, C12, p. 4533.
23. Stinchcombe R.B. - J.Phys., 1980, C13, p. 3713.
24. De Bell K. A real space renormalization group investigation of the Ising model in a random field. Edinburgh, 1981.
25. Grinstein G., Ma S. - Phys.Rev., 1983, B28, p. 2588.
26. Grinstein G. - J.Appl.Phys., 1984, 55, p. 2371.
27. Доценко В.С., Фейгельман М.В. - ЖЭТФ, 1984, 86, с. 1544.
28. Dee G., Gunton J., Kawasaki K. - J.Stat.Phys., 1981, 24, p. 87.
29. Calvo M. - Phys.Rev., 1981, B23, p. 4755.
30. Кройц М. Кварки, глюоны и решетки. М., "Мир", 1987.
31. Pearson R. - Phys.Rep., 1984, 103, p. 185.
32. Griffiths R.B. - Phys.Rev.Lett., 1970, 24, p. 715.
33. Griffiths R.B. - Phys.Rev., 1973, B7, p. 545.
34. Krinsky S., Furman D. - Phys.Rev., 1975, B11, p. 2602.
35. Brady Moreira F.G., Fittipaldi I.P. - Physica, 1977, B86, p. 1100.
36. Sarbach S., Fisher M. - Phys.Rev., 1978, B18, p. 2350.
37. Brady Moreira F.G., Fittipaldi I.P. - J.Appl.Phys., 1979, 50, p. 1726.
38. Riedel E.K., Wegner F.J. - Phys.Rev.Lett., 1972, 29, p. 349.
39. Wegner F.J., Riedel E.K. - Phys.Rev., 1973, B7, p. 248.
40. Nelson D.R., Fisher M.E.- Phys.Rev., 1975, B11, p. 1030.
41. Lawrie I., Sarbach S. - Phase Trans.Crit.Phen., 1984, 9, p. 1.
42. Браут Р. Фазовые переходы. М., "Мир", 1967.
43. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М., "Наука", 1964.
44. Гинзбург В.Л. - ФТТ, 1960, 2, с. 2031.
45. Боголюбов Н.Н. /мл./ и др. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София, БАН, 1981.
46. Joyce G.S. - Phys.Rev., 1966, 146, p. 349.
47. Fisher M.E. - Phys.Rev., 1968, 176, p. 257.
48. Лакоэа Е.Л., Чалый А.В. - УФН, 1983, 140, с. 393.
49. Чалый А.В., Черненко Л.М. - ЖЭТФ, 1984, 87, с. 187.
50. Чалый А.В., Черненко Л.М. Тезисы докладов на Всесоюзной конференции "Современные проблемы статистической физики", ч. 2, с. 57, Львов, АН УССР, 1987.
51. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической физике. М., "Мир", 1985.
52. Kadanoff L.P. in: Critical Phenomena. New York, Academic, 1971, p. 118.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Юкалов В.И. P17-88-601

Ренормгруппа в статистической физике
- анализ общих принципов

Излагаются основные принципы ренормгруппового подхода, используемого в статистической физике при описании критических явлений. Особенность предлагаемого сообщения заключается в том, что в нем формулируются главные постулаты, на которых базируется применение рассматриваемого метода, вне зависимости от различных частных реализаций. Это дает возможность сочетать сжатость изложения с его полнотой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод автора

Yukalov V.I. P17-88-601

Renormalization Group in Statistical Physics
- Analysis of General Principles

Basic principles of the renormalization group approach used in statistical physics for describing critical phenomena are investigated. The peculiarity of the present communication consists in the formulation of the main postulates underlying the method without dependence of different particular realizations. This gives an opportunity for combining the brevity of the presentation with its completeness.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988