

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Р17-88-576

В.Б.Приезжев

**АНЗАЦ БЕТЕ
ДЛЯ ПОВЕРНУТЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ**

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1988

I. Введение

Вычисление статистической суммы решеточных моделей начинается с выбора ориентации решетки. Термодинамика моделей с "нормальным" потенциалом взаимодействия не зависит от способа стремления границ к бесконечности. Поэтому для решения задачи выбирается ориентация, при которой основные определения имеют простейший вид. Например, строки и столбцы квадратной решетки располагаются, как правило, параллельно осям координат. В методе трансфер - матрицы границы отождествляются друг с другом для создания периодических условий, и решетка превращается в тор, образующими которого служат строки и столбцы. Трансфер-матрица в этом случае соединяет состояния в двух последовательных строках решетки.

Если в модели Изинга и других решаемых моделях класса свободных фермионов выбор ориентации решетки является вопросом удобства, то в случае моделей, решаемых с помощью анзаца Бете, возникает более сложная ситуация. Первое решение ϕ -вершинной модели $^{1/1}$, как и последующие обобщения $^{2/1}$, было найдено методом трансфер-матрицы, действующей между строками квадратной решетки. Вскоре Темперли и Либ $^{3/1}$ обнаружили, что решетка, повернутая относительно основной ориентации на $\pi/4$, более удобна при сопоставлении двумерных классических и одномерных квантовых моделей. В работе $^{4/1}$ поворот на $\pi/4$ был представлен как перенос решетки на световой конус, что позволило найти естественную связь между вершинными моделями и интегрируемыми моделями КМТ.

Кроме выяснения связей между различными моделями, решение ϕ -вершинной модели на повернутой решетке полезно для доказательства эквивалентности различных граничных условий для этой модели. Трудности такого доказательства в духе теоремы Ван Хоа были отмечены в работе $^{5/1}$. Прямое вычисление статсуммы для произвольных ориентаций решетки позволило бы доказать эквивалентность, но крайней мере, всех периодических условий. Ясно, что стандартный метод трансфер-матрицы неприменим для этой цели из-за сложной формы уравнения для собственных значений.

Недавно Кастеллини $^{1/2}$ использовал ϕ -вершинную модель для решения одномерной задачи о взаимодействующих случайных блужданиях, которая возникает при описании диффузии сталкивающихся частиц. Несмотря на то, что это решение повторяет основные черты стандартного подхода, представление конфигураций модели в виде набора траекторий блуждающих частиц оказывается полезным для упрощения вывода уравно-

ний анзаца Бете. В данной статье мы воспользуемся этим представлением для решения модели льда для произвольной ориентации решетки. Модель льда выбрана для простоты изложения. Обобщение предлагаемого метода на весь класс 6-вершинных моделей не вызывает принципиальных затруднений.

2. Представление случайных блужданий

Для построения повернутой решетки рассмотрим вспомогательную целочисленную решетку \mathcal{L} размером $\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$, расположенную обычным образом и свернутую в цилиндр с осью, параллельной вертикальной оси координат. Образующими векторами основной решетки L будем считать ортогональные векторы (a_1, a_2) и $(-a_2, a_1)$, где a_1 и a_2 - целые числа. Положим для определенности $a_2 > a_1$. Рис. 1 иллюстрирует это построение для случая $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

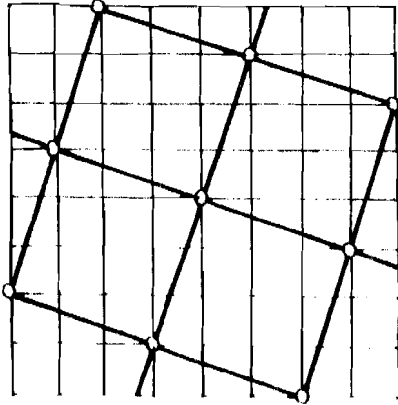


Рис. 1

Число узлов вспомогательной решетки обозначим через \mathcal{N} . Тогда число узлов основной решетки равно $\mathcal{N}/(a_1^2 + a_2^2)$. Для выполнения периодических граничных условий для основной решетки потребуем, чтобы число столбцов вспомогательной решетки \mathcal{L}_x было кратно $(a_1^2 + a_2^2)$.

Каждое ребро решетки L снабдим стрелкой и потребуем выполнения условия льда: число стрелок, входящих в вершину, должно быть равно числу стрелок, выходящих из нее. Задача состоит в определении числа конфигураций отрезков, удовлетворяющих правилу

льда. Выделим из множества ребер те, у которых стрелки направлены в отрицательном направлении вертикальной оси. Представлением случайных блужданий получится, если отождествить выделенные ребра с участками траектории блуждающих частиц. Правило льда обеспечивает сохранение числа траекторий. Конфигурация модели представляет собой набор из n траекторий, ориентированных вдоль оси цилиндра и не пересекающихся друг с другом. Основная особенность 6-вершинной модели, отличающая ее от модели свободных фермионов, заключается в том, что траектории могут обходить узлы, но проходят совместно ни одного узла решетки.

Противоположно перечислению всех возможных конфигураций модели, нам

нужно, как обычно, со случая $n = 1$. Рассмотрим произвольную траекторию, начинающуюся на верхней и оканчивающуюся на нижней строке решетки \mathcal{L} . Номер строки отождествим с дискретным моментом времени t ($0 \leq t < \mathcal{L}_y$). Обозначим через x_0 , t_0 координаты первого узла решетки L , встречающегося на данной траектории. Очевидно, что узел (x_0, t_0) находится в полосе $(1 \leq x_0 \leq \mathcal{L}_x)$, $(0 \leq t_0 \leq a_2 - 1)$. Координату x_0 назовем положением блуждающей точки в начальный момент времени t_0 .

Обозначим через $W_t(x)$ число траекторий с началом в точке x_0 , попадающих в момент времени t в точку x . Учитывая, что траектории проходят по ребрам основной решетки, напишем рекуррентное соотношение

$$W_t(x) = W_{t-a_2}(x+a_1) + W_{t-a_1}(x-a_2) \quad (1)$$

с начальными условиями $W_t(x) = 0$ для $t < t_0$, $W_{t_0}(x) = \delta_{x, x_0}$. При выбранных начальных условиях функция $W_t(x)$ отличается от нуля только в узлах решетки L . Традиционный метод трансфер-матрицы предполагает следующий порядок перехода к термодинамическому пределу: $\mathcal{L}_y \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}_x \rightarrow \infty$, так что сначала решается задача для бесконечно длинного цилиндра конечного радиуса, а затем этот радиус устремляется к бесконечности.

Введем производящую функцию

$$W(z) = \sum_{t=t_0}^{\infty} W_t(x) z^t, \quad (2)$$

для которой, согласно (1), имеем уравнению

$$W(z) = z^{a_2} W(z^{-a_1}) + z^{a_1} W(z^{-a_2}) + B_1(z) - B_2(z), \quad (3)$$

где

$$B_1(z) = W_0(x) + W_1(x)z^{-a_1} + W_{a_2-1}(x)z^{-a_2-1},$$

$$B_2(z) = W_0(x-a_1) + W_1(x-a_1)z^{-a_1} + W_{a_2-1}(x-a_1)z^{-a_2-1} \quad (4)$$

Функции $B_1(z)$ и $B_2(z)$ однозначно определяются начальными условиями. Если мы имеем дело с единичным случайным блужданием, то, естественно, положить $W_0(x) = \delta_{x, x_0}$ для $t = t_0$; $W_t(x) = 0$ для $t < t_0$ и $t > a_2 - t_0$, выбирая тем самым направление первого шага. При таком выборе $B_1(z) = \delta_{x, x_0}$ и $B_2(z) = 0$.

Определим дискретное фурье-преобразование функции $W(z)$:

$$\tilde{W}(k) = \sum_{x=1}^{Lx} W(x) e^{ikx} \quad (5)$$

Из уравнения (3) следует

$$\tilde{W}(k) = z^{a_2} e^{-ika_1} \tilde{W}(k) + z^{a_1} e^{ika_2} + e^{ikx_0}, \quad (6)$$

так что

$$\tilde{W}(k) = \frac{e^{ikx_0}}{1 - z^{a_2} e^{-ika_1} - z^{a_1} e^{ika_2}} \quad (7)$$

Фурье-преобразование $\tilde{W}_t(k)$ функции $W_t(x)$, согласно (1), удовлетворяет уравнению

$$\tilde{W}_t(k) = e^{-ika_1} \tilde{W}_{t-a_2} + e^{ika_2} \tilde{W}_{t-a_1}(k) \quad (8)$$

и выражается через $\tilde{W}(k)$ на основании определений (2) и (5):

$$\tilde{W}_t(k) = \frac{1}{i\pi t} \oint \frac{dz}{z^{t+1}} \tilde{W}(k) \quad (9)$$

Контур интегрирования в (9) - круг радиуса $\gamma < |z_c(k)|$, где $z_c(k)$ - наименьший по модулю корень уравнения

$$z^{a_2} e^{-ika_1} + z^{a_1} e^{ika_2} - 1 = 0 \quad (10)$$

Мероморфная функция $\tilde{W}(k)$ аргумента z может быть представлена в виде суммы главных частей ее лорновских разложений относительно всех конечных полюсов. Асимптотика $\tilde{W}_t(k)$ определяется полюсом, ближайшим к началу координат. Введя $\lambda_k = z_c^{-1}(k)$, получим

$$\tilde{W}_t(k) \sim \lambda_k^t \quad (11)$$

Величина λ_k является аналогом максимального собственного значения трансфер матрицы T , действующей между строками вспомогательной решетки. Собственной функцией, соответствующей этому значению, можно считать e^{ikx} . Действие матрицы T на функцию координат блуждающей частицы определяется следующим образом.

Рассмотрим строку решетки \mathcal{L} , принадлежащую траектории блуждающей частицы в узле решетки L . Матрица T переводит частицу в одном из двух направлений вдоль ребер основной решетки L до

пересечения со следующей строкой решетки \mathcal{L} . Если точка пересечения строки решетки \mathcal{L} и траектории не является узлом L , то движение частицы продолжается по ребру решетки L до пересечения со следующей строкой \mathcal{L} . Если функция координат имеет вид e^{ikx} , то после полного прохождения ребра основной решетки в одном направлении она умножается на e^{-ika_1} , а в другом - на e^{ika_2} .

Представление случайных блужданий позволяет находить собственные значения матрицы T , не выписывая ее в явном виде. Эволюция функции координат блуждающей частицы определяется уравнением (8) с начальными условиями $W_0(k) = e^{ikx_0}$. Функция $\tilde{W}_t(k)$ представляет собой сумму по всем траекториям частицы за t шагов с весами e^{-ika_1} или e^{ika_2} на каждом пройденном ребре и полностью определяет решение задачи в случае $n=1$.

Посмотрим, как выглядит в этих терминах идеология анзаца Бете для случая $n > 1$.

3. Анзац Бете

Рассмотрим n траекторий блуждающих частиц на решетке L . Каждой частице припишем "волновое число" из набора $\{k\} = k_1, k_2, \dots, k_n$. Основным объектом анзаца Бете является функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_P \alpha(P) \prod_{j=1}^n e^{ik_j(P) x_j}, \quad (12)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам P чисел $1, 2, \dots, n$ с коэффициентами $\alpha(P)$, подлежащими определению.

Пусть эволюция функции координат под действием матрицы T происходит независимо для каждой частицы. Тогда максимальное собственное значение T дается произведением

$$\Lambda_n = \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_n} \quad (13)$$

Для того, чтобы T была трансфер матрицей рассматриваемой модели, необходимо потребовать выполнения следующего условия. В результате свободной эволюции n блуждающих частиц полностью множество траекторий, не удовлетворяющих правилу льда. Всего имеется $n!$ комбинаций этих траекторий, соответствующих различным способам приписания n частицам волновых чисел из набора $\{k\}$ в (12). Матрица T будет трансфер матрицей модели льда, если значения k_1, k_2, \dots, k_n и коэффициентов $\alpha(P)$ подобраны такими, чтобы при суммировании по P сократились все лишние траектории. Очевидно, что для окреще

ния лишних траекторий на всей решетке достаточно потребовать их сокращения в каждом узле основной решетки L .

(i), Условия сокращения. Рассмотрим узел решетки L , в котором встречаются две траектории с волновыми числами p и q . Пусть P и Q - две перестановки $\{k\}$, в которых p и q меняются местами: $P\{k\} = \dots p, q, \dots$ и $Q\{k\} = \dots q, p, \dots$. На рис. 2 показаны четыре возможных способа продолжения траекторий, соответствующих одной из этих перестановок.

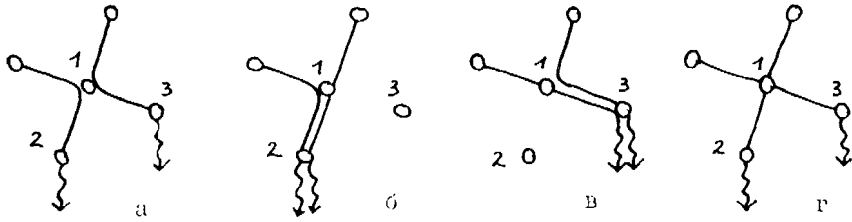


Рис. 2

Другая перестановка изображается также с переменой мест p и q . Числами 1, 2, 3 обозначены узлы решетки L . Ситуация, изображенная на рис. 2 а) согласуется с правилом льда. Остальные возможности должны быть исключены.

Участки траектории между точками 1 и 2 и точками 1 и 3 детерминированы. Волнистые линии означают свободное блуждание, т.е. все возможные способы продолжения траекторий на ребрах решетки L . В соответствии с этим, навешенная сумма по всем траекторий частицы за t шагов из точки 1 для случая (а) имеет вид

$$e^{ip_1 a_1} W_{t-a_1}(p) e^{iq_1 a_1} W_{t-a_1}(q), \quad (14)$$

для случая (б):

$$e^{ip_1 a_1} W_{t-a_1}(p) e^{iq_1 a_1} W_{t-a_1}(q), \quad (15)$$

и для случая (г):

$$e^{iq_1 a_1} W_{t-a_1}(q) e^{ip_1 a_1} W_{t-a_1}(p). \quad (16)$$

Пусть $A(P)$ и $A(Q)$ - весовые множители двух рассматриваемых траекторий в точке 1. С учетом (14) условие сокращения запрещенных конфигураций имеет вид

$$A(P) \left\{ e^{-ip_1 a_1 - iq_1 a_1} \lambda_p^{t-a_1} \lambda_q^{t-a_1} + e^{ip_1 a_1 + iq_1 a_1} \lambda_p^{t-a_1} \lambda_q^{t-a_1} + e^{-iq_1 a_1 + ip_1 a_1} \lambda_q^{t-a_1} \lambda_p^{t-a_1} \right\} = -A(Q) \left\{ e^{-ip_1 a_1 - iq_1 a_1} \lambda_p^{t-a_1} \lambda_q^{t-a_1} + e^{ip_1 a_1 + iq_1 a_1} \lambda_p^{t-a_1} \lambda_q^{t-a_1} + e^{-ip_1 a_1 + iq_1 a_1} \lambda_p^{t-a_1} \lambda_q^{t-a_1} \right\}. \quad (17)$$

Вводя функцию $B(p, q)$, определяемую равенством

$$A(P) = B(p, q) A(Q), \quad (18)$$

получим

$$B(p, q) = - \frac{e^{-iq_1(p+q)} + e^{iq_1(p+q)} (\lambda_p \lambda_q)^{q_2-a_1} + e^{-ip_1 + iq_1 a_1} \lambda_q^{q_2-a_1}}{e^{-iq_1(p+q)} + e^{iq_1(p+q)} (\lambda_p \lambda_q)^{q_2-a_1} + e^{-ip_1 + iq_1 a_1} \lambda_p^{q_2-a_1}}. \quad (19)$$

Следя за траекториями частиц на решетке сверху вниз, замечаем, что первые запрещенные конфигурации появляются в результате столкновения двух частиц в одном узле. Попарно уничтожая последовательно появляющиеся запрещенные конфигурации, мы добиваемся выполнения условия льда для всех оставшихся траекторий.

(ii), Циклические условия. Рассмотрим более детально происхождение весовых множителей $A(P)$ и $A(Q)$. Обозначим через x_1 и x_2 начальные положения блуждающих точек, связанных с волновыми числами p и q . Пусть r - координаты узла решетки L , в котором происходит встреча двух блуждающих. Тогда весовой множитель в точке r для перестановки P равен

$$A(P) = a(P) e^{ip_1(x_1-r)} e^{iq_1(x_2-r)}, \quad (20)$$

и для перестановки Q

$$A(Q) = a(Q) e^{iq_1(x_1-r)} e^{ip_1(x_2-r)}, \quad (21)$$

где $a(P)$ и $a(Q)$ - коэффициенты, введенные в (12). Подставив эти выражения в (18), находим, что

$$a(P) = a(Q) B(p, q) e^{iA_1(p, q)}, \quad (22)$$

Пусть, далее, $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ - начальные положения точек, которые в перестановке P связаны с волновыми числами k_1, k_2, \dots, k_n . Обозначим через $\Delta_{j, j+1}$ разность $x_{j+1}^0 - x_j^0$. Циклическая перестановка $Q = \{2, 3, \dots, n, 1\}$, в которой первая частица переставлена относительно остальных, дает коэффициент $a(Q)$, связанный с $a(P)$ соотношением

$$a(P) = a(Q) \prod_{j=1}^{n-1} B(k_j, k_{j+1}) e^{i\Delta_{1,2}(k_2 - k_1)} \dots e^{i\Delta_{n-1,n}(k_n - k_{n-1})}. \quad (23)$$

С другой стороны, относительные расположения частиц в перестановках P и Q совпадают, и мы должны потребовать выполнения равенства $a(P) = a(Q)$. Отсюда имеем

$$e^{i\Delta_{1,2}(k_1 - k_2)} \dots e^{i\Delta_{n-1,n}(k_n - k_{n-1})} = \prod_{j=1}^{n-1} B(k_1, k_j). \quad (24)$$

Замечая, что $\sum_{j=1}^n \Delta_{j, j+1} = L_x$, представим левую часть (24) в виде

$$e^{ik_1 L_x} D(\{k\}), \quad (25)$$

где

$$D(\{k\}) = \prod_{j=1}^n \exp(-i\Delta_{j, j+1} k_j).$$

В принципе, можно было бы попытаться доказать, что в термодинамическом пределе $L_x \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ ($n/L_x = \text{const}$) $D(\{k\}) \rightarrow 1$ при достаточно общих предположениях о начальных условиях. Но поскольку мы не ограничены выбором начальных условий, проще положить все интервалы $\Delta_{j, j+1}$ равными друг другу, и тогда равенство

$$D(\{k\}) = 1 \quad (26)$$

выполняется для любого симметричного набора $\{k\}$, в котором

$$k_j = k_{n-j+1}. \quad (27)$$

На первый взгляд, такой набор интервалов $\Delta_{j, j+1}$ по необходимости не возможен из-за требования, чтобы начальные положения $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ совпадали с узлами основной решетки L . Тем не менее, мы можем определить эквивалентный набор $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, L/n и просто для удобства в номере j и волновом числе k начальную фазу $W_{j,n}(k) = \exp(i k x_j^0) = \exp(i k L/n)$. Такие начальные условия обозначим

равенство интервалов $\Delta_{j, j+1}$ для всех j в выражениях (23), (24). С учетом равенства (26) условие (24) можно записать в форме

$$e^{ik_j L_x} = \prod_{i \neq j} B(k_j, k_i). \quad (28)$$

Система n уравнений (28) вместе с (10) и (19) определяет набор k_1, k_2, \dots, k_n и служит обобщением анзаца Бете для решеток, повернутых относительно границ на произвольный угол.

4. Сравнение с известными решениями

Уравнения анзаца Бете для модели льда на квадратной решетке были получены в двух частных случаях: для "естественной" ориентации $\pi/4$ и для поворота на угол $\pi/4$ или $3\pi/4$. Рассмотрим сначала второй случай.

Поворот решетки на угол $\pi/4$ в наших обозначениях соответствует выбору $a_1 = a_2 = 1$. Подставляя эти значения в (10), получим уравнение

$$z e^{+ik} + z e^{-ik} - 1 = 0, \quad (29)$$

приводящее к значению $\lambda_k = \cos k$. Равенство (19) при $a_1 = a_2 = 1$ имеет простую форму:

$$B(p, q) = \frac{1 + e^{2ip+2iq} + e^{2iq}}{1 + e^{2ip+2iq} + e^{2ip}}. \quad (30)$$

Обозначим число узлов основной решетки, лежащих в одной строке, через N . Тогда $L_x = 2L$ и система уравнений (28) для собственных векторов принимает вид

$$e^{2iNk_j} = \prod_{i \neq j} B(k_j, k_i). \quad (31)$$

Выражения (30) и (31) совпадают с уравнениями, полученными в работе [1], если в них положить все начальные условия равными единице и соответствия с условиями льда.

Нормальная ориентация решетки получается в пределе $a_2 \rightarrow \infty, a_1 = 1$. Введем обозначения: $\alpha = ka_1$ и $\beta = qa_2$ и переищем уравнение (10) в виде

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\alpha+i\beta} - 1 = 0. \quad (32)$$

При $a_2 \rightarrow \infty$ интересующий нас корень уравнения (32) стремится к величине

$$b_0 = 1 - e^{i\alpha}. \quad (33)$$

При больших a_2 основная решетка L ориентирована так же, как и вспомогательная \mathcal{L} , и имеет шаг a_2 . Поэтому естественно определить наряду с λ_k величину $\lambda_\alpha = \lambda_k^{a_2}$, для которой, согласно (33) имеем

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{1 - e^{i\alpha}}. \quad (34)$$

Перепишем соотношение (19) в переменных $\alpha = p a_2$ и $\beta = q a_2$:

$$B(\alpha, \beta) = - \frac{C(\alpha, \beta) + e^{-i\alpha/a_2} e^{i\beta} (1 - e^{i\beta})^{-1}}{C(\alpha, \beta) + e^{-i\beta/a_2} e^{i\alpha} (1 - e^{i\alpha})^{-1}}, \quad (35)$$

где

$$C(\alpha, \beta) = e^{i\alpha/a_2} e^{i\beta/a_2} + e^{i(\alpha+\beta)} (1 - e^{i\alpha})^{-1} (1 - e^{i\beta})^{-1}. \quad (36)$$

В пределе $a_2 \rightarrow \infty$ из (35) получаем известное выражение [1]:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{1 + e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i\alpha} - e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i\alpha} - e^{i\beta}}. \quad (37)$$

Ввиду, как и выше, N - число узлов основной решетки на строке вспомогательной и учитывая, что $N = L_1 / a_2$, получаем систему уравнений для волновых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$:

$$e^{iN\alpha_j} = \prod_{i=1}^N B(\alpha_j, \alpha_i). \quad (38)$$

Максимальное собственное значение трансформационной матрицы, действующей между строками основной решетки следует из (38):

$$\Lambda = \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} \dots \lambda_{\alpha_N}. \quad (39)$$

В общем случае, при произвольных значениях (a_1, a_2) система уравнений не имеет простой аналитической формы, так как содержит корни уравнения степени a_2 . Изучение термодинамических свойств t_c першинной модели, и в частности модели льда при произвольных углах поворота, нуждается в численном решении уравнений (10), (14), (16).

Литература

1. Lieb E.H. - Phys.Rev.Lett., 1967, 18, p.692.
2. Бакстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. Мир, Москва, 1985.
3. Temperley H.N.V., Lieb E.H. - Proc.Roy. Soc. (London), 1971, A322, p.251.
4. C.Destri, H.J. de Vega, Nucl.Phys., 1987, B290, p.363.
5. Pegg N.E. - Ann. Israel Phys. Soc., 1974, 27, p. 637.
6. Lieb E.H. and Wu F.Y. In: Phase Transitions and Critical phenomena, vol.I, ed. by Domb and Green, Academic Press, London, New York, 1972.
7. Kasteleyn P.W. - Physica, 1987, 147A, p.315.

Рукопись поступила в редакционный отдел

24 июля 1988 года.