сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

Р17-88-348

Д.П.Санкович

ИНФРАКРАСНЫЕ ОЦЕНКИ И ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В МОДЕЛИ НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

1988

В 1946 году Н.Н.Боголюбов показал, что явление сверхтекучести в бозевских системах со слабым взаимодействием обусловлено появлением в системе бозе-конденсата. При этом взаимодействие между частицами может стабилизировать конденсат, который будет двигаться без трения относительно элементарных возбуждений с произвольной, достаточно малой скоростью. В данной работе рассмотрена модель неидеального бозе-газа и доказано существование в ней конденсата при достаточно низких температурах. Использована техника мажорационных оценок Дайсона-Либа-Саймона и метод функционального интегрирования в голоморфном представлении. Получено уравнение для критической температуры фазового перехода и оценка сверху для энергии одночастичных возбуждений.

I. Модель неидеального бозе-газа и теорема Боголюбова об особенностях типа q^{-2}

Рассмотрим в d-мерном кубе $V \in R^d$ с координатами $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$, $x^j \in (-L/2, L/2)$, $j = 1, 2, \dots d$, и объемом $V = L^d$ систему N одинаковых бесспиновых частиц. Буквой V будем обозначать как область V, так и ее объем. Состояния такой системы характеризуются волновыми функциями $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$, где x_n -совокупность пространственных координат n-й частицы.

В рассматриваемом случае волновые функции являются квадратично-интегрируемыми и симметричными относительно любой перестановки P среди N аргументов $x_1, x_2, \dots, x_N$: $P\varphi = \varphi$, то есть мы имеем статистику бозевского типа.

Гамильтониан системы H состоит из аддитивной симметричной суммы индивидуальных энергий частиц и бинарной симметричной суммы энергий взаимодействия различных пар частиц и имеет вид

$$H = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\Delta_{x_n} + \sum_{1\le n<m\le N} \Phi(x_n - x_m), \qquad (1)$$

где Δ_{x_n} –оператор Лапласа по переменной x_n, а потенциальная энергия Φ взаимодействия характеризуется вещественной функцией, инвариантной по отношению к отражению $\Phi(x) = \Phi(-x)$.

Учитывая, что в статистической механике общепринят предельный переход $N\to\infty$, $V\to\infty$, $N/V = n = const$, называемый термодинамическим, удобно воспользоваться квазидискретным представлением [1]. На волновые функции φ накладываются условия периодичности с периодом L по каждой из пространственных координат x_n^j : $T_n^{(j)}\varphi = \varphi$, где $T_n^{(j)}$ – оператор, заменяющий x_n^j на $x_n^j + L$ и оставляющий все остальные координаты для выражения φ неизменными. Чтобы обеспечить выполнение условия периодичности для всех моментов времени t, берем для потенциальной энергии взаимодействия пар частиц вместо интеграла Фурье дискретную сумму

$$\Phi(x) = \frac{1}{V}\sum_{k} e^{ikx}\, \nu(k), \qquad (2)$$

где $k = (k^1, k^2, \dots, k^d)$, $k^j = 2\pi L^{-1} n_j$, $n_j \in \mathbb{Z}^1$, $j = 1, 2, \dots, d$.

Используем для описания нашей модели представление вторичного квантования [2]. Гамильтониан (1) примет вид

$$H = \int_V \psi^+(x)\left(-\frac{1}{2}\Delta_x\right)\psi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_V \Phi(x_1 - x_2)\psi^+(x_1)\psi^+(x_2)\psi(x_2)\psi(x_1)\,dx_1 dx_2 . \qquad (3)$$

Операторные функции $\psi^+(x), \psi(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Бозе:

$$\begin{aligned} &\psi(x)\psi^+(x') - \psi^+(x')\psi(x) = \delta(x - x'),\\ &\psi(x)\psi(x') - \psi(x')\psi(x) = 0,\\ &\psi^+(x)\psi^+(x') - \psi^+(x')\psi^+(x) = 0, \end{aligned} \qquad (4а)$$

$\delta(x)$ – d-мерная δ-функция Дирака.

В квазидискретном представлении вводятся квантованные амплитуды Бозе a_p^+, a_p –операторы рождения и уничтожения частиц с импульсами p:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p e^{ipx} a_p, \qquad \psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p e^{-ipx} a_p^+ . \qquad (5)$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_p, a_q^+] = \delta_{p,q}, \ [a_p, a_q] = 0, \ [a_p^+, a_q^+] = 0, \qquad (4б)$$

$\delta_{p,q}$ –символ Кронекера.

Используя (2),(3) и (5), имеем

$$H = \sum_q \frac{q^2}{2} a_q^+ a_q + \frac{1}{2V}\sum_{p,q,k} \nu(k)\, a_p^+ a_q^+ a_{p+k} a_{q-k}, \qquad (6)$$

где $\nu(k) = \nu(-k) = \nu^*(k)$.

Система, описываемая гамильтонианом (6), носит название модели неидеального бозе-газа и служит основным кандидатом на объяснение явления сверхтекучести жидкого гелия-2.

Сверхтекучесть представляет собой фазовый переход в системе бозе-частиц, сопровождающийся возникновением "дальнего порядка". Пусть $F_1(x_1, x_2) \equiv \langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle$ –одночастичная матрица плотности. $\langle \dots \rangle$ означает равновесное гиббсовское усреднение с гамильтонианом H. В силу пространственной однородности системы $F_1(x_1, x_2) = F_1(|x_1 - x_2|)$. Наличие дальнего порядка означает, что

$$\lim_{|x_1 - x_2|\to\infty} F_1(x_1, x_2) = n_0 > 0 . \qquad (7)$$

На языке фурье-преобразования

$$w(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int F_1(x)\, e^{ikx} dx$$

из условия (7) следует, что

$$w(k) = n_0\,\delta(k) + w_1(k),$$

где $w_1(k)$ характеризует непрерывное распределение частиц по ненулевым импульсам, а n_0 –плотность конденсата, то есть

$$n_0 = \frac{1}{V}\langle a_0^+ a_0 \rangle = \frac{1}{V^2}\iint\limits_V \langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle dx_1 dx_2 > 0. \quad (8)$$

Таким образом, возникновение фазового перехода в модели неидеального бозе-газа, связанное с появлением в системе дальнего порядка в смысле соотношения (7), обусловлено возникновением отличной от нуля плотности бозе-конденсата n_0. Заметим, что условие (8) очевидно связано со стратегией Фрелиха в теории фазовых переходов в системах с непрерывной группой симметрии (см. следующий раздел) и должно выполняться в термодинамическом пределе, что отвечает общей концепции теории фазовых переходов[3].

Объяснение роли конденсата в системе слабо-неидеального бозе-газа ($\nu(k)$ "мало") на основе понятия квазисредних[4] было впервые дано Боголюбовым[5].

В работе[4] Боголюбов доказал важную теорему, получившую название теоремы о q^{-2}. Эта теорема дает оценку снизу для корреляционной средней $\langle a_q^+ a_q \rangle$:

$$\langle a_q^+ a_q \rangle \geqslant -\frac{1}{2} + \theta \frac{n_0}{n}\frac{m}{q^2}, \quad \theta \neq 0, \qquad (9)$$

где m -масса частицы, $\beta = \theta^{-1}$ -обратная температура. Просуммируем обе части (9) по всем q ($q \neq 0$). При этом $|q| \leqslant p_{max}$ - импульс Дебая.

$$\frac{1}{N}\sum_{q\neq 0}\langle a_q^+ a_q \rangle = 1 - \frac{n_0}{n} \geqslant \qquad (10)$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_0}{n}\right)\eta + \theta \frac{n_0}{n} m \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{L^d}{N}\int\limits_{|q|\leqslant p_{max}} \frac{dq}{q^2}.$$

Напомним, что d -пространственная размерность системы. Левая часть (10) ограничена при всех d, а интеграл в правой части расходится при $d = 1, 2$, то есть в этом случае необходимо, чтобы $n_0 = 0$. Итак, неравенство (9) означает, что в одно- и двумерных системах при $\theta \neq 0$ дальний порядок отсутствует.

Таким образом, теорема о q^{-2} накладывает запрет на возникновение фазовых переходов при $\theta \neq 0$ в модели неидеального бозе-газа

при $d = 1, 2$. Заметим, что этот результат не ограничен малостью взаимодействия и строго выполняется в предположении градиентной инвариантности взаимодействия.

С помощью теоремы о q^{-2} можно исследовать также спектр элементарных возбуждений системы в длинноволновом пределе $q \to 0$. При этом получается "акустическая" бесщелевая зависимость энергии элементарных возбуждений от импульса $\mathcal{E} = \sqrt{5}\, q$.

Ниже мы получим оценку сверху для $\langle a_q^+ a_q \rangle$ ($q \neq 0$) и на ее основе докажем, что при $d \geq 3$ в системе неидеального бозе-газа возникает фазовый переход с $n_0 > 0$. Мы также получим уравнение для температуры этого перехода и оценку сверху для энергии элементарных возбуждений, имеющую "сверхтекучий" характер.

2. Метод Фрелиха-Саймона-Спенсера в теории фазовых переходов

Проблема построения математической теории фазовых переходов является одной из основных проблем статистической механики. Традиционная точка зрения на фазовые переходы "состоит в том, что смена фаз проявляется в нарушении регулярности термодинамических функций, являющихся вне точки фазового перехода вещественно аналитическими. С этой точки зрения теория фазовых переходов должна состоять в доказательстве кусочной аналитичности термодинамических функций и исследовании природы их возможных особенностей"[3]. Наиболее прямая реализация этой программы заключалась в исследованиях Ли и Янга[6], предложивших теорию фазовых переходов, основанную на идее доказательства того, что все нули большой статистической суммы в комплексной плоскости значений активности z при $V \to \infty$ (V -объем системы) лежат на окружности $|z| = 1$. Ли и Янг рассмотрели случай решетчатых систем. В дальнейшем, используя так называемый контурный метод Пайерлса[7], удалось доказать ряд тонких теорем о существовании фазовых переходов в решетчатых системах классической[8,9] и квантовой[10,11] механики, а также квантовой теории поля[12]. Подробный обзор и анализ современных исследований в данном направлении содержится в монографии[13]. В большинстве случаев использования аргументов контурного метода мы имеем дело с нарушением дискретной группы симметрии модели.

В 1976 году Фрелих, Саймон и Спенсер в работе[14] доказали существование фазового перехода в классической модели Гейзенберга и в некоторых родственных моделях. В этом случае мы имеем непрерывную группу симметрии. В дальнейшем Либ, Дайсон и Саймон[15] (далее ДЛС) развили идеи работы[14] на квантовый случай и впервые доказали наличие фазового перехода в некоторых типах квантовых спиновых решетчатых систем с непрерывной симметрией, в частности, в модели Гейзенберга – спинов I/2 с взаимодействием ближайших соседей на простой кубической решетке при размерности пространства 3 и более (случай фазового перехода при размерности I и 2 запрещен теоремой Мермина-Вагнера/I6/). Изложим кратко основные идеи ДЛС, остановившись на наиболее важном для приложений случае изотропной ферромагнитной модели Гейзенберга.

Рассмотрим на простой d-мерной кубической решетке $\mathbb{Z}^d$ параллелепипед $\Lambda = \{\alpha \mid 0 \le \alpha_1 \le L_1 - 1, \dots, 0 \le \alpha_d \le L_d - 1\}$. С каждым узлом $\alpha \in \Lambda$ ассоциировано $(2S+1)$-мерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_\alpha \cong \mathbb{C}^{2S+1}$ (S =I/2, I, 3/2, ... -фиксированное целое или полуцелое число -"спин") и три самосопряженных оператора $S_\alpha^{(j)}$ (j =I,2,3), удовлетворяющих обычным коммутационным соотношениям:

$$[S_\alpha^{(j)}, S_\beta^{(k)}] = i\,\delta_{\alpha,\beta}\,\varepsilon_{jk\ell}\,S_\alpha^{(\ell)}, \tag{II}$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ -символ Кронекера, $\varepsilon_{jk\ell}$ -полностью антисимметричный тензор ранга 3, а по повторяющимся латинским индексам производится суммирование. Имеем также условие

$$S_\alpha^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(S_\alpha^{(j)}\right)^2 = S(S+1). \tag{I2}$$

(II) и (I2) определяют неприводимое унитарное представление группы $SU(2)$ в $\mathcal{H}_\alpha$ и задают S_α единственным образом. Основное гильбертово пространство в объеме Λ есть $\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{H}_\alpha \cong \mathbb{C}^{(2S+1)|\Lambda|}$. S_α означает оператор в $\mathcal{H}_\Lambda$, который есть тензорное произведение I в каждом $\mathcal{H}_\beta$ для $\alpha \ne \beta$ на S_α в $\mathcal{H}_\alpha$. Гамильтониан модели Гейзенберга с взаимодействием ближайших соседей, рассматриваемый ДЛС, есть

$$H = -\sum_{\alpha,j} S_\alpha \cdot S_{\alpha+\delta_j}, \tag{I3}$$

где $j \in (1, 2, \dots, d)$, $\alpha \in \Lambda$. Здесь δ_j -единичный вектор, j-я компонента которого равна I. Наложим периодические граничные условия: если $\alpha_j = L_j - 1$, то $(\alpha+\delta_j)_j = 0$. Используя (I2), гамильтониан модели (I3) можно переписать в виде

$$H = constant + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,j}\left(S_\alpha - S_{\alpha+\delta_j}\right)^2. \tag{I4}$$

Статистическая сумма и температурные средние задаются стандартными выражениями:

$$Z = Tr_{\mathcal{H}_\Lambda} e^{-\beta H},$$
$$\langle A \rangle_{\Lambda,\beta} = Z^{-1}\, Tr\, A\, e^{-\beta H}. \tag{I5}$$

Вводится фурье-представление спиновых операторов

$$\hat{S}_p = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{\alpha\in\Lambda} e^{-ip\alpha} S_\alpha, \tag{I6}$$

где $p \in \Lambda^*$ -дуальная решетка, то есть $p_j = 2\pi L^{-1} n_j$, $n_j = -\frac{L_j}{2}+1, \dots, \frac{L_j}{2}$ (L_j -четное) или $n_j = -\frac{1}{2}(L_j - 1), \dots, \frac{1}{2}(L_j - 1)$ (L_j нечетно). В этих переменных гамильтониан H принимает вид

$$H = constant + \sum_p E_p \hat{S}_p \hat{S}_{-p}, \tag{I4a}$$

где

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{|\delta|=1} \left|1 - e^{ip\delta}\right|^2 = d - \sum_{j=1}^{d} \cos p_j \ge 0. \tag{I7}$$

Из (II) имеем коммутационное соотношение

$$[\hat{S}_p^{(j)}, \hat{S}_q^{(k)}] = |\Lambda|^{-1/2}\, i\,\varepsilon_{jk\ell}\, \hat{S}_{p+q}^{(\ell)}. \tag{IIa}$$

В подходе ДЛС фундаментальное значение имеет стратегия Фрелиха/I7/, основанная на множественности фаз при достаточно высоких β. В случае рассматриваемой модели данное условие имеет вид

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{3} \Big(|\Lambda|^{-1} \sum_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha^{(j)}\Big)^2 \right\rangle_{\Lambda,\beta} \ne 0. \tag{I8}$$

Заметим, что в силу симметрии $\langle S_\alpha^{(j)} \rangle_{\Lambda,\beta} = 0$, $j = 1,2,3$. Обсуждение связи (I8) с другими формулировками возникновения фазовых переходов, основанное на теореме Гриффитса/I8/, содержится в работе ДЛС. Из теоремы Планшереля имеем следующее правило сумм:

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{p\in\Lambda^*} g_p = S(S+1), \tag{I9}$$

где

$$g_p = \langle \hat{S}_p \hat{S}_{-p} \rangle_{\Lambda,\beta} .$$

Условие (18) принимает вид

$$\lim_{\Lambda\to\infty} |\Lambda|^{-1} g_0 \neq 0 . \tag{20}$$

(20) означает макроскопическое заполнение нулевой моды, то есть в данном подходе фазовый переход представляет собой своеобразную конденсацию спиновых волн.

ДЛС для доказательства (20) получают оценку сверху для g_p ($p \neq 0$). При этом используется так называемая двухточечная функция Дюамеля, определение и свойства которой мы рассмотрим в следующем разделе. Ключевое значение имеет свойство гауссовой доминантности, доказанное ДЛС с помощью метода квантовой трансфер-матрицы, обобщающего классический метод доказательства работы [14]. Имея оценку сверху для g_p ($p \neq 0$) и используя правило сумм (19), легко установить условие появления в системе фазового перехода в смысле (20). При этом конструктивным образом возникает уравнение для определения обратной температуры фазового перехода β_c :

$$S(S+1) = S\sqrt{\frac{3}{2}}\; H_3\left(\beta_c S\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \tag{21}$$

где

$$H_3(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{|p_i|<\pi} cth(\xi E_p)\, dp . \tag{22}$$

Подчеркнем, что ключевое значение в подходе ДЛС имеет теорема о гауссовой доминантности, которая доказана ими в случае решетчатой системы специального вида, обладающей отражательной симметрией. Мы в разделе 4 обобщим теорему о гауссовой доминантности, что даст возможность в разделе 5 исследовать фазовый переход в модели неидеального бозе-газа.

3. Двухточечные функции Дюамеля

Впервые понятие двухточечной функции Дюамеля (д.ф.) появилось в работе Кубо [19]. В дальнейшем многие авторы активно обсуждали различные свойства и применения д.ф. (см., например [20]).

Пусть квантовая система с гамильтонианом H находится в объеме V и имеет статистическую сумму

$$Z = Tr\, e^{-\beta H} .$$

Д.ф. произвольных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется билинейная форма

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = Z^{-1} \int\limits_0^1 Tr\left(e^{-x\beta H} \mathcal{A} e^{-(1-x)\beta H} \mathcal{B}\right) dx . \tag{23}$$

Можно показать, что (23) эквивалентно следующему соотношению, впервые доказанному Дюамелем:

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = Z^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\mu\,\partial\lambda}\, Tr\, e^{-\beta H + \mu\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}} . \tag{24}$$

Из этих определений сразу видно, что

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathcal{B},\mathcal{A}), \tag{25}$$

$$(\mathcal{A}^+,\mathcal{A}) \geq 0, \tag{26}$$

$$|(\mathcal{A},\mathcal{B})| \leq \sqrt{(\mathcal{A}^+,\mathcal{A})(\mathcal{B}^+,\mathcal{B})} . \tag{27}$$

В отличие от обычной температурной двухточечной средней $\langle \mathcal{A}\mathcal{B} \rangle$, которая несимметрична, для д.ф. выполнено условие симметрии (25). С точки зрения применений д.ф. полезно то обстоятельство, что они наиболее "близки" к своему классическому аналогу в том смысле, что $(\mathcal{A}^+,\mathcal{A})$ не зависит от постоянной Планка в случае гармонического осциллятора.

Зная д.ф. для всех пар $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, легко вычислить обычное температурное среднее $\langle\mathcal{A}\rangle = (\mathcal{A},1)$.

Имеет место следующее полезное неравенство [20]:

$$(\mathcal{A}^+,\mathcal{A}) \leq \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^+\mathcal{A} \rangle . \tag{28}$$

Кроме того, учитывая, что $\langle [\mathcal{A},\mathcal{B}] \rangle = ([\mathcal{A},\beta H], \mathcal{B})$, можно легко установить неравенство Боголюбова [21]:

$$|\langle[\mathcal{A},\mathcal{B}]\rangle|^2 \leq \langle[\mathcal{A}^+,[\beta H,\mathcal{A}]]\rangle \frac{1}{2} \langle \mathcal{B}\mathcal{B}^+ + \mathcal{B}^+\mathcal{B} \rangle . \tag{29}$$

Заметим, что в бесконечном объеме определение для д.ф.(23) некорректно и необходимо использовать более тонкие аргументы, связанные с граничным КМШ-условием [22].

Решающее значение в стратегии Фрелиха-Саймона-Спенсера, как мы уже отмечали, имеет оценка сверху для температурной двухточечной средней. Эта оценка получается из оценки сверху соответствующей д.ф. и следующего утверждения [15]:

Теорема I (ДЛС). Пусть задана функция f из $[0,\infty)$ в $[0,1)$, определенная соотношением

$$x f(x\,\mathrm{th}\,x) = \mathrm{th}\,x. \tag{30}$$

Пусть заданы, кроме того,

$$g(A) = \frac{1}{2}\langle AA^+ + A^+A\rangle,$$
$$b(A) = (A^+, A),$$
$$c(A) = \langle [A^+, [\beta H, A]]\rangle.$$

Тогда для любого оператора A и любого самосопряженного оператора H справедливо неравенство

$$b(A) \geq g(A)\, f\left(\frac{c(A)}{4g(A)}\right). \tag{31}$$

Данная теорема позволяет получить необходимую в методе оценку сверху для g, зная оценки сверху для b и c. В самом деле, имеет место

Теорема 2 (ДЛС). Предположим, что $b > g f\left(\frac{c}{4g}\right)$, где f – определенная выше функция, а $b, g, c > 0$. Предположим, что $b \leq b_0$, $c \leq c_0$. Тогда $g \leq g_0$, где

$$g_0 = \frac{1}{2}\sqrt{c_0 b_0}\,\mathrm{cth}\,x_0, \quad x_0 = \sqrt{\frac{c_0}{4b_0}}. \tag{32}$$

Заметим, что в случае гармонического осциллятора, и только в этом случае, неравенство (31) превращается в равенство, что указывает на оптимальность функции f в (31).

Теорема 2, таким образом, сводит получение оценки сверху для температурной средней к оценке для д.ф. и средней от двойного коммутатора. Оценка сверху для д.ф. следует из т.н. гауссовой доминантности.

4. Оценка сверху для двухточечной функции Дюамеля

Наша цель состоит в получении оценки сверху для д.ф. в случае моделей в R^d, задаваемых с помощью бозе-операторов и описывающих поведение систем типа неидеального бозе-газа.

Рассмотрим систему бесспиновых частиц, введенную в разделе I. Ее

гамильтониан возьмем в немного более общем виде:

$$H = H_0 + H_1,$$
$$H_0 = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k, \tag{33}$$
$$H_1 = \frac{1}{2V}\sum_{p,q,k} \nu(k)\, a_p^+ a_q^+ a_{p+k} a_{q-k}.$$

Теорема 3. Для гамильтониана (33), удовлетворяющего условию

$$\omega_p \geq 0, \tag{34}$$

имеет место оценка

$$(a_p^+, a_p) \leq \beta^{-1}\omega_p^{-1}, \quad p \neq 0. \tag{35}$$

Следуя идее, впервые предложенной в [14], мы будем доказывать эту теорему на основе следующего утверждения.

Теорема 4. (Гауссова доминантность). Пусть $h_k \in C$ – произвольные комплексные числа. Наряду с (33) рассмотрим гамильтониан

$$H(h) = H_0(h) + H_1, \tag{36}$$

$$H_0(h) = \sum_{\omega_k} \omega_k (a_k^+ + h_k^*)(a_k + h_k). \tag{37}$$

Определим функционал

$$\mathcal{L}(\{h_k\}) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H(h)}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(\{h_k\}) \leq \mathcal{L}(\{0\}). \tag{38}$$

Докажем, что из теоремы 4 следует теорема 3.

Из (38) вытекает, что в точке $\{h_k\} = \{0\}$, являющейся стационарной точкой для $\mathcal{L}(\{h_k\})$, расположен локальный максимум этого функционала, что означает неположительную определенность квадратичной формы второго дифференциала $d^2\mathcal{L}$ в точке 0. Вычислим эту величину. Технически удобнее рассмотреть $Q(\{h_k\}) = \ln \mathcal{L}(\{h_k\})$ и ввести действительные переменные $x_k = \mathrm{Re}\, h_k$ и $y_k = \mathrm{Im}\, h_k$. Тогда будем иметь

$$Q(x,y) = -\beta\sum_k \omega_k (x_k^2 + y_k^2) + R(x,y),$$

где $R(x,y) = \ln \mathrm{Tr} \exp\{-\beta \sum_k \omega_k [x_k(a_k^+ + a_k) + i y_k (a_k^+ - a_k)] - \beta H(0)\}$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x_p} = -2\beta\omega_p x_p + \frac{\partial R}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y_p} = -2\beta\omega_p y_p + \frac{\partial R}{\partial y_p};$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_p \partial x_q} = -2\beta\omega_p \delta_{p,q} + \frac{\partial^2 R}{\partial x_p \partial x_q}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_p \partial y_q} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_p \partial y_q},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y_p \partial y_q} = -2\beta\omega_p \delta_{p,q} + \frac{\partial^2 R}{\partial y_p \partial y_q};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_p} = -\beta\omega_p \langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma \equiv -\beta\omega_p \frac{\mathrm{Tr}[(a_p^+ + a_p)\, e^{-\beta\Gamma(x,y)}]}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\Gamma(x,y)}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_p} = -i\beta\omega_p \langle a_p^+ - a_p\rangle_\Gamma \equiv -i\beta\omega_p \frac{\mathrm{Tr}[(a_p^+ - a_p)\, e^{-\beta\Gamma(x,y)}]}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\Gamma(x,y)}}$$

и введено обозначение

$$\Gamma(x,y) \equiv \sum_k \omega_k [x_k(a_k^+ + a_k) + i y_k (a_k^+ - a_k)] + H(0).$$

Уравнения для определения стационарных точек Q (совпадающих со стационарными точками $\mathcal{L}$) имеют вид

$$x_p = -\frac{1}{2}\langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma; \qquad y_p = -\frac{i}{2}\langle a_p^+ - a_p\rangle_\Gamma. \tag{39}$$

В силу правил отбора для гамильтониана (33) имеем, что (39) всегда имеют тривиальное решение $x_p = y_p = 0$. Покажем, что в этой точке второй дифференциал неположительно определен: $d^2 Q \leq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_p \partial x_q} &= -2\beta\omega_p \delta_{p,q} + \beta^2\omega_p\omega_q (a_p^+ + a_p, a_q^+ + a_q)_\Gamma - \\ &- \beta^2 \omega_p\omega_q \langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma \langle a_q^+ + a_q\rangle_\Gamma, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_p \partial y_q} &= i\beta^2\omega_p\omega_q (a_p^+ + a_p, a_q^+ - a_q)_\Gamma - \\ &- i\beta^2\omega_p\omega_q \langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma \langle a_q^+ - a_q\rangle_\Gamma, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial y_p \partial y_q} &= -2\beta\omega_p \delta_{p,q} - \beta^2\omega_p\omega_q (a_p^+ - a_p, a_q^+ - a_q)_\Gamma + \\ &+ \beta^2\omega_p\omega_q \langle a_p^+ - a_p\rangle_\Gamma \langle a_q^+ - a_q\rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

где введено обозначение для д.ф.:

$$(A, B)_\Gamma \equiv Z^{-1}\int_0^1 \mathrm{Tr}\left(e^{-x\beta\Gamma} A\, e^{-(1-x)\beta\Gamma} B\right) dx, \quad Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\Gamma}.$$

Рассматривая (40) в точке $\{x_k, y_k\} = \{0\}$, используя билинейность и симметричность д.ф. и правила отбора, получаем

$$d^2 Q\Big|_0 = \sum_p \left[-2\beta\omega_p + 2\beta^2\omega_p^2 (a_p^+, a_p)\right]\left[(dx_p)^2 + (dy_p)^2\right] \leq 0. \tag{41}$$

Из (41) сразу же следует требуемое теоремой 3 неравенство.

Замечание 1. Неравенство (38) названо гауссовой доминантностью в силу того, что оно обращается в равенство на гауссовых мерах, то есть в случае квадратичных гамильтонианов.

Замечание 2. Использование координатного представления позволяет на основе гауссовой доминантности получить немного более детальную оценку для д.ф. В частности, в одномерном случае ($\omega_p = \frac{1}{2} p^2$) имеем

$$(a_p^+, a_p) \leq \frac{2}{\beta p^2}\left(1 - \frac{\sin pL}{pL}\right), \quad p \neq 0,$$

где L – длина системы.

Докажем теорему 4.

Используя метод функционального интегрирования в голоморфном представлении, разработанный Березиным [2], введем оператор

$$\hat{U}(t,\tau) = e^{-itH_0(h)}\, e^{i(t-\tau)H}\, e^{i\tau H_0(h)}$$

и операторы

$$a_p(t) = e^{-iH_0(h)t}\, a_p\, e^{iH_0(h)t},$$

$$a_p^+(t) = e^{-iH_0(h)t}\, a_p^+\, e^{iH_0(h)t}.$$

Используя явный вид $H_0(h)$, можно получить, что соответствующие операторам $a_p(t)$ и $a_p^+(t)$ комплекснозначные функции есть

$$a_p(t) = e^{it\omega_p}(a_p + h_p) - h_p,$$
$$a_p^*(t) = e^{-it\omega_p}(a_p^* + h_p^*) - h_p^*. \qquad (42)$$

Тогда функционал $U(t,\tau|a^*,a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{U}(t,\tau)$, есть значение при $a_p(t)$, $a_p^*(t)$, даваемых (42), функционала $U_1(t,\tau|a^*,a)$ от произвольных функций $a_p(t)$, $a_p^*(t)$, где

$$U_1(t,\tau|a^*,a) = \exp\Big\{\int \frac{\delta}{\delta a_{p_1}(t_1)} \Delta(p_1,t_1;p_2,t_2) \frac{\delta}{\delta a_{p_2}^*(t_2)},$$
$$dp_1\,dp_2\,dt_1\,dt_2\Big\} \exp\Big\{ i\int_\tau^t V(s|a^*,a)\,ds\Big\}, \qquad (43)$$

$$V(t|a^*,a) = \sum_{p,q,k}{}' \nu(k)\, a_p^*(t)\, a_q^*(t)\, a_{p+k}(t)\, a_{q-k}(t).$$

Нормальная форма функционала оператора $e^{itH_0(h)}$ имеет вид

$$e^{itH_0(h)} = e^{(a^*+h^*)(e^{i\omega t}-1)(a+h)}, \qquad (44)$$

где мы используем сокращенное обозначение, опуская суммирование по импульсам и интегрирование по t типа

$$a^* f = \sum_p{}' \int dt\, a_p^*(t)\, f_p(t) \qquad \text{и т.д.}$$

Для U_1 имеем следующее представление:

$$U_1(t,\tau|a^*,a) = \iint dz\,dz^*\, e^{-zz^*}\, e^{a^*(R^{-1}+\Delta)^{-1}a},$$

где R -оператор с ядром

$$R(p_1,t_1|p_2,t_2) = R_1(p_1,p_2;t_1)\,\delta(t_1-t_2),$$

$$R_1(p_1,p_2;t) = V_1(p_1-p_2)\,z(p_1-p_2,t) + V_2(p_2-p_1)\,z^*(p_2-p_1,t)$$

$z(p,t)$, $z^*(p,t)$ -комплекснозначные функции, а $V_1(p)$, $V_2(p)$ -произвольные функции, удовлетворяющие условию

$$V_1(p)\,V_2(p) = \frac{1}{2V}\,\nu(p).$$

Δ -оператор с ядром

$$\Delta(p_1,t_1|p_2,t_2) = \theta(t_1-t_2)\,\delta_{p_1,p_2}\, e^{-i(t_2-t_1)\omega_{p_1}},$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$$

Используя явный вид (42), имеем

$$U(t,\tau|a^*,a) = \iint dz\,dz^*\, e^{-zz^*} \exp\{-h^*\mathcal{T}^{(0)}h -$$
$$-(a^*+h^*)\,\mathcal{T}(a+h) + (a^*+h^*)\,\mathcal{T}^{(-)}h + h^*\mathcal{T}^{(+)}(a+h)\}, \qquad (45)$$

где

$$\mathcal{T}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\,dt_2\, e^{it_2\omega_{p_2} - it_1\omega_{p_1}}\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z),$$
$$\mathcal{T}^{(+)}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\,dt_2\, e^{it_2\omega_{p_2}}\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z);$$
$$\mathcal{T}^{(-)}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\,dt_2\, e^{-it_1\omega_{p_1}}\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z);$$
$$\mathcal{T}^{(0)}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\,dt_2\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z),$$

а $S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z)$ -ядро оператора $R(1+\Delta R)^{-1}$.

Используя формулы (44),(45) при $\tau = 0$ в формулу умножения операторов, находим функционал, отвечающий нормальной форме оператора $\exp(itH)$:

$$e^{itH} = \iint dz\,dz^* \exp\{-zz^* - aa^* +$$
$$+ (a^*+h^*)(e^{i\omega t}-1)h - h^*\mathcal{T}(a+h) + h^*\mathcal{T}^{(-)}h + \qquad (46)$$

$$+h^{*}\mathcal{T}^{(+)}(a+h)-h^{*}\mathcal{T}^{(0)}h+$$

$$+[a^{*}+(a^{*}+h^{*})(e^{i\omega t}-1)][a-\mathcal{T}(a+h)+\mathcal{T}^{(-)}h]\}.$$

Далее, вычисляя шпур:

$$\operatorname{Tr} e^{itH}=\iint dz\,dz^{*}\iint da\,da^{*}\exp\{h^{*}\mathcal{T}^{(+)}a+$$

$$+a^{*}e^{i\omega t}\mathcal{T}^{(-)}h+h^{*}[\mathcal{T}^{(+)}+e^{i\omega t}\mathcal{T}^{(-)}-\mathcal{T}^{(0)}]h- \tag{47}$$

$$-(a^{*}+h^{*})[e^{i\omega t}(\mathcal{T}-1)+1](a+h)\},$$

делая в (47) замену переменных интегрирования $a=b-h$, совершая преобразование $t=i\beta$, где $Im\,\beta=0$, имеем

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta H}=\iint dz\,dz^{*}e^{-zz^{*}}\det[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]^{-1}e^{h^{*}Qh}, \tag{48}$$

где

$$Q=-\mathcal{T}^{(0)}+\mathcal{T}^{(+)}[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]^{-1}e^{-\beta\omega}\mathcal{T}^{(-)}. \tag{49}$$

Заметим, что оператор $1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})$ положительно определен, то есть

$$Re\{h^{*}[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]h\}\geq \varkappa h^{*}h, \tag{50}$$

где $\varkappa>0$ - вещественное число. Операторы $\mathcal{T}^{(0)}, \mathcal{T}^{(\pm)}$ и $\mathcal{T}$ определяются ядрами

$$\mathcal{T}^{(0)}(z^{*},z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^{*},z);$$

$$\mathcal{T}^{(+)}(z^{*},z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,e^{t_2\omega p_2}S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^{*},z);$$

$$\mathcal{T}^{(-)}(z^{*},z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,e^{t_1\omega p_1}S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^{*},z); \tag{51}$$

$$\mathcal{T}(z^{*},z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,e^{t_1\omega p_1}e^{t_2\omega p_2}S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^{*},z).$$

Обозначая через $S^{(1)}(p_1,t_1;p_2,t_2|z^{*},z)$ ядро оператора ΔS, имеем, учитывая (51):

$$e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})=\int_0^\infty[\delta(\beta-t)\delta_{p_1,p_2}- \tag{52}$$

$$-\theta(\beta-t)S^{(1)}(p_1,t;p_2,\beta|z^{*},z)]e^{-t\omega_{p_2}}dt.$$

Из (50)-(52) и условия (34) видно, что

$$|\mathcal{T}^{(+)}|\leq|\mathcal{T}^{(0)}|,\ |\mathcal{T}^{(-)}|\leq e^{\beta\omega}|\mathcal{T}^{(0)}|,\ |1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})|\geq|\mathcal{T}^{(0)}|. \tag{53}$$

Учитывая, что $\mathcal{T}(\omega=0)=\mathcal{T}^{(0)}$, из (50), (53) заключаем, что

$$Re(h^{*}Qh)\leq Re\{h^{*}[-\mathcal{T}^{(0)}+|\mathcal{T}^{(+)}(1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T}))^{-1}e^{-\beta\omega}\mathcal{T}^{(-)}|]h\}\leq 0,$$

то есть квадратичная форма в экспоненте подынтегрального выражения (48) отрицательно определена, таким образом

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta H(h)}\leq$$

$$\leq\iint dz\,dz^{*}e^{-zz^{*}}\det[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]^{-1}=\operatorname{Tr} e^{-\beta H(0)},$$

что завершает доказательство теоремы 4.

Оценки типа (38) известны в квантовой теории поля как $grad\,\varphi$ - оценки, а условие появления бозе-конденсата есть обобщение на температурный случай представления Каллена-Лемана.

5. Конденсация в неидеальном бозе-газе

Сейчас мы применим результаты разделов 3 и 4 и вычислим двойной коммутатор в модели неидеального бозе-газа для доказательства фазового перехода, сопровождающегося появлением бозе-конденсата и обуславливающего явление сверхтекучести.

Определим, как и выше, следующие величины:

$$b_p=(a_p^{+},a_p),\quad g_p=\tfrac{1}{2}\langle a_pa_p^{+}+a_p^{+}a_p\rangle,\quad c_p=\langle[a_p^{+},[\beta H,a_p]]\rangle. \tag{54}$$

Имеем следующее правило сумм в данной модели:

$$V^{-1}\sum_{p}\left(g_p-\frac{1}{2}\right)=n, \tag{55}$$

где n -плотность числа частиц. Из (55) и теоремы 2 немедленно следует

Теорема 5(ДЛС). Предположим, что существуют фиксированные измеримые функции B_p, C_p от p и функция $\mathcal{D}(\beta)$, такие, что справедливы следующие оценки:

$$n \geq \mathcal{D}(\beta), \quad \lim_{\beta\to\infty}\mathcal{D}(\beta)\geq\mathcal{D}_\infty;$$

$$b_p \leq \beta^{-1}B_p, \quad B_p<\infty, \; p\neq 0;$$

$$c_p \leq \beta C_p.$$

Предположим далее, что

$$\lim_{V\to\infty} V^{-1}\sum_{p\neq 0}B_p=\int B_p\frac{dp}{(2\pi)^d},$$

где d -размерность пространства. Дальний порядок существует при некоторой конечной β тогда, когда выполнены соотношения

$$\mathcal{D}_\infty > (2\pi)^{-d}\int\frac{1}{2}\sqrt{B_pC_p}\,dp, \tag{56}$$

$$\int B_p\,dp<\infty, \quad \mathcal{D}_\infty<\infty. \tag{57}$$

Температура β^{-1} при этом такова, что

$$\mathcal{D}(\beta) > (2\pi)^{-d}\int\frac{1}{2}\sqrt{B_pC_p}\,\mathrm{cth}\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\frac{C_p}{B_p}}\right)dp. \tag{58}$$

В частности, если $\mathcal{D}(\beta)$- монотонно неубывающая функция β и выполнены соотношения (56), (57), то дальний порядок существует для $\beta>\beta_c$, где β_c есть единственное решение уравнения

$$\mathcal{D}(\beta_c) = (2\pi)^{-d}\int\frac{1}{2}\sqrt{B_pC_p}\,\mathrm{cth}\left(\frac{1}{2}\beta_c\sqrt{\frac{C_p}{B_p}}\right)dp. \tag{59}$$

Применим теорему 5 к исследуемой модели. Из предыдущего раздела известно, что $B_p=\omega_p^{-1}$. $\mathcal{D}(\beta)$ есть, очевидно, $n=\frac{1}{12\pi^2}p^3_{max}(\beta)$,

где p_{max} -импульс Дебая. Прямое вычисление дает

$$\beta^{-1}c_p=\omega_p+\frac{1}{V}\sum_k\left[\nu(0)+\nu(p-k)\right]\langle a_k^+a_k\rangle. \tag{60}$$

Предполагая положительность и ограниченность $0\leq\nu(k)\leq\tilde{\nu}$ потенциала, имеем

$$C_p=\omega_p+n\nu_0, \tag{61}$$

где введено обозначение $\nu_0\equiv\nu(0)+\tilde{\nu}$. Условие (57) принимает вид

$$\int\omega_p^{-1}dp<\infty, \quad n<\infty. \tag{62}$$

Если положить, что $\omega_p=\frac{1}{2}p^2$, то (62) будет выполнено при $d\geq 3$, что соответствует теореме q^{-2}. Отметим, что всюду в интегралах по импульсам верхний предел интегрирования ограничен некоторым максимальным импульсом - импульсом Дебая. В пространственно-трехмерном случае условие (56) принимает вид

$$n>\frac{1}{12\pi^2}\int_0^{p_{max}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_p+n\nu_0}{\omega_p}}\,p^2dp.$$

Считая, что $\omega_p=\frac{1}{2}p^2$, имеем

$$n>\frac{1}{12\pi^2}\left[\left(p^2_{max}+2n\nu_0\right)^{\frac{3}{2}}-\left(2n\nu_0\right)^{\frac{3}{2}}\right]. \tag{63}$$

Для простоты можно положить, что $p^3_{max}=6\pi^2(n-n_0)$, где n_0 -число частиц в единице объема конденсата, $n_0=n_0(\beta)$, $0<n_0<n$. Легко заметить, что условие (63) выполняется при любых n. Таким образом, нами доказана

Теорема 6. В модели неидеального бозе-газа с положительным ограниченным фурье-образом потенциала взаимодействия при любых концентрациях $n<\infty$ при достаточно низких температурах ($\beta>\beta_c$) существует дальний порядок. При этом для определения температуры фазового перехода имеем уравнение

$$n=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{p_{max}(\beta_c)}\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2n\nu_0}{p^2}}\,\mathrm{cth}\left[\frac{1}{2}\beta_c\sqrt{\frac{p^2}{2}\left(\frac{p^2}{2}+n\nu_0\right)}\right]p^2dp. \tag{64}$$

Условие ограниченности потенциала $\nu(p)$, по-видимому, можно ослабить.

Из теоремы 2 и доказанных выше оценок в модели неидеального бозе-газа можно получить оценку сверху для спектра элементарных возбуждений в модели. Действительно, из соотношений (32) немедленно имеем

$$\langle a_p a_p^+ + a_p^+ a_p \rangle \le \sqrt{1+\frac{n\nu_0}{\omega_p}}\, \mathrm{cth}\left[\frac{1}{2}\beta\sqrt{\omega_p(\omega_p+n\nu_0)}\right]. \tag{65}$$

При нулевой температуре из (65) получаем

$$\langle a_p a_p^+ + a_p^+ a_p \rangle\Big|_{\beta^{-1}=0} \le \sqrt{1+\frac{n\nu_0}{\omega_p}}. \tag{66}$$

С другой стороны, известен результат теоремы q^{-2} при $\beta^{-1}=0$:

$$\langle a_p a_p^+ + a_p^+ a_p \rangle\Big|_{\beta^{-1}=0} \ge \frac{n_0(\beta^{-1}=0)}{n}\, \frac{\mathcal{E}(p)}{p^2}, \tag{67}$$

где $\mathcal{E}(p)$ -энергия элементарных возбуждений. Полагая в (67) $n_0 \equiv \xi n$ и сравнивая с (66), получаем

$$\xi\, \mathcal{E}(p) \le \sqrt{p^4 + 2n\nu_0 p^2}, \tag{68}$$

что находится в соответствии с результатами Боголюбова для слабонеидеального бозе-газа и результатами диаграммной техники для гриновских функций [23]. Заметим, что оценка (68) дает независимое подтверждение сверхтекучего характера фазового перехода в модели. Величина $n\nu_0$, входящая в (68), связана с функцией Грина Σ_{11} модели.

Автор искренне благодарен Н.Н.Боголюбову за постоянное внимание к работе и А.М.Курбатову за многолетнее плодотворное сотрудничество в процессе проведения данного исследования.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Н.Н.Боголюбов(мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.:Наука, 1984.
2. Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
3. Д.Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.
4. Н.Н.Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. Препр. Д-781, Дубна, ОИЯИ /1961/.
5. Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР. Сер.физ.,11, 77 /1947/.
6. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys.Rev., 87, 420 /1952/.
7. R.Peierls. Proc.Camb.Phil.Soc., 32, 477 /1936/.
8. R.B.Griffiths. Phys.Rev., A136, 437 /1964/.
9. Р.Л.Добрушин. Теория вероятн. и ее прим., 10, 209 /1965/.

10. J.Ginibre. Comm.Math.Phys., 14, 205 /1969/.
11. D.W.Robinson. Comm.Math.Phys., 14, 195 /1969/.
12. J.Glimm, A.Jaffe, T.Spencer. Comm.Math.Phys., 45, 203 /1975/.
13. Я.Г.Синай. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
14. J.Fröhlich, B.Simon, T.Spencer. Comm. Math. Phys., 50, 79 /1976/.
15. F.J.Dyson, E.H.Lieb, B.Simon. Phys. Rev. Lett., 37, 120 /1976/.
16. N.D.Mermin, H.Wagner. Phys.Rev.Lett., 17, 1133 /1966/.
17. J.Fröhlich. Bull.Amer.Math.Soc., 84, 165 /1978/.
18. R.B.Griffiths. Phys.Rev., 152, 240 /1966/.
19. R.Kubo. J.Phys.Soc.Japan, 12, 570 /1957/.
20. G.Roepstorff. Comm.Math.Phys., 46, 253 /1976/.
21. N.N.Bogolyubov. Phys.Abh.S.U., 1, 113 /1962/.
22. J. Naudts, A.Verbeure, R.Weder. Comm.Math.Phys., 44, 87 /1975/.
23. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Статистическая физика, часть 2. М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 мая 1988 года.