сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-88-436

Н.Н.Боголюбов (мл.), С.Ф.Лягушин*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСКЛЮЧЕНИЯ БОЗОННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К АНАЛИЗУ ЭВОЛЮЦИИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С БОЗОННЫМИ ПОЛЯМИ

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1988

В последние годы для получения математически строгих результатов в динамической теории квантово-статистических систем широко используется метод исключения бозонных переменных, восходящий к работам Н.Н.Боголюбова и Н.Н.Боголюбова (мл.) /I/,/2/. Этот метод позволяет получать динамические уравнения для физических наблюдаемых - средних от операторов в представлении Гейзенберга, описывающих модельную "атомную" систему, взаимодействующую с бозонным полем. В результате применения метода строится иерархия кинетических уравнений, в которых корреляционные функции низших порядков по операторам, действующим на переменные М - подсистемы (вещества), зависят от корреляционных функций высших порядков, - аналог цепочки Боголюбова для кинетических функций распределения /3/. Расцепляя корреляционные функции, можно получить замкнутую систему уравнений, описывающую в выбранном приближении динамику системы. В частности, с помощью метода исключения бозонных переменных получено изящное математическое описание процесса в системах сверхизлучательного типа, находящееся в согласии с экспериментом, в том числе с учетом неоднородного лоренцева уширения, влияния накачки, внешних классических полей, многофотонных процессов /4/-/9/.

Настоящая работа посвящена применению метода исключения бозонных переменных к описанию эволюции двух модельных систем, представляющих значительный физический интерес.

I. МОДЕЛЬ ВАГНЕРА КРИСТАЛЛА С КОНКУРИРУЮЩИМИ МЕХАНИЗМАМИ РЕЛАКСАЦИИ

В работе Вагнера /IO/ предложена модель кристалла, в котором частицы в примесных центрах могут находиться в двух состояниях с различной энергией. Туннелирование между этими состояниями обеспечивает дополнительный механизм релаксации кроме обычного фононного. При обычном использовании квазиспиновых операторов для описания 2-уровневой системы гамильтониан работы /IO/ для случая одной моцы и одного примесного центра имеет вид

$$H = H_p + H_\Delta + H_{\Delta p}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $H_p = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{m} + m\omega^2 Q^2\right) - \frac{1}{2}\hbar\omega$ – фононный гамильтониан,

здесь $[Q,P] = i\hbar$,

$$H_\Delta = \Delta\sigma_x \qquad \text{– туннельный гамильтониан,}$$

$$H_{\Delta p} = k\sigma_z Q \qquad \text{– гамильтониан взаимодействия.}$$

Вводя стандартным образом бозонные операторы a, a^+ для описания фононной моды /II/:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,Q + i\,\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}},$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,Q - i\,\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}},$$

приходим к гамильтониану

$$H = \hbar\omega a^+ a + \Delta\sigma_x + \varkappa\sigma_z(a^+ + a), \qquad (2)$$

$$\varkappa = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

Вагнер рассматривает характер эволюции системы с гамильтонианом (I) при различных соотношениях параметров $\hbar\omega, \Delta$ и $\varkappa$.

Имея в виду проиллюстрировать технику работы с методом исключения бозонных переменных, ограничимся случаем малости взаимодействия: $\varkappa \ll \Delta, \varkappa \ll \hbar\omega$. В то же время обобщим гамильтониан (2) на случай многих мод фононного поля и N примесных центров. Исследуем динамику системы с гамильтонианом

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \Delta\sum_i \sigma_{xi} + \sum_i\sum_k \varkappa_k \sigma_{zi}(a_k^+ + a_k). \qquad (3)$$

Для большего удобства в применении стандартной техники работ /4/-/9/ произведем преобразование

$$\sigma_z \to \sigma_x, \quad \sigma_x \to -\sigma_z, \quad \sigma_y \to \sigma_y,$$

соответствующее повороту осей координат.

Гамильтониан нашей задачи приобретает вид

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k - \Delta\sum_i \sigma_{zi} + \sum_i\sum_k \frac{\varkappa_k}{2}(a_k^+ + a_k)(\sigma_i^+ + \sigma_i^-), \qquad (4)$$

$$\sigma_i^+ = \sigma_{xi} + i\sigma_{yi}, \quad \sigma_i^- = \sigma_{xi} - i\sigma_{yi}.$$

Будем использовать обозначения

$$S_z = \sum_i \sigma_{zi}, \quad S^\pm = \sum_i \sigma_i^\pm, \quad C_k = C_k^+ = \frac{\varkappa_k}{2}(S^+ + S^-),$$

$$H_M = -\Delta S_z,$$

$$H_{MF} = \sum_k (a_k^+ C_k + a_k C_k^+).$$

Для среднего от произвольного оператора $\mathcal{O}$, действующего только на переменные M – подсистемы, в представлении Гейзенберга получаем, применяя стандартную методику с исключением бозонных переменных, уравнение

$$\frac{\partial\langle\mathcal{O}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\mathcal{O}, H_M]\rangle + \frac{1}{\hbar^2}\sum_k\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i\omega_k(t-\tau)}\Big\{N_k\langle C_k(\tau)[\mathcal{O}(t), C_k^+(t)]\rangle +$$
$$+ (1+N_k)\langle[C_k^+(t), \mathcal{O}(t)]C_k(\tau)\rangle\Big\} + \qquad (5)$$
$$+ \frac{1}{\hbar^2}\sum_k\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{i\omega_k(t-\tau)}\Big\{(1+N_k)\langle C_k^+(\tau)[\mathcal{O}(t), C_k(t)]\rangle + N_k\langle[C_k(t), \mathcal{O}(t)]C_k^+(\tau)\rangle\Big\},$$

где $N_k = 1/\{\exp(\frac{\hbar\omega_k}{\theta_F}) - 1\}$, θ_F – начальная температура фононной подсистемы. Для перехода к марковскому приближению положим

$$S^+(\tau) \approx S^+(t)\, e^{-i\frac{\Delta}{\hbar}(\tau - t)},$$

$$S^-(\tau) \approx S^-(t)\, e^{i\frac{\Delta}{\hbar}(\tau - t)},$$

откуда $C_k(\tau) \approx C_k(t)\cos\frac{\Delta}{\hbar}(\tau - t) - i\,(S^+(t) - S^-(t))\sin\frac{\Delta}{\hbar}(\tau - t)$.

Используем представление об адиабатическом включении взаимодействия в момент $t_0 \to -\infty$ и произведем замену

$$\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\pm i(\omega - \frac{\Delta}{\hbar})(\tau - t)} \longrightarrow \pi\delta\left(\omega - \frac{\Delta}{\hbar}\right) \to \frac{\pi}{c}\delta\left(k - \frac{\Delta}{c\hbar}\right).$$

От суммирования по фононным модам перейдем к интегралу

$$\sum_k \ldots \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\, 4\pi^2 \int_0^\infty \ldots k^2 dk.$$

Отсюда ясно, что члены $\sim \delta(\omega + \frac{\Delta}{\hbar})$ вклада в окончательное уравнение не дадут.

Получаем уравнение в марковском приближении

$$\frac{\partial\langle\mathcal{O}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\mathcal{O}, H_M]\rangle + \nu N_{k_\Delta}\langle S^+[\mathcal{O}, S^+ + S^-]\rangle +$$

$$+\nu(1+N_{k_\Delta})\langle[S^+ + S^-, O]S^+\rangle + \nu(1+N_{k_\Delta})\langle S^-[O, S^+ + S^-]\rangle +$$

$$+\nu N_{k_\Delta}\langle[S^+ + S^-, O]S^-\rangle, \qquad (6)$$

где использованы обозначения

$$k_\Delta = \frac{\Delta}{c\hbar},$$

$$\nu = \frac{V\varkappa_{k_\Delta}^2 k_\Delta^2}{8c\hbar^2} = \frac{V\Delta^2}{8c^3\hbar^4}\varkappa_{k_\Delta}^2,$$

$$N_{k_\Delta} = 1/\left\{\exp\left(\frac{\hbar\omega_{k_\Delta}}{\theta_F}\right)-1\right\} = 1/\left\{\exp\left(\frac{\Delta}{\theta_F}\right)-1\right\}.$$

Тогда для $O = S_z$ имеем

$$\frac{\partial\langle S_z\rangle}{\partial t} = -2\nu(1+2N_{k_\Delta})\langle S_z\rangle - \nu\langle (S^+)^2 + (S^-)^2 - S^+S^- - S^-S^+\rangle \qquad (7)$$

Из физических соображений можно пренебречь быстроосциллирующими функциями $\langle (S^+)^2\rangle$, $\langle (S^-)^2\rangle$. Уравнение (7) упрощается:

$$\frac{\partial\langle S_z\rangle}{\partial t} = -4\nu(1+N_{k_\Delta})\langle S_z\rangle + 2\nu\langle S^+S^-\rangle. \qquad (8)$$

Полагаем $O = S^+S^-$. Пренебрегая быстроосциллирующими средними, получаем уравнение

$$\frac{\partial\langle S^+S^-\rangle}{\partial t} = 2\nu N_{k_\Delta}\langle S^+S^-S_z - S^+S^-\rangle - 2\nu(1+N_{k_\Delta})\langle S_zS^+S^- - 2S_z^2\rangle -$$
$$-2\nu(1+N_{k_\Delta})\langle S^+S^-S_z - 2S_z^2\rangle + 2\nu N_{k_\Delta}\langle S^+S^-S_z - S^+S^-\rangle. \qquad (9)$$

Целесообразно на данном этапе использовать расцепления

$$\langle S^+S^-S_z\rangle \approx \langle S^+S^-\rangle\langle S_z\rangle,$$

$$\langle S_z^2\rangle \approx \langle S_z\rangle\langle S_z\rangle.$$

Приходим к уравнению

$$\frac{\partial\langle S^+S^-\rangle}{\partial t} = -4\nu\langle S^+S^-\rangle\langle S_z\rangle + 8\nu(1+N_{k_\Delta})\langle S_z\rangle^2. \qquad (10)$$

В уравнении (10) пренебрегли N_{k_Δ} по сравнению с $\langle S_z\rangle \sim N$.

Уравнения (8) и (10) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных

$$y_1 = \langle S_z\rangle,$$

$$y_2 = \langle S^+S^-\rangle.$$

Для дальнейшего исследования системы уравнений (8) и (10) введем обозначения:

$$A = 4\nu(1+N_{k_\Delta}),$$

$$B = 2\nu.$$

Система запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -Ay_1 + By_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2By_1y_2 + 2Ay_1^2. \end{cases} \qquad (11)$$

Система (11) имеет интеграл движения

$$y_1^2 + y_2 = const \equiv C \qquad (12)$$

и легко сводится к одному уравнению

$$\frac{dy_1}{dt} = -Ay_1 + B(C - y_1^2), \qquad (13)$$

от которого заменой переменной $y = y_1 + \frac{A}{2B}$ переходим к табличному:

$$y' + By^2 = BD^2,$$

где $D^2 = \frac{A^2}{4B^2} + C$.

Его решение с начальными условиями $t = 0$, $y = y_0$ выписывается в виде (см. /12/, формула 1.23)

$$y = \frac{y_0BD + BD^2\,\mathrm{th}(BDt)}{BD + By_0\,\mathrm{th}(BDt)}.$$

Поведение решения уравнения (13) существенно зависит от начальных условий. Предполагая начальное состояние "атомной" подсистемы равновесным с температурой θ_M, получаем для свободной энергии на один примесный центр

$$F = -\theta_M \ln 2\,\mathrm{ch}\frac{\Delta}{2\theta_M}.$$

Тогда в начальном состоянии

$$\langle S_z\rangle = \left\langle\sum_i \sigma_{zi}\right\rangle = -N\frac{\partial F}{\partial\Delta} = \frac{N}{2}\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2\theta_M} \qquad (14)$$

и в предположении $<\sum_{i\neq j}\sigma_i^+\sigma_j^->=0$

$$<S^+S^->=\frac{N}{2}\left(1+th\frac{\Delta}{2\theta_M}\right). \qquad (I5)$$

Систему уравнений (II) с начальными условиями (I4),(I5) легко исследовать численно. При положительных θ_M она описывает обычный релаксационный процесс, характер которого определяется соотношением θ_F и θ_M (рис.I,2). Система асимптотически стремится к состоянию, в котором $y_2=\frac{A}{B}y_1=2(1+N_{k_\Delta})y_1$.

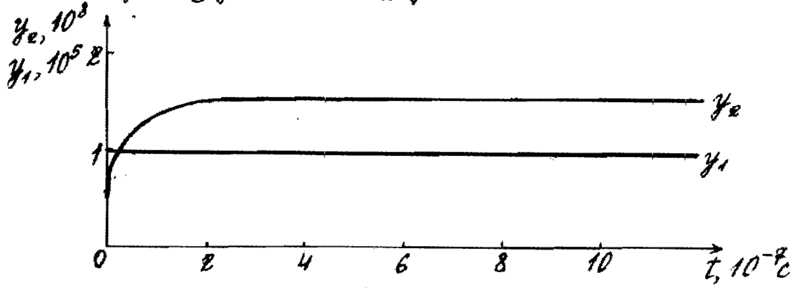

Рис.I. Релаксационный процесс в системе при больших начальных y_1.

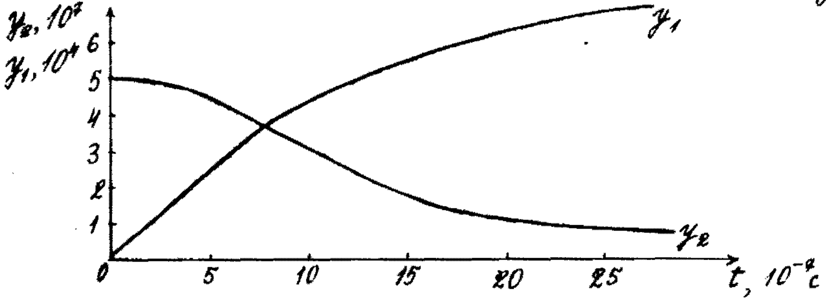

Рис.2. Релаксационный процесс в системе при малых начальных y_1 .

Учитывая оценку величины туннельного матричного элемента /I3/,видим, что в обычных условиях $\Delta \ll \theta_M$ (рис.2).

Если же в"атомной" подсистеме создать состояние, описываемое отрицательной температурой θ_M , поведение y_1 и y_2 , как ясно из существования интеграла движения (I2), приобретает вид, характерный для систем сверхизлучательного типа (рис.3).

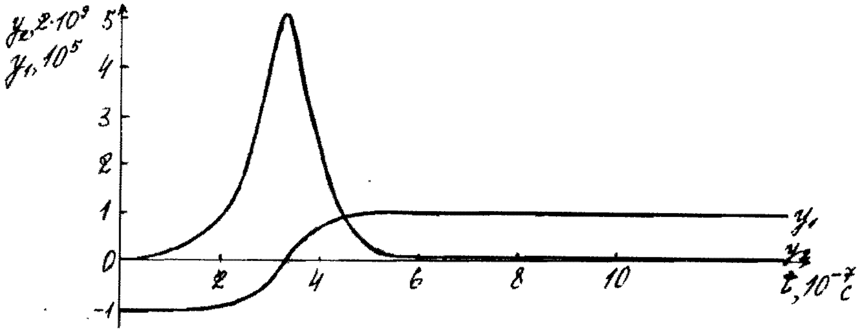

Рис.3. Релаксационный процесс в системе при отрицательных начальных y_1 .

Для системы с гамильтонианом (4), выписывая в явном виде формальные решения уравнений движения для бозонных операторов, нетрудно получить связь

$$<a_k^+(t)a_k(t)>=<a_k^+(t_0)a_k(t_0)>+\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}d\tau\, d\tau' e^{i\omega_k(\tau-\tau')}<C_k^+(\tau')C_k(\tau)>,$$

откуда, пренебрегая $<(S^\pm)^2>$, получаем

$$\sum_k<a_k^+(t)a_k(t)>=\sum_k\frac{1}{exp(\frac{\hbar\omega_k}{\theta_F})-1}+\frac{g_{k_\Delta}^2}{4\hbar^2}<S^+(t)S^-(t)>.$$

Соответственно, "сверхизлучательный" пик y_2 описывает перекачку энергии от "атомной" к фононной подсистеме, что показывает возможность генерации фононов и значительного изменения релаксационных процессов в модели Вагнера кристалла с примесью.

2. СУПЕРФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ В 2-УРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим простейшую модель, позволяющую описывать суперфлуоресценцию, - гамильтониан Дикке в приближении вращающейся волны для системы, малой по сравнению с характерной длиной волны (/4/,/I4/):

$$H_D=\sum_k\hbar\omega_k a_k^+a_k+\hbar\Omega R_3+\sum_k\hbar g_k\left(R^+a_k+R^-a_k^+\right). \qquad (I6)$$

Здесь $R_\alpha=\sum_i\sigma_{\alpha i}$, $\alpha=\pm,3$,

Ω - частота резонансного перехода,

g_k - константа квазиспин - фотонного взаимодействия.

Справедливы коммутационные соотношения

$$[R^+, R^-] = 2R_3,$$
$$[R_3, R^{\pm}] = \pm R^{\pm}.$$

Метод исключения бозонных переменных сводит изучение динамики системы к рассмотрению иерархии марковских уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}(t)\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle [H_M(t), \mathcal{O}(t)]\rangle =$$
$$= \Gamma\{\langle [R^+(t), \mathcal{O}(t)]R^-(t)\rangle + \langle R^+(t)[\mathcal{O}(t), R^-(t)]\rangle\},$$

где обозначено $H_M = \hbar\Omega R_3$.

Данная модель хорошо изучена, но в стороне оставался вопрос о влиянии корреляционных функций высших порядков. Методика работ /4/-/9/ дает возможность простого численного анализа этой проблемы. Фактически нужно сравнить решения различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

а) Замкнутая система уравнений относительно корреляционных функций не выше 2- го порядка по операторам R_α (традиционно используемое приближение):

$$y_1 = \langle R_3\rangle, \quad y_2 = \langle R^+R^-\rangle .$$

Используем расцепление $\langle R^+R^-R_3\rangle \approx \langle R^+R^-\rangle\langle R_3\rangle$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 4\Gamma y_2 y_1 - 4\Gamma y_2 . \end{cases} \tag{17}$$

б) Замкнутая система уравнений относительно корреляционных функций не выше 3- го порядка:

$$y_1 = \langle R_3\rangle, \; y_2 = \langle R^+R^-\rangle, \; y_3 = \langle R^+R^-R_3\rangle .$$

Используем расцепления $\langle R^+R^-R_3^2\rangle \approx \langle R^+R^-R_3\rangle\langle R_3\rangle,$
$\langle R^+R^-R^+R^-\rangle \approx \langle R^+R^-\rangle\langle R^+R^-\rangle$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 4\Gamma y_3 - 4\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 4\Gamma y_3 y_1 - 2\Gamma y_2^2 - 8\Gamma y_3 + 4\Gamma y_2 . \end{cases} \tag{18}$$

б') $y_1 = \langle R_3\rangle, \; y_2 = \langle R^+R^-\rangle, \; y_3 = \langle R^+R^-R_3\rangle, \; y_4 = \langle R_3^2\rangle .$

Расцепления $\langle R^+R^-R_3^2\rangle \approx \langle R^+R^-\rangle\langle R_3^2\rangle,$
$\langle R^+R^-R^+R^-\rangle \approx \langle R^+R^-\rangle\langle R^+R^-\rangle$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 4\Gamma y_3 - 4\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 4\Gamma y_2 y_4 - 2\Gamma y_2^2 - 8\Gamma y_3 + 4\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_4}{dt} = -4\Gamma y_3 + 2\Gamma y_2 . \end{cases} \tag{19}$$

б'') Вариант расцепления, объединяющий б) и б') :

$$\langle R^+R^-R_3^2\rangle \approx \alpha\langle R^+R^-R_3\rangle\langle R_3\rangle + (1-\alpha)\langle R^+R^-\rangle\langle R_3^2\rangle,$$
$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 4\Gamma y_3 - 4\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = \alpha\cdot 4\Gamma y_3 y_1 + (1-\alpha)\cdot 4\Gamma y_2 y_4 - 2\Gamma y_2^2 - 8\Gamma y_3 + 4\Gamma y_2 \\ \dfrac{dy_4}{dt} = -4\Gamma y_3 + 2\Gamma y_2 . \end{cases} \tag{20}$$

в) Замкнутая система уравнений относительно корреляционных функций не выше 4- го порядка:

$$y_1 = \langle R_3\rangle, \quad y_2 = \langle R^+R^-\rangle, \quad y_3 = \langle R^+R^-R_3\rangle,$$
$$y_4 = \langle R_3^2\rangle, \quad y_5 = \langle R^+R^-R_3^2\rangle, \quad y_6 = \langle (R^+R^-)^2\rangle .$$

Расцепления:

$$\langle (R^+R^-)^2 R_3\rangle \approx \alpha\langle (R^+R^-)^2\rangle\langle R_3\rangle + (1-\alpha)\langle R^+R^-\rangle\langle R^+R^-R_3\rangle,$$
$$\langle R^+R^-R_3^3\rangle \approx \beta\langle R^+R^-R_3^2\rangle\langle R_3\rangle + (1-\beta)\langle R^+R^-R_3\rangle\langle R_3^2\rangle,$$
$$0 \leq \alpha \leq 1 , \quad 0 \leq \beta \leq 1 .$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt} = -2\Gamma y_2 \\
\dfrac{dy_2}{dt} = 4\Gamma y_3 - 4\Gamma y_2 \\
\dfrac{dy_3}{dt} = 4\Gamma y_5 - 2\Gamma y_6 - 8\Gamma y_3 + 4\Gamma y_2 \\
\dfrac{dy_4}{dt} = -4\Gamma y_3 + 2\Gamma y_2 \\
\dfrac{dy_5}{dt} = \beta\cdot 4\Gamma y_5 y_1 + (1-\beta)\cdot 4\Gamma y_3 y_4 - 12\Gamma y_5 + 12\Gamma y_3 - \\
\qquad - \alpha\cdot 4\Gamma y_6 y_1 - (1-\alpha)\cdot 4\Gamma y_2 y_3 + 2\Gamma y_6 - 4\Gamma y_2 \qquad (21) \\
\dfrac{dy_6}{dt} = \alpha\cdot 8\Gamma y_6 y_1 + (1-\alpha)\cdot 8\Gamma y_2 y_3 - 8\Gamma y_6 + 8\Gamma y_5 - 16\Gamma y_3 + 8\Gamma y_2 .
\end{cases}
$$

В системах уравнений (I7)-(2I) переменные y_1, y_2 имеют одинаковый физический смысл и представляют наибольший интерес. Их поведение исследовано численно при значениях параметров

$$N = 10^{10}, \quad \Gamma = 5\cdot 10^{2}.$$

Начальные условия выбирались в виде

$$y_1 = \frac{N}{2},\ y_2 = N,\ y_3 = \frac{N^2}{2},\ y_4 = \frac{N^2}{4},\ y_5 = \frac{N^3}{4},\ y_6 = N^2,$$

что соответствует полностью инвертированной системе излучателей и отсутствию корреляции между ними.

Параметры α и β варьировались.

Вычисления показали идеальное совпадение поведения y_1 и y_2 для всех построенных систем уравнений. Время задержки сверхизлучательного импульса t_D, фиксируемое по прохождению y_1 через 0, совпадало во всех случаях при оптимальном выборе шага по t до 4- го знака:

$$t_D = 230{,}0\cdot 10^{-14}.$$

В то же время при больших временах значения y_1 и y_2, полученные из систем уравнений (I8)-(2I), уходили в нефизическую область, что связано с накоплением вычислительной ошибки. Это свидетельствует в пользу применения традиционного приближения с расцеплением тройных корреляторов, поскольку вклад высших корреляторов несущественен, но более сложные вычисления могут привести к искажению результата погрешностями ЭВМ.

Авторы выражают глубокую благодарность А.С.Шумовскому за чрезвычайно полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. N.N.Bogolubov. JINR, E17-11822, Dubna, 1978.

2. Н.Н.Боголюбов, Н.Н.Боголюбов (мл.) ЭЧАЯ, I980, т.II, вып. 2, стр.245.
3. Н.Н.Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, I946.
4. Н.Н.Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен, А.С.Шумовский. ТМФ, 52, 423, I982.
5. Н.Н.Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен, А.С.Шумовский. ТМФ, 53, I08, I982.
6. N.N.Bogolubov (Jr.), Fam Le Kien, A.S.Shumovsky - Physica A, 1984, 128, 82.
7. Н.Н.Боголюбов (мл.), Е.К.Башкиров, Фам Ле Киен, А.С.Шумовский. ОИЯИ, Р I7-84-67I, Дубна, I984; Physica A, ,I33, 4I3, I985.
8. Н.Н.Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен, А.С.Шумовский. ТМФ, 62, 46I, I985.
9. Н.Н.Боголюбов (мл.), И.К.Кудрявцев, С.Ф.Лягушин, А.С.Шумовский. ОИЯИ, Р I7-87-645 , Дубна, I987.
IO. M.Wagner. - Z.Physik B, 1979, 32, 225.
II. Р.Фейнман. Статистическая механика. М.: Мир, I978.
I2. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, I976.
I3. B.G.Dick. - phys.stat.sol., 1968, 29, 587.
I4. Л.Аллен, Дж.Эберли. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, I978.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июня I988 года.