

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Б 245

P17-88-411

**И.В.Барашенков, А.Д.Гочева, В.Г.Маханьков,
И.В.Пузынин**

**УСТОЙЧИВОСТЬ
СОЛИТОНОПОДОБНЫХ "ПУЗЫРЬКОВ"**

Направлено в журнал "Physica D"

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Бозе-газ с δ -образными двухчастичным притяжением и трехчастичным отталкиванием описывается /как в приближении Хартри ^{/1/}; так и квазиклассически в формализме вторичного квантования ^{/2/}/ так называемым ψ^3 - ψ^5 нелинейным уравнением Шредингера:

$$i\psi_t + \Delta\psi - a_1\psi + a_3\psi|\psi|^2 - a_5\psi|\psi|^4 = 0. \quad /1.1/$$

Здесь $a_3, a_5 > 0$; $\Delta \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_D^2$, а D - размерность пространства. Физически наиболее содержателен случай $D=3$, но и двумерные, нитеподобные решения также представляют интерес. Если иметь в виду приложения к теории сверхтекучести, то стоит отметить, что ψ^3 - ψ^5 уравнение Шредингера появляется уже на уровне двухжидкостной модели Гинзбурга - Ландау /см. ^{/3/} и особенно ^{/4/}/. Однако область применения указанного уравнения не сводится к этому частному классу задач.

Так, уравнение /1.1/ возникает при описании дефектонов ^{/5/} /здесь $D=1$ / в теории одномерных магнитоупорядоченных и молекулярных кристаллов ^{/6,7/} /ср. ^{/27/}/ и в ряде смежных проблем физики конденсированного состояния. С другой стороны, при $D=3$ к этому уравнению приводит рассмотрение эволюции комплексной огибающей монохроматической волны в среде со слабым насыщением нелинейности. Распространение стационарных световых пучков в такой среде также описывается /1.1/, если $D=2$ и t интерпретируется как продольная координата ^{/8/}. Наконец, уравнения ядерной гидродинамики с эффективными силами Скирма в квазиклассическом пределе сводятся к тому же самому уравнению ^{/9/}.

В настоящей работе рассматриваются решения уравнения /1.1/ типа уединенных волн, распространяющихся на фоне пространственно-однородного решения $\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{i\omega t}$, $\psi_0 = \text{const}$. В контексте задачи о системе бозонов последнее решение описывает бозе-конденсат, тогда как при нелинейно-оптической трактовке оно соответствует стационарной монохроматической волне. Имеется четкая интерпретация этого решения с точки зрения и остальных приложений ^{/1-9/}.

Такая постановка приводит к граничным условиям вида $\psi(\vec{x}, t) \rightarrow |\psi_0| e^{i(\omega t + \mu)}$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, где $|\psi_0| = \text{const}$, а $\mu = \mu(\vec{x}/|\vec{x}|)$ может зависеть от направления вектора \vec{x} /но не от

его длины $\|\vec{x}\|$. Существуют два типа солитонных решений $\psi^3 - \psi^5$ уравнения Шредингера, удовлетворяющих граничным условиям указанного типа. Прежде всего, в некоторой области значений параметров уравнение /1.1/ обладает решениями, аналогичными хорошо известным решениям кубического нелинейного уравнения Шредингера с отталкиванием /часто называемого также уравнением Гросса - Питаевского/ [2-4]. При $D=2$ мы имеем в виду топологические солитоны - вихри; в одномерной ситуации им соответствуют кинки. Как и в случае уравнения Гросса - Питаевского, эти решения не имеют локализованных стационарных аналогов при $D=3$.

Более интригующим является, однако, второй тип солитонов. Эти *нетопологические* решения уравнения /1.1/ существуют в другой области значений параметров и имеют форму стационарных пузырьков разряжения [10]. Для краткости ниже мы будем называть их просто "пузырьками". Нетривиальной особенностью последних является то, что в отличие от топологических солитонов "пузырьки" существуют при любых D .

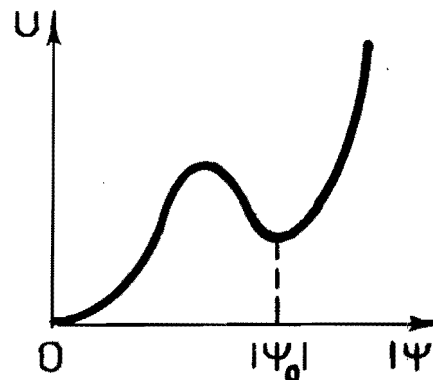
Однозначная физическая интерпретация солитонов - "пузырьков" в общем случае пока отсутствует, и тем самым не совсем еще понятна роль, которую эти недавно обнаруженные объекты могут играть в приложениях. Существует, однако, область, где интерпретация представляется почти очевидной. Действительно, рассмотрим соответствующий /1.1/ функционал энергии:

$$E = \int (|\vec{\nabla} \psi|^2 + U(|\psi|^2)) d\vec{x}, \quad /1.2/$$

где

$$U(|\psi|^2) = a_1 |\psi|^2 - \frac{1}{2} a_3 |\psi|^4 + \frac{1}{3} a_5 |\psi|^6 \text{ и пусть } \frac{3}{16} < a_1 a_5 / a_3^2 < \frac{1}{4}.$$

Выражение /1.2/ может быть истолковано как разложение Гинзбурга - Ландау свободной энергии E по степеням параметра порядка ψ и его градиента [3,4], составляющее основу феноменологической теории фазовых переходов. Однородные решения /1.1/, $\psi(\vec{x}) \equiv 0$ и $\psi(\vec{x}) \equiv \psi_0$ /для простоты мы рассматриваем сейчас случай $\omega=0$ /, соответствуют минимумам $U(|\psi|^2)$ и описывают различные фазы; при этом фаза с $\psi=0$ является термодинамически устойчивой, а фаза с $\psi=\psi_0$ - метастабильной /см. рисунок/. Солитон-"пузырек" представляет собой конфигурацию, для которой $\psi=\psi_0$ всюду, за исключением конечной области, где ψ близко к нулю. Естественно поэтому интерпретировать это решение как зародыш стабильной фазы внутри метастабильной. Точнее, это зародыш *критического радиуса*, поскольку в отсутствие возмущения он как не растет, так и не схлопывается.



Энергия однородных состояний в модели $\psi^3 - \psi^5$.

Малые возмущения, однако, должны вызывать сжатие либо расширение критического зародыша, и, следовательно, солитоны-"пузырьки" должны быть неустойчивыми. Цель настоящей работы - дать математическое доказательство этого основанного на физической интуиции утверждения и тем самым пред-

ставить дополнительные аргументы в пользу предлагаемой интерпретации. Далее, несложно понять, что класс нелинейностей, приводящих к возникновению солитонов указанного типа, гораздо шире, чем просто $\psi^3 - a\psi^5$. Ниже анализ устойчивости проводится для всего класса одновременно. Неожиданно результат оказывается также универсальным: "пузырьки" нелинейного уравнения Шредингера неустойчивы при всех D и при любом выборе нелинейности.

Порядок изложения следующий. В разд.2 новый тип солитонов определяется более строго; доказательство их неустойчивости составляет 3-й и 4-й разделы статьи. Для частного случая $\psi^3 - \psi^5$ нелинейного уравнения Шредингера численно получены инкременты распада "пузырьков", и результаты расчетов приведены в разд.5. В последнем разделе сделан ряд заключительных замечаний.

2. СОЛИТОНЫ-"ПУЗЫРЬКИ"

Рассмотрим класс нелинейных уравнений Шредингера

$$i\phi_t + \Delta\phi + F(|\phi|^2)\phi = 0, \quad /2.1/$$

где функция F такова, что

$$F(\rho_0) = 0 \quad /2.2/$$

для некоторого $\rho_0 > 0$, а при $\rho \in [0, \rho_0]$ $F(\rho)$ и $F'(\rho)$ ограничены. Допустим, что при некотором $D \geq 1$ уравнение /2.1/ имеет вещественное статическое решение ϕ , удовлетворяющее следующим требованиям:

А. При $D > 1$ ϕ - радиально-симметричная функция, т.е. $\phi = \phi(r)$, где $r = (x_1^2 + \dots + x_D^2)^{1/2}$, тогда как при $D = 1$ ϕ - четная,

$\phi(\mathbf{x}) = \phi(-\mathbf{x})$. Соответственно в случае $D = 1$ мы будем также писать $\phi(r)$ вместо $\phi(\mathbf{x})$, подразумевая тем самым, что мы ограничиваемся положительными значениями аргумента. Таким образом, $\phi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r^{-\nu} (r^\nu \phi_r)_r + F(\phi^2) \phi = 0, \quad /2.3/$$

где $\nu \equiv D - 1$.

В.

$$0 = \phi_r(0) < \phi_r(r) < \infty \quad \left. \vphantom{0 = \phi_r(0)} \right\} \text{ при } r \in (0, \infty) \quad /2.4/$$

$$0 < \phi(0) < \phi(r) < \rho_0^{1/2} \quad \left. \vphantom{0 < \phi(0)} \right\} \quad /2.5/$$

$$\phi(r) \rightarrow \rho_0^{1/2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad /2.6/$$

Любое решение уравнения /2.3/ со свойствами /2.4/-/2.6/ будем называть "статическим пузырьком", или просто "пузырьком".

Существует обширный класс нелинейностей $F(|\phi|^2)$, приводящих к появлению солитонов подобного типа. Привлекая стандартную механическую аналогию, легко получить следующий элементарный критерий. Пусть

$$E = \int \{ |\vec{\nabla} \phi|^2 + U(|\phi|^2) \} d\vec{x} \quad /2.7/$$

есть функционал энергии, соответствующий уравнению /2.1/, т.е. пусть $U'(\rho) = -F(\rho)$. Предположим далее, что потенциал $U(\rho)$ имеет минимум в точке ρ_0 и по меньшей мере еще один минимум - в точке ρ_1 такой, что $0 \leq \rho_1 < \rho_0$. Солитон-"пузырек" возникает тогда, если минимум в точке ρ_1 более глубокий, чем в точке ρ_0 , т.е. если $U(\rho_1) < U(\rho_0)$. /Подобное сосуществование нескольких минимумов характерно для моделей с конкурирующими взаимодействиями/.

Нетрудно получить более строгие условия, необходимые и достаточные для существования "пузырьков". Ниже, однако, они нам не понадобятся. Мы будем считать просто, что $F(\rho)$ такова, что уравнение /2.3/ допускает решение со свойствами /2.4/-/2.6/.

В качестве примера рассмотрим ψ^3 - ψ^5 уравнение Шредингера /1.1/. Прежде всего заметим, что функция $\tilde{\psi}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \psi(\vec{x}, t)$ удовлетворяет тому же уравнению /1.1/ с a_1 , замененным на $\tilde{a}_1 = a_1 + \omega$. Тем самым мы всегда можем ограничиться случаем асимптотик, не зависящих от времени: $\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi_0(\vec{x}/|\vec{x}|)$. Далее, в литературе принято приводить уравнение /1.1/, с помощью масштабного преобразования \vec{x}, t и ψ , к виду с $a_3 = \pm a_1 = 1$, либо

к виду с $a_3 = a_5 = 1$. В настоящей работе мы, однако, воспользуемся альтернативным представлением этого уравнения, которое удобно в случае ненулевых граничных условий.

Положим вначале в /1.1/ $a_3 = a_5 = 1$ и рассмотрим область $0 < a_1 < 1/4$. С помощью подстановки $\phi(\vec{x}, t) = b\psi(\sqrt{3}b^2\vec{x}, 3b^4t)$, где $b^2 = \frac{2}{3}(A + 2\rho_0)$ и

$$A/\rho_0 = -2 + \frac{3}{4}a_1^{-1}(1 - \sqrt{1 - 4a_1}), \quad /2.8/$$

/1.1/ приводится к виду

$$i\phi_t + \Delta\phi + (|\phi|^2 - \rho_0)(2A + \rho_0 - 3|\phi|^2)\phi = 0, \quad /2.9/$$

явным образом удовлетворяющему условию /2.2/. Потенциальная часть соответствующего функционала энергии факторизуется,

$$E = \int \{ |\vec{\nabla} \phi|^2 + (|\phi|^2 - \rho_0)^2 (|\phi|^2 - A) \} d\vec{x},$$

и это обстоятельство существенно облегчает /10/ нахождение для /2.9/ решения типа одномерного солитона-"пузырька":

$$\phi(\mathbf{x}) = \rho_0^{1/2} \frac{\text{ch}(\kappa \mathbf{x})}{\sqrt{\rho_0/A + \text{sh}^2(\kappa \mathbf{x})}} \quad /2.10/$$

Здесь $\kappa^2 = \rho_0(\rho_0 - A)$ и $0 < A < \rho_0$. Для решения /2.10/ требования **A** и **B** очевидно выполнены. При $D = 2$ и 3 солитонное решение уравнения /2.9/, удовлетворяющее этим условиям, было найдено численно /10/. Как и при $D = 1$, многомерные "пузырьки" существуют в области $0 < A < \rho_0$.

В заключение этого раздела укажем два интеграла уравнения /2.1/, которые будут упоминаться ниже. Первый из них есть полный импульс:

$$\vec{P} = i \int (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) d\vec{x}. \quad /2.11/$$

Вторая сохраняющаяся величина

$$N = \int (|\phi|^2 - \rho_0) d\vec{x} \quad /2.12/$$

в теории бозе-газа интерпретируется как полное число частиц, отсчитываемое от конденсата, а в нелинейной оптике соответствует суммарной интенсивности света за вычетом постоянного фона.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В этом и последующем разделе мы продемонстрируем, что солитоны-"пузырьки" неустойчивы в линейном приближении. Более конкретно, мы покажем, что соответствующие линеаризованные уравнения допускают *радиально-симметричные* решения, растущие со временем *экспоненциально*. Тем самым будут исключены возмущения, заставляющие /изначально покоящийся/ "пузырек" двигаться; растущие возмущения будут однозначно указывать на сжатие или расширение солитона в радиальном направлении, и неустойчивость в линейном приближении будет действительно означать реальную физическую нестабильность в нашем случае /ср. /11/.

Итак, рассмотрим уравнение /2.1/ и допустим, что соответствующее уравнение /2.3/ имеет решение $\phi(r)$ со свойствами /2.4/-/2.6/. Линеаризуя /2.1/ в окрестности этого солитона-"пузырька", получаем для инфинитезимального возмущения $\delta\phi = f + ig$:

$$f_t = [-\Delta - F(\phi^2(r))]g \equiv \tilde{L}_1 g, \quad /3.1/$$

$$-g_t = [-\Delta - F(\phi^2) - 2\phi^2 F'(\phi^2)]f \equiv \tilde{L}_2 f. \quad /3.2/$$

Здесь $f(\vec{x}, t)$, $g(\vec{x}, t)$ вещественны. Для радиально-симметричных возмущений имеем $f = f(r, t)$, $g = g(r, t)$, и указанные уравнения сводятся к

$$f_t = -r^{-\nu} (r^\nu g_r)_r - F(\phi^2)g \equiv L_1 g, \quad /3.3/$$

$$-g_t = -r^{-\nu} (r^\nu f_r)_r - [F(\phi^2) + 2\phi^2 F'(\phi^2)]f \equiv L_2 f, \quad /3.4/$$

где предполагается, что f и g принадлежат $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^D)$ - пространству радиальных функций в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^D)$, и удовлетворяют естественным граничным условиям в нуле: $f_r(0) = g_r(0) = 0$. Исключая g из /3.3/ и /3.4/, получаем уравнение

$$f_{tt} = -L_1 L_2 f(r, t), \quad /3.5/$$

которое можно записать формально в виде

$$L_1^{-1} f_{tt} = -L_2 f(r, t). \quad /3.6/$$

Если бы оператор L_1 был положительно определен, на всем пространстве \mathcal{L}_r^2 существовал бы обратный оператор L_1^{-1} . Однако L_1

не обладает указанным свойством, хотя и не имеет отрицательных собственных значений /см. ниже/. Следовательно, нам нужно еще описать область определения оператора L_1^{-1} , $\mathcal{D}(L_1^{-1})$.

3.1. Обратный оператор

На первый взгляд, мы имеем ситуацию, аналогичную случаю солитонов, убывающих на бесконечности /"капель"/ /16,17/. Прежде всего, как и в указанном случае, у L_1 нет отрицательных собственных значений. Чтобы убедиться в этом, отметим равенство

$$L_1 \phi(r) = 0, \quad /3.7/$$

возникающее из сравнения /3.3/ и /2.3/. Если допустить, что отрицательные собственные значения существуют, и обозначить наименьшее через λ_0 , то соответствующая собственная функция $u_0(r)$, $L_1 u_0 = \lambda_0 u_0$, очевидно, не будет иметь нулей на полуоси $[0, \infty)$. Однако ввиду /3.7/ $u_0(r)$ должна удовлетворять $\int_0^\infty \phi u_0 r^\nu dr = 0$, что, конечно, невозможно, поскольку функция $\phi(r)$ также не имеет нулей /см. /2.5//.

В случае "капель" справедливо $\phi(r) \in \mathcal{L}_r^2$, и $\lambda = 0$ является дискретным собственным значением L_1 , тогда как непрерывный спектр начинается с некоторого $\lambda > 0$. Следовательно, для того, чтобы оператор L_1 имел обратный, он должен быть ограничен на подпространство, ортогональное к указанной нулевой моде. С другой стороны, в случае "пузырьков" из /2.2/, /2.6/ и /3.3/ следует, что непрерывный спектр начинается непосредственно с $\lambda = 0$. Это означает, что L_1^{-1} существует на некоторой плотной подобласти в \mathcal{L}_r^2 . Таким образом, в обоих случаях область определения L_1^{-1} является подпространство пространства \mathcal{L}_r^2 , *замкнутое* в случае "капель", и *плотное* в \mathcal{L}_r^2 в случае "пузырьков". Как мы увидим ниже, именно это различие приводит в последнем случае к весьма необычным свойствам солитонов относительно устойчивости.

В нашем случае задание области $\mathcal{D}(L_1^{-1})$ не так очевидно, как в случае "капель". Однако некоторая ее 1 -подобласть может быть описана сравнительно легко, и этого оказывается вполне достаточно для наших целей.

Рассмотрим в $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^D)$ подпространство $\tilde{\mathcal{L}}_r^2$, состоящее из функций, стремящихся при $r \rightarrow \infty$ к нулю быстрее, чем $r^{-(D+4)/2}$. То есть, $u(r) \in \tilde{\mathcal{L}}_r^2$, если существуют положительные постоянные γ , σ и $\alpha > (5+\nu)/2$ такие, что $|u(r)| \leq \sigma r^{-\alpha}$ при $r \geq r_0$. Введем на $\tilde{\mathcal{L}}_r^2$ функционал

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^\infty \phi(r) u(r) r^\nu dr \quad /3.8/$$

и обозначим $\mathfrak{D} = \ker \mathcal{F}$. Другими словами, $u(r) \in \mathfrak{D}$ означает $\int_0^\infty \phi r^\nu dr = 0$. Легко понять теперь, что множество \mathfrak{D} плотно в \mathfrak{L}_r^2 , а следовательно, и в \mathfrak{L}_r^2 /см. замечание 4.2. ниже/, и что \mathfrak{D} принадлежит области значений оператора $L_1: \mathfrak{D} \subset \mathfrak{R}(L_1)$. Поскольку $\mathfrak{R}(L_1) = \mathfrak{D}(L_1^{-1})$, это означает, что L_1^{-1} существует на \mathfrak{D} .

Чтобы получить явное выражение для L_1^{-1} , заметим просто, что ввиду /3.7/ и /2.5/ L_1 можно представить как

$$L_1 v(r) = -r^{-\nu} \phi^{-1}(r) \{ r^\nu \phi^2(\phi^{-1} v)_r \}_r, \quad /3.9/$$

где $v(r) \in \mathfrak{L}_r^2$, $v_r(0) = 0$. Полагая затем

$$L_1^{-1} u(r) \equiv \phi(r) \int_r^\infty d\xi \xi^{-\nu} \phi^{-2}(\xi) \int_0^\xi d\eta \eta^\nu \phi(\eta) u(\eta) \quad /3.10/$$

для любого $u \in \mathfrak{D}$, можно явно проверить, что $L_1^{-1} u \equiv v \in \mathfrak{L}_r^2$, $v_r(0) = 0$ и $L_1 L_1^{-1} = L_1^{-1} L_1 = 1$. Полезно отметить следующие свойства оператора L_1^{-1} , введенного таким образом.

А. Пусть

$$V_i(r) \equiv r^{-\nu} \phi^{-1}(r) \int_0^r \phi(\xi) v_i(\xi) \xi^\nu d\xi; \quad i = 1, 2, \quad /3.11/$$

где $v_i(r) \in \mathfrak{D}$. Соотношение

$$(v_1, L_1^{-1} v_2) = (V_1, V_2) \quad /3.12/$$

доказывается тогда просто с помощью изменения порядка интегрирования /которое законно в силу достаточно быстрого спадания $v_{1,2}$ при $r \rightarrow \infty$ /. Здесь (\cdot, \cdot) обозначает, разумеется, обычное $\mathfrak{L}_r^2(\mathbb{R}^D)$ скалярное произведение: $(u_1, u_2) = \int_0^\infty u_1(r) u_2(r) r^\nu dr$.

В. Из /3.12/ следует, что L_1^{-1} симметричен: $(v_1, L_1^{-1} v_2) = (v_2, L_1^{-1} v_1)$ и положителен, т.е. $(v, L_1^{-1} v) > 0$ для любого ненулевого $v \in \mathfrak{D}$.

3.2. Критерий неустойчивости

Уравнениям типа /3.6/ с L_2 симметричным и L_1^{-1} положительным посвящена обширная литература /см., например, /12-15/. Для доказательства неустойчивости "пузыря" мы должны убедиться, что /3.6/ допускает решения, растущие со временем. Следующая теорема устанавливает достаточные условия этого.

Теорема 3.1. Пусть P - неотрицательный оператор, т.е. $(u, Pu) \geq 0$ для всех $u \in \mathfrak{D}_P$, и пусть H - симметричный оператор, причем $-\infty < \inf H < 0$. Допустим, что существует функция $\tilde{u}(r) \in \mathfrak{D}_P \cap \mathfrak{D}_H$, удовлетворяющая $(\tilde{u}, H\tilde{u}) < 0$. Тогда уравнение $Pf_{tt} = -Hf$ /3.13/

имеет решение $f(r, t)$ такое, что $\|f(r, t)\| \geq C e^{\beta t}$ для некоторых $C, \beta > 0$ и всех $t \geq 0$.

Это утверждение доказано в /13,14/; независимое доказательство приводится в /12/. Символ $\|\cdot\|$ используется здесь для обозначения обычной \mathfrak{L}^2 -нормы, $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ /ср., однако, /15/ /.

Для того чтобы применить этот критерий к уравнению /3.6/, достаточно показать, что для некоторого $\tilde{u} \in \{\mathfrak{D} \cap \mathfrak{R}(L_2)\}$, т.е. для некоторой двукратно дифференцируемой функции $\tilde{u} \in \mathfrak{D}$, такой, что $\tilde{u}_r(0) = 0$, выполняется

$$(\tilde{u}, L_2 \tilde{u}) < 0. \quad /3.14/$$

В следующем разделе мы продемонстрируем, что такие \tilde{u} действительно существуют. Перед этим, однако, уместно сделать два замечания.

Замечание 3.2. Из /3.3/ и /3.7/ вытекает, что $\int_0^\infty f_t(r, t) \phi r^\nu dr = 0$. Следовательно, единственные решения /3.6/, удовлетворяющие /3.3/-/3.4/ и имеющие тем самым отношение к анализу устойчивости, - это решения с начальным условием $f_t(r, 0)$ таким, что $\int f_t(r, 0) \phi r^\nu dr = 0$. В этой связи следует подчеркнуть, что при доказательстве /12-15/ теоремы 3.1 $f_t(r, 0)$ выбирается из \mathfrak{D}_P , т.е. из \mathfrak{D} в нашем случае. Поскольку же $\mathfrak{D} = \ker \mathcal{F}$, условие $\int f_t(r, 0) \phi r^\nu dr = 0$ оказывается тем самым удовлетворено, и из существования растущих решений, гарантируемого сформулированной теоремой, действительно следует неустойчивость "пузырька".

Замечание 3.3. /О физическом смысле области \mathfrak{D} /. Ограничиваясь на подпространство \mathfrak{L}_r^2 , мы ограничиваемся хорошо локализованными возмущениями. Для того же, чтобы интерпретировать дополнительное условие $\mathcal{F}[u] = 0$, задающее область $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}_r^2$, рассмотрим в окрестности статического "пузыря" $\phi(r)$ некоторую конфигурацию $\tilde{\phi}(r)$. Разлагая интеграл /2.14/ по степеням отклонения $\delta\phi = \tilde{\phi} - \phi = u + iv$, имеем

$$N[\tilde{\phi}] - N[\phi] = 2\mathcal{F}[u]$$

плюс члены, квадратичные по $\|u\|$ и $\|v\|$. Следовательно, условие $\mathcal{F}[u] = 0$ равносильно требованию, чтобы инфинитезимальные возмущения не меняли суммарного числа частиц: $\delta N = 0$. Таким образом, не-

устойчивые возмущения, которые мы собираемся описать, не возмущают ни один из двух интегралов \tilde{P} и N .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Прежде всего, продемонстрируем наличие отрицательного собственного значения в спектре оператора L_2 .

Доказательство аналогично случаю "капель". Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения

$$\tilde{L}_2 u(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \quad /4.1/$$

$u(\vec{x}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^D)$, где \tilde{L}_2 дается /3.2/. Пусть, например, $D = 3$. Подстановка $u(\vec{x}) = z(r)r^{-1}Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, где $Y_{\ell m}$ - сферические гармоники, сводит /4.1/ к

$$-z_{rr} + [\ell(\ell+1)r^{-2} + q(r)]z = \lambda z, \quad /4.2/$$

$$z(0) = z(\infty) = 0, \quad \text{где } q(r) = -F(\phi^2) - 2\phi^2 F'(\phi^2).$$

\tilde{L}_2 имеет 3 трансляционные нулевые моды $u_1^i(\vec{x}) = \partial\phi/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3$, соответствующие $\ell = 1$. Это означает, что уравнение /4.2/ при $\ell = 1$ имеет решение $\lambda_1 = 0$, $z_1 = r\phi_r$. Ввиду /2.4/ у $z_1(r)$ нет внутренних нулей на полуоси $(0, \infty)$ и, следовательно, при $\ell = 0$ существует безузловая собственная функция $z_0(r)$ с собственным значением $\lambda_0 < 0$. Тем самым $u_0(r) = z_0(r)/r$ является собственной функцией как для оператора \tilde{L}_2 , так и для L_2 , с собственным значением λ_0 . Очевидно, $u_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_r^2$, и несложно проверить, что справедливо и $u_0'(0) = 0$.

Таким же образом доказывается, что L_2 имеет отрицательное собственное значение λ_0 при любом D . Существенно, что соответствующая собственная функция $u_0(r) \in \tilde{\mathcal{F}}_r^2$ не имеет нулей в интервале $[0, \infty)$ и, следовательно, не может принадлежать множеству $\mathcal{F} = \ker \mathcal{F}$.

Итак, $u_0(r)$ нельзя использовать в неравенстве /3.14/. Однако, как явствует из следующего предложения, $u_0(r)$ может быть подходящим образом аппроксимирована функциями из \mathcal{F} .

Предложение 4.1. Пусть \mathcal{F} - ядро функционала /3.8/, где $\phi(r)$ удовлетворяет условиям /2.4/-/2.6/, и пусть для $u_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_r^2$ выполняются $L_2 u_0 = \lambda_0 u_0$, $u_0'(0) = 0$, $\lambda_0 < 0$. Тогда существует функция $\tilde{u}(r) \in \mathcal{F}$, удовлетворяющая /3.14/.

Доказательство. Мы построим последовательность $\{v_n\} \in \tilde{\mathcal{F}}$, такую, что

$$|(v_n, L_2 v_n) - (u_0, L_2 u_0)| = |(v_n, L_2 v_n) - \lambda_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad /4.3/$$

Для достаточно большого n будем иметь тогда $(v_n, L_2 v_n) < 0$. Отождествляя затем $\tilde{u}(r) \equiv v_n(r)$, получим искомое /3.14/.

Полагая $v_n(r) = u_0(r) - y_n(r)$, мы имеем

$$\begin{aligned} |(v_n, L_2 v_n) - (u_0, L_2 u_0)| &= |(y_n, L_2 y_n) - 2(y_n, L_2 u_0)| \leq \\ &\leq |(y_n, L_2 y_n)| + 2|\lambda_0| \|y_n\| \leq \end{aligned} \quad /4.4/$$

$$< \|y_n'\|^2 + |q|_{\max} \|y_n\|^2 + 2|\lambda_0| \|y_n\|,$$

где мы воспользовались ограниченностью $q(r) = -F(\phi^2) - 2\phi^2 F'(\phi^2)$ и положили $\|u_0\| = 1$. Пусть теперь

$$y_n(r) = C_n y(k_n r)$$

с некоторой положительной функцией $y(r) \in \tilde{\mathcal{F}}_r^2(\mathbb{R}^D)$, $y_r(0) = 0$, а постоянные C_n и k_n подберем так, чтобы выполнялось $v_n \in \mathcal{F}$. Легко проверить, что это условие имеет место при

$$C_n = k_n^D \mathcal{F}[u_0]/J(k_n), \quad /4.5/$$

где

$$J(k) \equiv \int_0^\infty y(r) \phi(r/k) r^\nu dr.$$

Учитывая /2.5/, легко получить для последнего интеграла оценку

$$J(k) \geq \phi(0) \int_0^\infty y(r) r^\nu dr \equiv \mu > 0,$$

откуда

$$1/J(k) \leq \mu^{-1}. \quad /4.6/$$

Вычислим теперь нормы $\|y_n\|$ и $\|y_n'\|$, входящие в /4.4/:

$$\|y_n\|^2 = C_n^2 k_n^{-D} \|y\|^2, \quad \|y_n'\|^2 = C_n^2 k_n^{2-D} \|y'\|^2.$$

Пользуясь /4.5/ и /4.6/, получаем

$$\|y_n^2\| \leq \alpha^2 k_n^D, \quad \|y_n'\|^2 \leq \beta^2 k_n^{D+2}, \quad /4.7/$$

где $\alpha \equiv \mu^{-1} \|y\| \cdot \mathcal{F}[u_0]$, $\beta \equiv \mu^{-1} \|y'\| \cdot \mathcal{F}[u_0]$. Наконец, устремляя

$k_n \rightarrow 0$, с помощью /4.4/ и /4.7/ несложно убедиться в справедливости /4.3/. Q. E. D.

Замечание 4.2. Заметим, что нашим промежуточным результатом было $\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, тогда как $\mathcal{F}[y_n] = \mathcal{F}[u_0] \neq 0$. Тем самым линейный функционал /3.8/ разрывен в пространстве $\tilde{\mathcal{L}}_r^2$. Для того чтобы установить это, вышеприведенный анализ является в сущности излишним, так как разрывность есть очевидное следствие ненулевой асимптотики $\phi(r)$. Учитывая указанное свойство функционала \mathcal{F} , достаточно воспользоваться известной теоремой /18/, чтобы заключить, что $\ker \mathcal{F}$ плотно в $\tilde{\mathcal{L}}_r^2$, и для любого $u_0 \in \tilde{\mathcal{L}}_r^2$ существует последовательность $\{v_n\} \in \tilde{\mathcal{L}}_r^2$, такая, что $\|v_n - u_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Сам по себе, однако, этот факт еще не гарантирует выполнения /4.3', поскольку, как хорошо известно, квадратичный функционал $(u, L_2 u)$ также не является непрерывным. Именно поэтому нам пришлось продемонстрировать справедливость /4.3/ явно.

Замечание 4.3. /Простое качественное объяснение/.

С физической точки зрения может показаться странным, что возмущение u_0 , меняющее число частиц N , может быть аппроксимировано последовательностью возмущений v_k , не меняющих N . Напомним, что изменение числа частиц, вносимое малым возмущением $w(r)$, равно $2\mathcal{F}[w] = 2\int \phi w r^D dr$ - см. замечание 3.3/. На самом деле, разумеется, никакого парадокса здесь нет. Дело в том, что "поправку" y_k к возмущению u_0 , $y_k = u_0 - v_k$, можно выбрать так, что, с одной стороны, она /квадратично/ сколь угодно мала, а с другой - доставляет интегралу $\mathcal{F}[y_k]$, линейному по y_k , конечное значение. В самом деле, пусть y_k достаточно медленно спадает на бесконечности. Тогда область, в которой ϕ отлично от $\rho_0^{1/2}$, вносит пренебрежимо малый вклад в $\mathcal{F}[y_k]$, и следовательно,

$$\mathcal{F}[y_k] \approx \sqrt{\rho_0} \int_0^\infty y_k(r) r^D dr.$$

Полагая теперь $y_k(r) \equiv k^D y(kr)$ и устремляя $k \rightarrow 0$, мы получим $\|y_k\|^2 = k^D \|y\|^2 \rightarrow 0$, тогда как $\mathcal{F}[y_k] = \mathcal{F}[y] = \text{const}$! Это весьма необычное свойство связано с ненулевой асимптотикой "пузырька"; ничего подобного нет в случае "капли".

Итак, мы показали, что условия теоремы 3.1 выполнены. Последняя позволяет сделать вывод о том, что солитоны-"пузырьки" нелинейного уравнения Шредингера /2.1/ неустойчивы в линейном приближении - независимо от размерности пространства и выбора нелинейности $F(|\phi|^2)$.

5. ИНКРЕМЕНТЫ РАСПАДА "ПУЗЫРЬКОВ" $\psi^3 - \psi^5$

Физически важной характеристикой неустойчивого решения - скажем, солитонного - является инкремент неустойчивости: величина, ему обратная, дает оценку времени жизни солитона. Особый интерес представляет, разумеется, *максимальный* инкремент. В математической литературе величину Γ принято называть *максимальным инкрементом экспоненциальной неустойчивости* для уравнения /3.13/, если: i) для любого $a \in [0, \Gamma)$ /3.13/ имеет решение $f(r, t)$ такое, что $\|f(r, t)\| \geq C e^{at}$ для некоторого $C > 0$ и всех $t \geq 0$, и ii) для любого $f(r, t)$, удовлетворяющего /3.13/, и любого $\epsilon > 0$ существует постоянная $\rho > 0$ такая, что $\|f(r, t)\| \leq \rho e^{(\Gamma - \epsilon)t}$ для всех $t \geq 0$. Здесь $\|\cdot\|$ обозначает *некоторую* норму, не обязательно норму \mathcal{L}^2 .

Ниже излагаются результаты вычисления инкрементов радиальной неустойчивости "пузырьков" для случая $\phi^3 - \phi^5$ нелинейного уравнения Шредингера /2.9/, которое обладает, по-видимому, наиболее широким спектром приложений среди обсуждаемого класса моделей. Мы покажем, что в этом случае уравнения /3.3/, /3.4/ имеют экспоненциально растущую нормальную моду, т.е. решение вида

$$f(r, t) = \eta(r) e^{\gamma t}, \quad g(r, t) = \xi(r) e^{\gamma t}, \quad /5.1/$$

где η и ξ удовлетворяют

$$L_1 \xi = \gamma \eta, \quad L_2 \eta = -\gamma \xi, \quad /5.2'/$$

$$\eta, \xi \in \tilde{\mathcal{L}}_r^2(\mathbb{R}^D), \quad \eta'(0) = \xi'(0) = 0. \quad /5.2''/$$

В случае нелинейности $F(|\phi|^2)$ общего вида неясно, имеет ли решение задача на собственные значения /5.2/ или эквивалентная задача $L_2 \eta = -\gamma^2 L_1^{-1} \eta$, хотя мы и установили, что отношение $(u, L_2 u) / (u, L_1^{-1} u)$ может быть сделано отрицательным. Отрицательное собственное значение $(-\gamma^2)$ заведомо существовало бы, если бы соответствующая система собственных функций была полна. Неизвестно, однако, насколько соответствует истине это последнее предположение. В $\phi^3 - \phi^5$ случае существование нормальной моды будет продемонстрировано численными методами.

Понятно, что γ представляет собой инкремент неустойчивости относительно *любой* нормы. Более того, мы покажем, что в действительности это *максимальный* инкремент - относительно *некоторой* нормы, определяемой ниже.

5.1. Численный анализ

Итак, перейдем к результатам численного исследования задачи на собственные значения /5.2/, где операторы L_1 и L_2 даются формулами /3.3/, /3.4/ с $F(\phi^2) = (\phi^2 - \rho_0)(2A + \rho_0 - 3\phi^2)$, а $\phi(r)$ удовлетворяет /2.3/-/2.6/. Прежде всего, заметим, что ввиду /2.8/ любые два уравнения /2.9/ с различными A и ρ_0 , но одним и тем же отношением A/ρ_0 эквивалентны с точностью до масштабного преобразования. Это наблюдение позволило нам зафиксировать, без потери общности, $\rho_0 = 1$.

Другое наблюдение, полезное при численных расчетах, состоит в том, что если собственное значение существует, то оно единственно. В самом деле, рассмотрим эквивалентную задачу $L_2 \eta(r) = \lambda L_1^{-1} \eta(r)$, где $\lambda = -\gamma^2$. Из анализа асимптотик следует, что для квадратично интегрируемых η справедливо $\lambda < 0$. Следовательно, если бы существовало два собственных значения, λ_1 и λ_2 , то соответствующие η_1 и η_2 образовывали бы базис двумерного подпространства, на котором форма $(u, L_2 u)$ была бы отрицательно определена. Это, однако, противоречило бы тому факту, что задача на собственные значения вида $L_2 u = \lambda u$ имеет *единственное* отрицательное собственное значение.

Для численного анализа мы использовали итерационную схему, основанную на модификации непрерывного аналога метода Ньютона /19/ /детали вычислений вынесены в препринт /20/. В одномерном случае в нашем распоряжении было явное решение /2.10/, тогда как при высших D необходимо было вначале найти численно сам "пузырек" $\phi(r)$, а затем подставить его в потенциалы операторов L_1 и L_2 . Задача на собственные значения /5.2/ была решена для 9 эквидистантных значений A из промежутка $(0, 1)$, т.е. для $A = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ и для каждого $D, D = 1, 2, 3$. Для всех рассмотренных A и D было найдено вещественное собственное значение.

Вычисления были повторены на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном интервале интегрирования $[0, R]$ и на последовательности расширяющихся интервалов $[0, R_n]$ при фиксированном шаге интегрирования h . При стремлении $h \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ последовательность собственных значений $\gamma_{h,R}$ дискретного аналога задачи /5.2/ быстро сходилась к некоторому ненулевому пределу γ /при этом значение интеграла /3.8/ стремилось к нулю/. Тем самым можно утверждать, что для каждого $A \in (0, 1)$ и $D = 1, 2, 3$ уравнения /3.3/, /3.4/ допускают решение вида /5.1/.

Полученные инкременты неустойчивости γ приведены в таблице. Точность численного решения оценивалась путем варьирования h и R . Соответственно шаг и интервал были выбраны так, чтобы гарантировать три цифры после запятой.

Таблица. Инкременты неустойчивости "пузырьков" $\psi^3 - \psi^5$

A	D = 1	D = 2	D = 3
0.1	0.198	0.058	0.047
0.2	0.348	0.179	0.132
0.3	0.443	0.335	0.244
0.4	0.489	0.496	0.376
0.5	0.493	0.625	0.522
0.6	0.458	0.692	0.664
0.7	0.390	0.675	0.764
0.8	0.290	0.559	0.754
0.9	0.159	0.336	0.539

Для расчетов применялись конечно-разностные схемы 2-го и 4-го порядка аппроксимации. При $D = 1$ и всех A была использована схема 4-го порядка с шагом $h = 0.2$. При $D = 2$ и 3 и всех A , за исключением $A = 0.1$, мы пользовались схемой 2-го порядка с $h = 0.05$; в случае же $A = 0.1$ схема была 4-го порядка и $h = 0.1$. Длина интервала интегрирования R была выбрана равной 50. Исключение составил случай $A = 0.1$ при $D = 2$ и 3, когда пришлось взять $R = 100$.

5.2. Свойство максимальности γ

Априори неясно, может ли быть превышена полученная скорость нарастания неустойчивости. Мы покажем, что γ действительно является максимальным инкрементом - при условии, что для оценки вещественной и мнимой части возмущения выбираются нормы некоторого специального вида.

В самом деле, элементарно проверяется /12, 15/, что для любого решения $f(r, t)$ уравнения /3.6/ справедливо

$$(f, L_1^{-1} f) \leq \exp(2\Gamma^2 t) \cdot \text{const}, \quad /5.3/$$

где

$$\Gamma^2 = \sup_{\mathcal{D}(L_2) \cap \mathcal{D}(L_1^{-1})} \left\{ \frac{-(u, L_2 u)}{(u, L_1^{-1} u)} \right\}. \quad /5.4/$$

Для собственного значения γ выполняется $\gamma^2 = -(\eta, L_2 \eta) / (\eta, L_1^{-1} \eta)$, и следовательно,

$$\gamma^2 \leq \Gamma^2. \quad /5.5/$$

Вспользуемся теперь "дополнительным" вариационным принципом из работы /15/. Ее авторы рассматривают уравнения вида /3.13/ с P положительным и H симметричным в предположении, что H имеет единственное отрицательное собственное значение и не имеет нулевых. Результат /15/, переформулированный для /3.6/, гласит, что

$$\Gamma^2 \leq \tilde{\Gamma}^2, \quad /5.6/$$

где

$$\tilde{\Gamma}^2 = \inf_{\mathbb{M}} \left\{ \frac{-(L_2 u, L_1 L_2 u)}{(u, L_1 u)} \right\},$$

а \mathbb{M} обозначает подобласть области $\mathcal{D}(L_2) \cap \mathcal{D}(L_1 L_2)$ такую, что для любого $u(r) \in \mathbb{M}$ справедливо $(u, L_2 u) < 0$. С другой стороны, поскольку $\eta \in \mathbb{M}$, то выполняется

$$\tilde{\Gamma}^2 \leq -(L_2 \eta, L_1 L_2 \eta) / (\eta, L_1 \eta) = \gamma^2. \quad /5.7/$$

Окончательно, комбинируя /5.5/-/5.7/, мы имеем $\gamma^2 = \Gamma^2 = \tilde{\Gamma}^2$. Таким образом, с помощью /5.3/ можно заключить, что собственное значение γ есть максимальный инкремент относительно нормы $\|f\| = (f, L_1^{-1} f)^{1/2}$.

Аналогичный результат может быть получен для мнимой части возмущения, $g(r, t)$. Именно из /3.3/, /3.4/ находим

$$g_{tt} = -L_2 L_1 g.$$

В этом случае /5.3/ следует заменить на

$$(g, L_1 g) \leq \exp(2\Omega^2 t) \cdot \text{const},$$

где

$$\Omega^2 = \sup_{\mathcal{D}(L_2 L_1) \cap \mathcal{D}(L_1)} \left\{ \frac{-(L_1 v, L_2 L_1 v)}{(v, L_1 v)} \right\}.$$

Обозначая $L_1 v \equiv u$, последнее равенство можно переписать в виде

$$\Omega^2 = \sup_{\mathcal{D}(L_2) \cap \mathcal{D}(L_1^{-1})} \left\{ \frac{-(u, L_2 u)}{(u, L_1^{-1} u)} \right\}.$$

Вспоминая определение /5.4/, мы имеем $\Omega^2 = \Gamma^2$ и, наконец, $\Omega^2 = \gamma^2$. Отсюда следует, что γ есть максимальный инкремент неустойчивости для $g(r, t)$, если в качестве нормы выбрать $\|g\| \equiv (g, L_1 g)^{1/2}$.

Напомним в заключение, что в настоящем исследовании мы ограничились *радиально-симметричными* возмущениями, и еще предстоит доказать, что возмущения несимметричные /зависящие от углов/ не могут нарастать быстрее, чем $e^{\gamma t}$. Мы намерены вернуться к этому вопросу в последующих публикациях.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

1. Представляется интересным сравнить анализ устойчивости солитонов-"пузырьков" со стандартным рассмотрением устойчивости другого типа нетопологических решений - солитонов-"капель". Если рассматривается некоторое нелинейное уравнение Шредингера, то в обоих случаях анализ устойчивости сводится, в линейном приближении, к одной и той же линейной системе вида /3.1/-/3.2/. В обоих случаях оператор L_1 не имеет отрицательных собственных значений, тогда как L_2 имеет только одно. Естественно поэтому ожидать, что будет совпадать и дальнейшее рассмотрение, и что в конечном счете мы установим некоторую ненулевую область устойчивости для каждого типа солитонов. Неожиданно, нетривиальная асимптотика "пузырьков" порождает радикальное отличие.

В самом деле, неустойчивость как "пузырьков", так и "капель" имеет место, если существует функция $\tilde{u}(r)$, принадлежащая области определения оператора L_1^{-1} /обозначаемой \mathcal{D} / и удовлетворяющая /3.14/. Область \mathcal{D} определяется как $\mathcal{D} = \ker \mathcal{F}$, где \mathcal{F} - линейный функционал /3.8/. Заметим, что в обоих случаях отрицательная мода $L_2 u_0(r)$ не принадлежит \mathcal{D} .

В случае "капель" функционал \mathcal{F} непрерывен, и его ядро замкнуто. То есть невозможно построить последовательность $\{v_n\} \in \mathcal{D}$ такую, что $v_n \rightarrow u_0$ при $n \rightarrow \infty$, и заранее неясно, существует ли $\tilde{u}(r)$. В этой ситуации более подходящим оказывается отличный подход, основанный на так называемой N -теореме /16,17/.

С другой стороны, в случае "пузырьков" \mathcal{F} разрывен, и подпространство \mathcal{D} *плотно* в \mathcal{L}^2 . Соответственно, вышеупомянутая последовательность всегда может быть построена. Более того, ее можно выбрать так, что $(v_n, L_2 v_n) \rightarrow (u_0, L_2 u_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым солитоны-"пузырьки" неустойчивы при любой размерности пространства и произвольном выборе нелинейности.

2. Имеет смысл прокомментировать этот результат на основе физических представлений. В физической литературе устойчивость

решения обычно ассоциируется с наличием минимума энергии при условии, что значение прочих интегралов движения/числа частиц, импульса и т.д./ фиксировано при вариациях. /Обзор соответствующего круга идей см., например, в /21/. Следуя этим представлениям, рассмотрим решение уравнения /2.1/ типа статического "пузырька" $\phi(\mathbf{r})$ и возьмем некоторую близкую к нему конфигурацию $\tilde{\phi}(\mathbf{r})$. Разлагая энергию /2.7/ по степеням малого отклонения $\tilde{\phi} - \phi = \delta\phi = u + iv$, мы имеем

$$E[\tilde{\phi}] = E[\phi] + (v, \tilde{L}_1 v) + (u, \tilde{L}_2 u)$$

плюс члены высшего порядка малости. Здесь операторы \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 даются формулами /3.1/, /3.2/. Полагая $v(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv 0, u(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv \tilde{u}(\mathbf{r})$, где \tilde{u} выбирается исходя из условия /3.13/, легко убедиться в справедливости неравенства $E[\tilde{\phi}] < E[\phi]$, несмотря на то, что $N[\tilde{\phi}] = N[\phi]$ и $\dot{P}[\tilde{\phi}] = \dot{P}[\phi]$ /см. замечание 3.3/. Таким образом, статический "пузырек" не доставляет функционалу энергии даже условного локального минимума.

3. До сих пор мы рассматривали лишь статическое решение, т.е. покоящийся "пузырек" в покоящемся конденсате. Преобразование Галилея

$$\phi(\tilde{\mathbf{x}}, t) \rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \exp\left\{i\frac{\tilde{v}}{2}\left(\tilde{\mathbf{x}} - \frac{\tilde{v}}{2}t\right)\right\} \phi(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{v}t, t)$$

заставляет "пузырек" и конденсат двигаться как целое со скоростью \tilde{v} , причем свойства этого нового решения относительно устойчивости/неустойчивости остаются, разумеется, прежними. Менее тривиальная ситуация возникает, однако, в случае "пузырька", движущегося в неподвижном конденсате. Это последнее решение имеет вид $\phi(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \chi(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{v}t)$, где $\frac{\partial}{\partial t} \chi(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{v}t) \rightarrow 0$ при $\tilde{\mathbf{x}}^2 \rightarrow \infty$. Например, одномерный "пузырек" $\phi^3 - \phi^5$ уравнения /2.9/, распространяющийся на фоне статического решения $\phi(\mathbf{x}, t) = \rho_0^{1/2}$, выглядит так /10/:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = (2\rho_0)^{1/2} \frac{\text{ch}(\tilde{\mathbf{x}} - i\mu)}{\sqrt{(2\rho_0 - A)(A^2 + v^2)^{-1/2} + \text{ch} 2\tilde{\mathbf{x}}}},$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(c^2 - v^2)^{1/2} (\mathbf{x} - v\mathbf{t}), \quad c^2 = 4\rho_0(\rho_0 - A),$$

$$\sin 2\mu = \frac{1}{2}v[(c^2 - v^2)/(A^2 + v^2)]^{1/2}, \quad \mu \in (-\pi/4, \pi/4).$$

→ Анализ устойчивости такого решения нельзя свести к случаю $v = 0$. Напротив, есть основания полагать, что на самом деле существуют устойчивые быстро движущиеся "пузырьки" — по крайней мере в пространствах низкой размерности.

4. Еще один открытый вопрос — являются ли инкременты неустойчивости γ /5.2/ максимальными относительно нормы \mathbb{R}^2 ? Другими словами, для каждого ли возмущения $\delta\phi = f(\mathbf{r}, t) + ig(\mathbf{r}, t)$ справедлива оценка $(f, f) + (g, g) \leq \text{const} \cdot e^{(2\gamma + \epsilon)t}$ при любом $\epsilon > 0$ и всех $t \geq 0$? Ответ, по-видимому, будет утвердительным, но доказательство пока отсутствует.

5. Наконец, отметим ряд недавних публикаций, посвященных анализу неустойчивости в различных вариантах нелинейного уравнения Шредингера /22-25/. В указанных работах обсуждается случай солитонов-"капель" и развиваются подходы, альтернативные предложенным в /16, 17/.

В заключение мы считаем своим приятным долгом выразить благодарность Б.А. Маломеду за ряд содержательных замечаний по данному тексту. Один из авторов /И.Б./ признателен также К.Кирчеву, Ю.П. Рыбакову и А.Яновски за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев А.С. Косевич А.М. — ФНТ, 1976, т.2, 7, с.913.
2. Питаевский Л.П. — ЖЭТФ, 1961, т.40, с.646.
3. Гинзбург В.Л., Питаевский Л.П. — ЖЭТФ, 1958, т.34, с.1240.
4. Гинзбург В.Л., Собянин А.А. — УФН, 1976, т.120, с.153.
5. Пушкарлов Д.И., Койнов Зл. — ЖЭТФ, 1978, т.74, с.1846.
6. Pushkarov Kh.I., Primatarova M.T. — phys.stat.sol. (b), 1984, 123, p.573.
7. Pushkarov Kh.I., Primatarova M.T. — phys.stat.sol. (b), 1986, 133, p.253; ICTP preprint IC/84/131, Trieste, 1984.
8. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. — ЖЭТФ, 1971, т.60, с.136.
9. Картавенко В.Г. — ЯФ, 1984, т.40, с.377.
10. Barashenkov I.V., Makhankov V.G. Preprint JINR E2-84-173, Dubna, 1984; Phys.Lett., 1988, A128, 1-2, p.52.
11. Scharf G., Wreszinski W.F. — Ann.Phys., 1981, v.134, 1, p.56.
12. Laval G., Mercier C., Pellat R. — Nucl.Fusion, 1965, v.5., p.156.
13. Barston E.M. — Phys.Fluids, 1969, v.12, 10, p.2162, theorem 4; J.Fluid Mech., 1970, v.42, p.97, theorem 4.2.
14. Barston E.M. — Commun.Pure Appl. Math., 1969, v.22, p.627.

15. Laedke E.W., Spatschek K.H. - Physica, 1982, 5D, p.227.
16. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. - Изв.Вузов, сер.Радиофизика, 1973, т.16, с.1020.
17. Laedke E.W., Spatschek K.H., Stenflo L. - J.Math.Phys., 1983, 24, p.2764.
18. Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972, т.1, ч.3, §1, теорема 2.
19. Гочева А.Д., Пузынин И.В. Препринт ОИЯИ, P11-87-459, Дубна, 1987.
20. Barashenkov I.V. et al. Preprint JINR E17-85-967, Dubna, 1985.
21. Makhankov V.G. - Phys.Rep., 1978, 35C, p.1;
Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. - Phys.Rep., 1986, 142, 3, p.105.
22. Grillakis M. Linearized Instability for Standing waves of nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations, Preprint, Courant Institute, NYU.
23. Jones C.K.R.T., Moloney J. - Phys.Lett.A, 1986, v.117, p.175.
24. Jones C.K.R.T. Lefshetz Center for Dynamical Systems technical report No.86-9.
25. Weinstein M. - Commun. Pure Appl. Math., 1986, v.39., p.51.
26. Shatah J., Strauss W.A. - Commun.Math.Phys., 1985, v.100, p.173.
27. Makhankov A.V., Makhankov V.G. - phys.stat.sol.(b), 1988, v.145, p.669.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июня 1988 года.

Барашенков И.В., Гочева А.Д., P17-88-411
Маханьков В.Г., Пузынин И.В.
Устойчивость солитоноподобных "пузырьков"

Показано, что недавно обнаруженные солитонные решения D-мерного нелинейного уравнения Шредингера, имеющие вид пузырьков разряжения в конденсате, неустойчивы при любом D, и что этот факт не зависит от вида нелинейности. Для частного случая $\psi^3 - a\psi^5$ уравнения Шредингера, к которому приводит целый ряд задач нелинейной физики, численно найдены инкременты распада солитонов-пузырьков.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод авторов

Barashenkov I.V., Gocheva A.D., P17-88-411
Makhankov V.G., Puzynin I.V.
Stability of the Soliton - Like "Bubbles"

We show that the recently found bubble-like soliton solutions of D-dimensional nonlinear Schrödinger equation are unstable for any D and that this fact does not depend on the choice of nonlinearity. For the particular case of the $\psi^3 - a\psi^5$ NLS equation which arises in a variety of physical contexts the bubble's growth rates are numerically calculated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988