сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-88-348

Д.П.Санкович

ИНФРАКРАСНЫЕ ОЦЕНКИ И ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В МОДЕЛИ НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

1988

В 1946 году Н.Н.Боголюбов показал, что явление сверхтекучести в бозевских системах со слабым взаимодействием обусловлено появлением в системе бозе-конденсата. При этом взаимодействие между частицами может стабилизировать конденсат, который будет двигаться без трения относительно элементарных возбуждений с произвольной, достаточно малой скоростью. В данной работе рассмотрена модель неидеального бозе-газа и доказано существование в ней конденсата при достаточно низких температурах. Использована техника мажорационных оценок Дайсона-Либа-Саймона и метод функционального интегрирования в голоморфном представлении. Получено уравнение для критической температуры фазового перехода и оценка сверху для энергии одночастичных возбуждений.

I. Модель неидеального бозе-газа и теорема Боголюбова об особенностях типа q^{-d}

Рассмотрим в d-мерном кубе $V \in R^d$ с координатами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^d)$, $x^j \in (-L/2, L/2)$, $j = 1, 2, \ldots d$, и объемом $V = L^d$ систему N одинаковых бесспиновых частиц. Буквой V будем обозначать как область V, так и ее объем. Состояния такой системы характеризуются волновыми функциями $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, где x_n -совокупность пространственных координат n-й частицы.
В рассматриваемом случае волновые функции являются квадратично-интегрируемыми и симметричными относительно любой перестановки P среди N аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_N$: $P\varphi = \varphi$, то есть мы имеем статистику бозевского типа.

Гамильтониан системы H состоит из аддитивной симметричной суммы индивидуальных энергий частиц и бинарной симметричной суммы энергий взаимодействия различных пар частиц и имеет вид

$$H = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\Delta_{x_n} + \sum_{1\le n<m\le N} \Phi(x_n - x_m), \qquad (I)$$

где Δ_{x_n} -оператор Лапласа по переменной x_n , а потенциальная энергия Φ взаимодействия характеризуется вещественной функцией, инвариантной по отношению к отражению $\Phi(x)=\Phi(-x)$.

Учитывая, что в статистической механике общепринят предельный переход $N\to\infty,\ V\to\infty$, $N/V = n = const$, называемый термодинамическим, удобно воспользоваться квазидискретным представлением /I/. На волновые функции φ накладываются условия периодичности с периодом L по каждой из пространственных координат x_n^j : $T_n^{(j)}\varphi=\varphi$, где $T_n^{(j)}$ - оператор, заменяющий x_n^j на $x_n^j + L$ и оставляющий все остальные координаты для выражения φ неизменными. Чтобы обеспечить выполнение условия периодичности для всех моментов времени t , берем для потенциальной энергии взаимодействия пар частиц вместо интеграла Фурье дискретную сумму

$$\Phi(x) = \frac{1}{V}\sum_k e^{ikx} \nu(k), \qquad (2)$$

где $k=(k^1,k^2,\dots,k^d)$, $k^j = 2\pi L^{-1} n_j$, $n_j \in \mathbb{Z}^1$, $j=1,2,\dots,d$.

Используем для описания нашей модели представление вторичного квантования /2/. Гамильтониан (I) примет вид

$$H = \int_V \psi^+(x)\left(-\frac{1}{2}\Delta_x\right)\psi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_V \Phi(x_1-x_2)\psi^+(x_1)\psi^+(x_2)\psi(x_2)\psi(x_1)\,dx_1 dx_2 . \qquad (3)$$

Операторные функции $\psi^+(x),\psi(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Бозе:

$$\begin{aligned} &\psi(x)\psi^+(x') - \psi^+(x')\psi(x) = \delta(x-x'),\\ &\psi(x)\psi(x') - \psi(x')\psi(x) = 0,\\ &\psi^+(x)\psi^+(x') - \psi^+(x')\psi^+(x) = 0, \end{aligned} \qquad (4а)$$

$\delta(x)$ - d-мерная δ-функция Дирака.

В квазидискретном представлении вводятся квантованные амплитуды Бозе a_p^+, a_p -операторы рождения и уничтожения частиц с импульсами p:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p e^{ipx} a_p,\\ \psi^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p e^{-ipx} a_p^+. \end{aligned} \qquad (5)$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_p, a_q^+] = \delta_{p,q},\ [a_p,a_q]=0,\ [a_p^+,a_q^+]=0, \qquad (4б)$$

$\delta_{p,q}$ -символ Кронекера.

Используя (2),(3) и (5), имеем

$$H = \sum_q \frac{q^2}{2} a_q^+ a_q + \frac{1}{2V}\sum_{p,q,k} \nu(k) a_p^+ a_q^+ a_{p+k} a_{q-k}, \qquad (6)$$

где $\nu(k)=\nu(-k)=\nu^*(k)$.

Система, описываемая гамильтонианом (6), носит название модели неидеального бозе-газа и служит основным кандидатом на объяснение явления сверхтекучести жидкого гелия-2.

Сверхтекучесть представляет собой фазовый переход в системе бозе-частиц, сопровождающийся возникновением "дальнего порядка". Пусть $F_1(x_1,x_2) \equiv \langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle$ -одночастичная матрица плотности. $\langle \dots \rangle$ означает равновесное гиббсовское усреднение с гамильтонианом H . В силу пространственной однородности системы $F_1(x_1,x_2) = F_1(|x_1-x_2|)$. Наличие дальнего порядка означает, что

$$\lim_{|x_1-x_2|\to\infty} F_1(x_1,x_2) = n_0 > 0. \qquad (7)$$

На языке фурье-преобразования

$$w(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int F_1(x) e^{ikx} dx$$

из условия (7) следует, что

$$w(k) = n_0\delta(k) + w_1(k),$$

где $w_1(k)$ характеризует непрерывное распределение частиц по ненулевым импульсам, а n_0 -плотность конденсата, то есть

$$n_0 = \frac{1}{V}\langle a_0^+ a_0\rangle = \frac{1}{V^2}\iint\limits_V \langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle dx_1 dx_2 > 0. \quad (8)$$

Таким образом, возникновение фазового перехода в модели неидеального бозе-газа, связанное с появлением в системе дальнего порядка в смысле соотношения (7), обусловлено возникновением отличной от нуля плотности бозе-конденсата n_0. Заметим, что условие (8) очевидно связано со стратегией Фрелиха в теории фазовых переходов в системах с непрерывной группой симметрии (см. следующий раздел) и должно выполняться в термодинамическом пределе, что отвечает общей концепции теории фазовых переходов[3].

Объяснение роли конденсата в системе слабо-неидеального бозе-газа ($\nu(k)$ "мало") на основе понятия квазисредних[4] было впервые дано Боголюбовым[5].

В работе[4] Боголюбов доказал важную теорему, получившую название теоремы о q^{-2}. Эта теорема дает оценку снизу для корреляционной средней $\langle a_q^+ a_q\rangle$:

$$\langle a_q^+ a_q\rangle \geqslant -\frac{1}{2} + \theta\frac{n_0}{n}\frac{m}{q^2}, \quad \theta \neq 0, \quad (9)$$

где m -масса частицы, $\beta = \theta^{-1}$ -обратная температура. Просуммируем обе части (9) по всем q ($q \neq 0$). При этом $|q| \leqslant p_{max}$ - импульс Дебая.

$$\frac{1}{N}\sum_{q\neq 0}\langle a_q^+ a_q\rangle = 1 - \frac{n_0}{n} \geqslant \quad (10)$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\eta + \theta\frac{n_0}{n} m \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{L^d}{N}\int\limits_{|q|\leqslant p_{max}}\frac{dq}{q^2}.$$

Напомним, что d -пространственная размерность системы. Левая часть (10) ограничена при всех d, а интеграл в правой части расходится при $d = 1,2$, то есть в этом случае необходимо, чтобы $n_0 = 0$. Итак, неравенство (9) означает, что в одно- и двумерных системах при $\theta \neq 0$ дальний порядок отсутствует.

Таким образом, теорема о q^{-2} накладывает запрет на возникновение фазовых переходов при $\theta \neq 0$ в модели неидеального бозе-газа

при $d = 1,2$. Заметим, что этот результат не ограничен малостью взаимодействия и строго выполняется в предположении градиентной инвариантности взаимодействия.

С помощью теоремы о q^{-2} можно исследовать также спектр элементарных возбуждений системы в длинноволновом пределе $q \to 0$. При этом получается "акустическая" бесщелевая зависимость энергии элементарных возбуждений от импульса $\mathcal{E} = \sqrt{s}\,q$.

Ниже мы получим оценку сверху для $\langle a_q^+ a_q\rangle$ ($q \neq 0$) и на ее основе докажем, что при $d \geq 3$ в системе неидеального бозе-газа возникает фазовый переход с $n_0 > 0$. Мы также получим уравнение для температуры этого перехода и оценку сверху для энергии элементарных возбуждений, имеющую "сверхтекучий" характер.

2. Метод Фрелиха-Саймона-Спенсера в теории фазовых переходов

Проблема построения математической теории фазовых переходов является одной из основных проблем статистической механики. Традиционная точка зрения на фазовые переходы "состоит в том, что смена фаз проявляется в нарушении регулярности термодинамических функций, являющихся вне точки фазового перехода вещественно аналитическими. С этой точки зрения теория фазовых переходов должна состоять в доказательстве кусочной аналитичности термодинамических функций и исследовании природы их возможных особенностей"[3]. Наиболее прямая реализация этой программы заключалась в исследованиях Ли и Янга[6], предложивших теорию фазовых переходов, основанную на идее доказательства того, что все нули большой статистической суммы в комплексной плоскости значений активности z при $V \to \infty$ (V -объем системы) лежат на окружности $|z| = 1$. Ли и Янг рассмотрели случай решетчатых систем. В дальнейшем, используя так называемый контурный метод Пайерлса[7], удалось доказать ряд тонких теорем о существовании фазовых переходов в решетчатых системах классической[8,9] и квантовой[10,11] механики, а также квантовой теории поля[12]. Подробный обзор и анализ современных исследований в данном направлении содержится в монографии[13]. В большинстве случаев использования аргументов контурного метода мы имеем дело с нарушением дискретной группы симметрии модели.

В 1976 году Фрелих, Саймон и Спенсер в работе[14] доказали существование фазового перехода в классической модели Гейзенберга и в некоторых родственных моделях. В этом случае мы имеем непрерывную группу симметрии. В дальнейшем Либ, Дайсон и Саймон[15] (далее ДЛС) развили идеи работы[14] на квантовый случай и впервые доказали наличие фазового перехода в некоторых типах квантовых спиновых решетчатых систем с непрерывной симметрией, в частности, в модели Гейзенберга – спинов I/2 с взаимодействием ближайших соседей на простой кубической решетке при размерности пространства 3 и более (случай фазового перехода при размерности I и 2 запрещен теоремой Мермина-Вагнера [I6]). Изложим кратко основные идеи ДЛС, остановившись на наиболее важном для приложений случае изотропной ферромагнитной модели Гейзенберга.

Рассмотрим на простой d-мерной кубической решетке $\mathbb{Z}^d$ параллелепипед $\Lambda = \{\alpha \mid 0 \le \alpha_1 \le L_1 - 1, \dots, 0 \le \alpha_d \le L_d - 1\}$. С каждым узлом $\alpha \in \Lambda$ ассоциировано $(2S+1)$-мерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_\alpha \cong \mathbb{C}^{2S+1}$ (S =I/2, I, 3/2, ... -фиксированное целое или полуцелое число -"спин") и три самосопряженных оператора $S_\alpha^{(j)}$ (j =I,2,3), удовлетворяющих обычным коммутационным соотношениям:

$$[S_\alpha^{(j)}, S_\beta^{(k)}] = i\,\delta_{\alpha,\beta}\,\varepsilon_{jkl}\,S_\alpha^{(l)}, \tag{II}$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ -символ Кронекера, ε_{jkl} -полностью антисимметричный тензор ранга 3, а по повторяющимся латинским индексам производится суммирование. Имеем также условие

$$S_\alpha^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(S_\alpha^{(j)}\right)^2 = S(S+1). \tag{I2}$$

(II) и (I2) определяют неприводимое унитарное представление группы $SU(2)$ в $\mathcal{H}_\alpha$ и задают S_α единственным образом. Основное гильбертово пространство в объеме Λ есть $\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{H}_\alpha \cong \mathbb{C}^{(2S+1)|\Lambda|}$. S_α означает оператор в $\mathcal{H}_\Lambda$, который есть тензорное произведение I в каждом $\mathcal{H}_\beta$ для $\alpha \ne \beta$ на S_α в $\mathcal{H}_\alpha$. Гамильтониан модели Гейзенберга с взаимодействием ближайших соседей, рассматриваемый ДЛС, есть

$$H = -\sum_{\alpha, j} S_\alpha \cdot S_{\alpha+\delta_j}, \tag{I3}$$

где $j \in (1, 2, \dots, d)$, $\alpha \in \Lambda$. Здесь δ_j -единичный вектор, j-я компонента которого равна I. Наложим периодические граничные условия: если $\alpha_j = L_j - 1$, то $(\alpha + \delta_j)_j = 0$. Используя (I2), гамильтониан модели (I3) можно переписать в виде

$$H = constant + \frac{1}{2}\sum_{\alpha, j}\left(S_\alpha - S_{\alpha+\delta_j}\right)^2. \tag{I4}$$

Статистическая сумма и температурные средние задаются стандартными выражениями:

$$Z = Tr_{\mathcal{H}_\Lambda} e^{-\beta H}, \qquad \langle A \rangle_{\Lambda,\beta} = Z^{-1}\, Tr\, A\, e^{-\beta H}. \tag{I5}$$

Вводится фурье-представление спиновых операторов

$$\hat{S}_p = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{\alpha\in\Lambda} e^{-ip\alpha} S_\alpha, \tag{I6}$$

где $p \in \Lambda^*$ -дуальная решетка, то есть $p_j = 2\pi L_j^{-1} n_j$, $n_j = -\frac{L_j}{2}+1, \dots, \frac{L_j}{2}$ (L_j -четное) или $n_j = -\frac{1}{2}(L_j - 1), \dots, \frac{1}{2}(L_j - 1)$ (L_j нечетно). В этих переменных гамильтониан H принимает вид

$$H = constant + \sum_p E_p\, \hat{S}_p\, \hat{S}_{-p}, \tag{I4a}$$

где

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{|\delta|=1} \left|1 - e^{ip\delta}\right|^2 = d - \sum_{j=1}^{d} \cos p_j \ge 0. \tag{I7}$$

Из (II) имеем коммутационное соотношение

$$[\hat{S}_p^{(j)}, \hat{S}_q^{(k)}] = |\Lambda|^{-1/2}\, i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{S}_{p+q}^{(l)}. \tag{IIa}$$

В подходе ДЛС фундаментальное значение имеет стратегия Фрелиха [I7], основанная на множественности фаз при достаточно высоких β. В случае рассматриваемой модели данное условие имеет вид

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{3} \left(|\Lambda|^{-1} \sum_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha^{(j)}\right)^2 \right\rangle_{\Lambda,\beta} \ne 0. \tag{I8}$$

Заметим, что в силу симметрии $\langle S_\alpha^{(j)} \rangle_{\Lambda,\beta} = 0$, $j = 1,2,3$. Обсуждение связи (I8) с другими формулировками возникновения фазовых переходов, основанное на теореме Гриффитса [I8], содержится в работе ДЛС. Из теоремы Планшереля имеем следующее правило сумм:

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p\in\Lambda^*} g_p = S(S+1), \tag{I9}$$

где

$$g_p = \langle \hat{S}_p \hat{S}_{-p} \rangle_{\Lambda,\beta} .$$

Условие (I8) принимает вид

$$\lim_{\Lambda\to\infty} |\Lambda|^{-1} g_0 \neq 0 . \qquad (20)$$

(20) означает макроскопическое заполнение нулевой моды, то есть в данном подходе фазовый переход представляет собой своеобразную конденсацию спиновых волн.

ДЛС для доказательства (20) получают оценку сверху для g_p ($p\neq 0$). При этом используется так называемая двухточечная функция Дюамеля, определение и свойства которой мы рассмотрим в следующем разделе. Ключевое значение имеет свойство гауссовой доминантности, доказанное ДЛС с помощью метода квантовой трансфер-матрицы, обобщающего классический метод доказательства работы /I4/. Имея оценку сверху для g_p ($p\neq 0$) и используя правило сумм (I9), легко установить условие появления в системе фазового перехода в смысле (20). При этом конструктивным образом возникает уравнение для определения обратной температуры фазового перехода β_c :

$$S(S+1) = S\sqrt{\tfrac{3}{2}}\; H_3\left(\beta_c S\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right), \qquad (21)$$

где

$$H_3(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{|p_i|<\pi} cth(\xi E_p)\, dp . \qquad (22)$$

Подчеркнем, что ключевое значение в подходе ДЛС имеет теорема о гауссовой доминантности, которая доказана ими в случае решетчатой системы специального вида, обладающей отражательной симметрией. Мы в разделе 4 обобщим теорему о гауссовой доминантности, что даст возможность в разделе 5 исследовать фазовый переход в модели неидеального бозе-газа.

3. Двухточечные функции Дюамеля

Впервые понятие двухточечной функции Дюамеля (д.ф.) появилось в работе Кубо /I9/. В дальнейшем многие авторы активно обсуждали различные свойства и применения д.ф. (см., например, /20/).

Пусть квантовая система с гамильтонианом H находится в объеме V и имеет статистическую сумму

$$Z = Tr\, e^{-\beta H} .$$

Д.ф. произвольных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется билинейная форма

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = Z^{-1}\int_0^1 Tr\left(e^{-x\beta H}\mathcal{A}\, e^{-(1-x)\beta H}\mathcal{B}\right)dx . \qquad (23)$$

Можно показать, что (23) эквивалентно следующему соотношению, впервые доказанному Дюамелем:

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = Z^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\mu\,\partial\lambda}\, Tr\, e^{-\beta H + \mu\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}} . \qquad (24)$$

Из этих определений сразу видно, что

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathcal{B},\mathcal{A}), \qquad (25)$$

$$(\mathcal{A}^+,\mathcal{A}) \geq 0, \qquad (26)$$

$$|(\mathcal{A},\mathcal{B})| \leq \sqrt{(\mathcal{A}^+,\mathcal{A})(\mathcal{B}^+,\mathcal{B})} . \qquad (27)$$

В отличие от обычной температурной двухточечной средней $\langle\mathcal{A}\mathcal{B}\rangle$, которая несимметрична, для д.ф. выполнено условие симметрии (25). С точки зрения применений д.ф. полезно то обстоятельство, что они наиболее "близки" к своему классическому аналогу в том смысле, что $(\mathcal{A}^+,\mathcal{A})$ не зависит от постоянной Планка в случае гармонического осциллятора.

Зная д.ф. для всех пар $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, легко вычислить обычное температурное среднее $\langle\mathcal{A}\rangle = (\mathcal{A},1)$.

Имеет место следующее полезное неравенство /20/:

$$(\mathcal{A}^+,\mathcal{A}) \leq \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^+\mathcal{A}\rangle . \qquad (28)$$

Кроме того, учитывая, что $\langle[\mathcal{A},\mathcal{B}]\rangle = ([\mathcal{A},\beta H],\mathcal{B})$, можно легко установить неравенство Боголюбова /2I/:

$$|[\mathcal{A},\mathcal{B}]|^2 \leq \langle[\mathcal{A}^+,[\beta H,\mathcal{A}]]\rangle\, \frac{1}{2}\langle \mathcal{B}\mathcal{B}^+ + \mathcal{B}^+\mathcal{B}\rangle . \qquad (29)$$

Заметим, что в бесконечном объеме определение для д.ф.(23) некорректно и необходимо использовать более тонкие аргументы, связанные с граничным КМШ-условием /22/.

Решающее значение в стратегии Фрелиха-Саймона-Спенсера, как мы уже отмечали, имеет оценка сверху для температурной двухточечной средней. Эта оценка получается из оценки сверху соответствующей д.ф. и следующего утверждения /I5/:

<u>Теорема I</u>(ДЛС). <u>Пусть задана функция</u> f <u>из</u> $[0,\infty)$ <u>в</u> $[0,1)$, <u>определенная соотношением</u>

$$x f(x \,\mathrm{th}\, x) = \mathrm{th}\, x. \tag{30}$$

<u>Пусть заданы, кроме того,</u>

$$g(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^+\mathcal{A} \rangle,$$

$$b(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^+, \mathcal{A}),$$

$$c(\mathcal{A}) = \langle [\mathcal{A}^+, [\beta H, \mathcal{A}]] \rangle.$$

<u>Тогда для любого оператора</u> $\mathcal{A}$ <u>и любого самосопряженного оператора</u> H <u>справедливо неравенство</u>

$$b(\mathcal{A}) \geq g(\mathcal{A})\, f\left(\frac{c(\mathcal{A})}{4g(\mathcal{A})} \right). \tag{3I}$$

Данная теорема позволяет получить необходимую в методе оценку сверху для g, зная оценки сверху для b и c.. В самом деле, имеет место

<u>Теорема 2</u>(ДЛС). <u>Предположим, что</u> $b > g f\left(\frac{c}{4g}\right)$, <u>где</u> f - <u>определенная выше функция, а</u> $b, g, c > 0$. <u>Предположим, что</u> $b \leq b_0$, $c \in c_0$. <u>Тогда</u> $g \leq g_0$, <u>где</u>

$$g_0 = \frac{1}{2}\sqrt{c_0 b_0}\; \mathrm{cth}\, x_0, \quad x_0 = \sqrt{\frac{c_0}{4b_0}}. \tag{32}$$

Заметим, что в случае гармонического осциллятора, и только в этом случае, неравенство (3I) превращается в равенство, что указывает на оптимальность функции f в (3I).

Теорема 2, таким образом, сводит получение оценки сверху для температурной средней к оценке для д.ф. и средней от двойного коммутатора. Оценка сверху для д.ф. следует из т.н. гауссовой доминантности.

4. <u>Оценка сверху для двухточечной функции Дюамеля</u>

Наша цель состоит в получении оценки сверху для д.ф. в случае моделей в R^d, задаваемых с помощью бозе-операторов и описывающих поведение систем типа неидеального бозе-газа.

Рассмотрим систему бесспиновых частиц, введенную в разделе I. Ее гамильтониан возьмем в немного более общем виде:

$$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k, \tag{33}$$

$$H_1 = \frac{1}{2V} \sum_{p,q,k} \nu(k)\, a_p^+ a_q^+ a_{p+k} a_{q-k}.$$

<u>Теорема 3</u>. <u>Для гамильтониана</u> (33), <u>удовлетворяющего условию</u>

$$\omega_p \geq 0, \tag{34}$$

<u>имеет место оценка</u>

$$(a_p^+, a_p) \leq \beta^{-1} \omega_p^{-1}, \quad p \neq 0. \tag{35}$$

Следуя идее, впервые предложенной в /I4/, мы будем доказывать эту теорему на основе следующего утверждения.

<u>Теорема 4</u>. (Гауссова доминантность). <u>Пусть</u> $h_k \in \mathbb{C}$ -<u>произвольные комплексные числа</u>. <u>Наряду с (33) рассмотрим гамильтониан</u>

$$H(h) = H_0(h) + H_1, \tag{36}$$

$$H_0(h) = \sum_{\omega_k} \omega_k (a_k^+ + h_k^*)(a_k + h_k). \tag{37}$$

<u>Определим функционал</u>

$$\mathcal{L}(\{h_k\}) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H(h)}.$$

<u>Тогда</u>

$$\mathcal{L}(\{h_k\}) \leq \mathcal{L}(\{0\}). \tag{38}$$

Докажем, что из теоремы 4 следует теорема 3.

Из (38) вытекает, что в точке $\{h_k\} = \{0\}$, являющейся стационарной точкой для $\mathcal{L}(\{h_k\})$, расположен локальный максимум этого функционала, что означает неположительную определенность квадратичной формы второго дифференциала $d^2\mathcal{L}$ в точке O. Вычислим эту величину. Технически удобнее рассмотреть $Q(\{h_k\}) \equiv \ln \mathcal{L}(\{h_k\})$ и ввести действительные переменные $x_k = \mathrm{Re}\, h_k$ и $y_k = \mathrm{Im}\, h_k$. Тогда будем иметь

$$Q(x,y) = -\beta \sum_k \omega_k (x_k^2 + y_k^2) + R(x,y),$$

где $R(x,y) = \ln \operatorname{Tr} \exp\{-\beta\sum_k \omega_k[x_k(a_k^+ + a_k) + iy_k(a_k^+ - a_k)] - \beta H(0)\}$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x_p} = -2\beta\omega_p x_p + \frac{\partial R}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y_p} = -2\beta\omega_p y_p + \frac{\partial R}{\partial y_p};$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_p\partial x_q} = -2\beta\omega_p\delta_{p,q} + \frac{\partial^2 R}{\partial x_p \partial x_q}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_p\partial y_q} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_p\partial y_q},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y_p\partial y_q} = -2\beta\omega_p\delta_{p,q} + \frac{\partial^2 R}{\partial y_p\partial y_q};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_p} = -\beta\omega_p\langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma \equiv -\beta\omega_p \frac{\operatorname{Tr}[(a_p^+ + a_p)e^{-\beta\Gamma(x,y)}]}{\operatorname{Tr} e^{-\beta\Gamma(x,y)}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_p} = -i\beta\omega_p\langle a_p^+ - a_p\rangle_\Gamma \equiv -i\beta\omega_p \frac{\operatorname{Tr}[(a_p^+ - a_p)e^{-\beta\Gamma(x,y)}]}{\operatorname{Tr} e^{-\beta\Gamma(x,y)}}$$

и введено обозначение

$$\Gamma(x,y) \equiv \sum_k \omega_k[x_k(a_k^+ + a_k) + iy_k(a_k^+ - a_k)] + H(0).$$

Уравнения для определения стационарных точек Q (совпадающих со стационарными точками $\mathcal{L}$) имеют вид

$$x_p = -\frac{1}{2}\langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma; \qquad y_p = -\frac{i}{2}\langle a_p^+ - a_p\rangle_\Gamma. \tag{39}$$

В силу правил отбора для гамильтониана (33) имеем, что (39) всегда имеют тривиальное решение $x_p = y_p = 0$. Покажем, что в этой точке второй дифференциал неположительно определен: $d^2Q \le 0$. Имеем

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_p\partial x_q} = -2\beta\omega_p\delta_{p,q} + \beta^2\omega_p\omega_q(a_p^+ + a_p, a_q^+ + a_q)_\Gamma - \beta^2\omega_p\omega_q\langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma\langle a_q^+ + a_q\rangle_\Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_p\partial y_q} = i\beta^2\omega_p\omega_q(a_p^+ + a_p, a_q^+ - a_q)_\Gamma - i\beta^2\omega_p\omega_q\langle a_p^+ + a_p\rangle_\Gamma\langle a_q^+ - a_q\rangle_\Gamma, \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y_p\partial y_q} = -2\beta\omega_p\delta_{p,q} - \beta^2\omega_p\omega_q(a_p^+ - a_p, a_q^+ - a_q)_\Gamma + \beta^2\omega_p\omega_q\langle a_p^+ - a_p\rangle_\Gamma\langle a_q^+ - a_q\rangle_\Gamma,$$

где введено обозначение для д.ф.:

$$(\mathcal{A},\mathcal{B})_\Gamma \equiv Z^{-1}\int_0^1 \operatorname{Tr}(e^{-x\beta\Gamma}\mathcal{A}e^{-(1-x)\beta\Gamma}\mathcal{B})dx, \quad Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta\Gamma}.$$

Рассматривая (40) в точке $\{x_k, y_k\} = \{0\}$, используя билинейность и симметричность д.ф. и правила отбора, получаем

$$d^2Q\Big|_0 = \sum_p[-2\beta\omega_p + 2\beta^2\omega_p^2(a_p^+, a_p)][(dx_p)^2 + (dy_p)^2] \le 0. \tag{41}$$

Из (41) сразу же следует требуемое теоремой 3 неравенство.

Замечание 1. Неравенство (38) названо гауссовой доминантностью в силу того, что оно обращается в равенство на гауссовых мерах, то есть в случае квадратичных гамильтонианов.

Замечание 2. Использование координатного представления позволяет на основе гауссовой доминантности получить немного более детальную оценку для д.ф. В частности, в одномерном случае ($\omega_p = \frac{1}{2}p^2$) имеем

$$(a_p^+, a_p) \le \frac{2}{\beta p^2}\left(1 - \frac{\sin pL}{pL}\right), \quad p \ne 0,$$

где L -длина системы.

Докажем теорему 4.

Используя метод функционального интегрирования в голоморфном представлении, разработанный Березиным /2/, введем оператор

$$\hat{U}(t,\tau) = e^{-itH_0(h)}\, e^{i(t-\tau)H}\, e^{i\tau H_0(h)}$$

и операторы

$$a_p(t) = e^{-iH_0(h)t}\, a_p\, e^{iH_0(h)t},$$

$$a_p^+(t) = e^{-iH_0(h)t}\, a_p^+\, e^{iH_0(h)t}.$$

Используя явный вид $H_0(h)$, можно получить, что соответствующие операторам $a_p(t)$ и $a_p^+(t)$ комплекснозначные функции есть

$$a_p(t) = e^{it\omega_p}(a_p+h_p) - h_p,$$
$$a_p^*(t) = e^{-it\omega_p}(a_p^*+h_p^*) - h_p^*. \qquad (42)$$

Тогда функционал $U(t,\tau|a^*,a)$, отвечающий нормальной форме оператора $\hat{U}(t,\tau)$, есть значение при $a_p(t)$, $a_p^*(t)$, даваемых (42), функционала $U_1(t,\tau|a^*,a)$ от произвольных функций $a_p(t)$, $a_p^*(t)$, где

$$U_1(t,\tau|a^*,a) = \exp\left\{\int \frac{\delta}{\delta a_{p_1}(t_1)} \Delta(p_1,t_1;p_2,t_2) \frac{\delta}{\delta a^*_{p_2}(t_2)}\, dp_1\, dp_2\, dt_1\, dt_2\right\} \exp\left\{i\int_\tau^t V(s|a^*,a)\, ds\right\}, \qquad (43)$$

$$V(t|a^*,a) = \sum_{p,q,k}{}' \nu(k)\, a_p^*(t)\, a_q^*(t)\, a_{p+k}(t)\, a_{q-k}(t).$$

Нормальная форма функционала оператора $e^{itH_0(h)}$ имеет вид

$$e^{itH_0(h)} = e^{(a^*+h^*)(e^{i\omega t}-1)(a+h)}, \qquad (44)$$

где мы используем сокращенное обозначение, опуская суммирование по импульсам и интегрирование по t типа

$$a^* f \equiv \sum_p \int dt\, a_p^*(t)\, f_p(t) \quad \text{и т.д.}$$

Для U_1 имеем следующее представление:

$$U_1(t,\tau|a^*,a) = \iint dz\, dz^*\, e^{-zz^*}\, e^{-a^*(R^{-1}+\Delta)^{-1}a},$$

где R -оператор с ядром

$$R(p_1,t_1|p_2,t_2) \equiv R_1(p_1,p_2;t_1)\,\delta(t_1-t_2),$$

$$R_1(p_1,p_2;t) = V_1(p_1-p_2)\, z(p_1-p_2,t) + V_2(p_2-p_1)\, z^*(p_2-p_1,t).$$

$z(p,t)$, $z^*(p,t)$ -комплекснозначные функции, а $V_1(p)$, $V_2(p)$ -произвольные функции, удовлетворяющие условию

$$V_1(p)\, V_2(p) = \frac{1}{2V}\, \nu(p).$$

Δ -оператор с ядром

$$\Delta(p_1,t_1|p_2,t_2) = \theta(t_1-t_2)\, \delta_{p_1,p_2}\, e^{-i(t_2-t_1)\omega_{p_1}},$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$$

Используя явный вид (42), имеем

$$U(t,\tau|a^*,a) = \iint dz\, dz^*\, e^{-zz^*} \exp\{-h^* T^{(0)} h - (a^*+h^*)\, T(a+h) + (a^*+h^*)\, T^{(-)} h + h^* T^{(+)}(a+h)\}, \qquad (45)$$

где

$$T(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\, dt_2\, e^{it_2\omega_{p_2} - it_1\omega_{p_1}}\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z),$$

$$T^{(+)}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\, dt_2\, e^{it_2\omega_{p_2}}\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z);$$

$$T^{(-)}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\, dt_2\, e^{-it_1\omega_{p_1}}\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z);$$

$$T^{(0)}(z^*,z) = \iint_\tau^t dt_1\, dt_2\, S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z),$$

а $S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z)$ -ядро оператора $R(1+\Delta R)^{-1}$.

Используя формулы (44),(45) при $\tau=0$ и формулу умножения операторов, находим функционал, отвечающий нормальной форме оператора $\exp(itH)$:

$$e^{itH} = \iint dz\, dz^* \exp\{-zz^* - aa^* + (a^*+h^*)(e^{i\omega t}-1)h - h^* T(a+h) + h^* T^{(-)} h + \qquad (46)$$

$$+h^*\mathcal{T}^{(+)}(a+h)-h^*\mathcal{T}^{(0)}h+$$

$$+[a^*+(a^*+h^*)(e^{i\omega t}-1)][a-\mathcal{T}(a+h)+\mathcal{T}^{(-)}h]\}.$$

Далее, вычисляя шпур:

$$\operatorname{Tr} e^{itH}=\iint dz\,dz^*\iint da\,da^*\exp\{h^*\mathcal{T}^{(+)}a+$$
$$+a^*e^{i\omega t}\mathcal{T}^{(-)}h+h^*[\mathcal{T}^{(+)}+e^{i\omega t}\mathcal{T}^{(-)}-\mathcal{T}^{(0)}]h- \tag{47}$$
$$-(a^*+h^*)[e^{i\omega t}(\mathcal{T}-1)+1](a+h)\},$$

делая в (47) замену переменных интегрирования $a=b-h$, совершая преобразование $t=i\beta$, где $Im\,\beta=0$, имеем

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta H}=\iint dz\,dz^*e^{-zz^*}\det[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]^{-1}e^{h^*Qh}, \tag{48}$$

где

$$Q\equiv-\mathcal{T}^{(0)}+\mathcal{T}^{(+)}[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]^{-1}\cdot e^{-\beta\omega}\mathcal{T}^{(-)}. \tag{49}$$

Заметим, что оператор $1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})$ положительно определен, то есть

$$Re\{h^*[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]h\}\geq\varkappa h^*h, \tag{50}$$

где $\varkappa>0$ -вещественное число. Операторы $\mathcal{T}^{(0)}, \mathcal{T}^{(\pm)}$ и $\mathcal{T}$ определяются ядрами

$$\mathcal{T}^{(0)}(z^*,z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\;S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z);$$
$$\mathcal{T}^{(+)}(z^*,z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,e^{-t_2\omega_{p_2}}S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z); \tag{51}$$
$$\mathcal{T}^{(-)}(z^*,z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,e^{t_1\omega_{p_1}}S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z);$$
$$\mathcal{T}(z^*,z)=\iint_0^\beta dt_1dt_2\,e^{t_1\omega_{p_1}-t_2\omega_{p_2}}S(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z).$$

Обозначая через $S^{(1)}(p_1,t_1;p_2,t_2|z^*,z)$ ядро оператора ΔS, имеем, учитывая (51):

$$e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})=\int_0^\infty[\delta(\beta-t)\delta_{p_1,p_2}- \tag{52}$$
$$-\theta(\beta-t)S^{(1)}(p_1,t;p_2,\beta|z^*,z)]e^{-t\omega_{p_2}}dt.$$

Из (50)-(52) и условия (34) видно, что

$$|\mathcal{T}^{(+)}|\leq|\mathcal{T}^{(0)}|,\;|\mathcal{T}^{(-)}|\leq e^{\beta\omega}|\mathcal{T}^{(0)}|,\;|1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})|\geq|\mathcal{T}^{(0)}|. \tag{53}$$

Учитывая, что $\mathcal{T}(\omega=0)=\mathcal{T}^{(0)}$, из (50), (53) заключаем, что

$$Re(h^*Qh)\leq Re\{h^*[-\mathcal{T}^{(0)}+|\mathcal{T}^{(+)}(1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T}))^{-1}e^{-\beta\omega}\mathcal{T}^{(-)}|]h\}\leq 0,$$

то есть квадратичная форма в экспоненте подынтегрального выражения (48) отрицательно определена, таким образом

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta H(h)}\leq$$
$$\leq\iint dz\,dz^*\,e^{-zz^*}\det[1-e^{-\beta\omega}(1-\mathcal{T})]^{-1}=\operatorname{Tr} e^{-\beta H(0)},$$

что завершает доказательство теоремы 4.

Оценки типа (38) известны в квантовой теории поля как $grad\varphi$-оценки, а условие появления бозе-конденсата есть обобщение на температурный случай представления Каллена-Лемана.

5. <u>Конденсация в неидеальном бозе-газе</u>

Сейчас мы применим результаты разделов 3 и 4 и вычислим двойной коммутатор в модели неидеального бозе-газа для доказательства фазового перехода, сопровождающегося появлением бозе-конденсата и обуславливающего явление сверхтекучести.

Определим, как и выше, следующие величины:

$$b_p=(a_p^+,a_p),\;g_p=\frac{1}{2}\langle a_pa_p^++a_p^+a_p\rangle,\;c_p=\langle[a_p^+,[\beta H,a_p]]\rangle. \tag{54}$$

Имеем следующее правило сумм в данной модели:

$$V^{-1}\sum_{p}\left(g_p-\frac{1}{2}\right)=n, \tag{55}$$

где n -плотность числа частиц. Из (55) и теоремы 2 немедленно следует

Теорема 5(ДЛС). Предположим, что существуют фиксированные измеримые функции B_p, C_p от p и функция $\mathcal{D}(\beta)$, такие, что справедливы следующие оценки:

$$n \geq \mathcal{D}(\beta), \quad \lim_{\beta\to\infty}\mathcal{D}(\beta)\geq \mathcal{D}_\infty;$$

$$b_p \leq \beta^{-1}B_p, \quad B_p<\infty, p\neq 0;$$

$$c_p \leq \beta C_p.$$

Предположим далее, что

$$\lim_{V\to\infty} V^{-1}\sum_{p\neq 0} B_p = \int B_p \frac{dp}{(2\pi)^d},$$

где d -размерность пространства. Дальний порядок существует при некоторой конечной β тогда, когда выполнены соотношения

$$\mathcal{D}_\infty > (2\pi)^{-d}\int \frac{1}{2}\sqrt{B_p C_p}\, dp, \tag{56}$$

$$\int B_p dp<\infty, \quad \mathcal{D}_\infty<\infty. \tag{57}$$

Температура β^{-1} при этом такова, что

$$\mathcal{D}(\beta) > (2\pi)^{-d}\int \frac{1}{2}\sqrt{B_p C_p}\, cth\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\frac{C_p}{B_p}}\right)dp. \tag{58}$$

В частности, если $\mathcal{D}(\beta)$- монотонно неубывающая функция β и выполнены соотношения (56), (57), то дальний порядок существует для $\beta>\beta_c$, где β_c есть единственное решение уравнения

$$\mathcal{D}(\beta_c) = (2\pi)^{-d}\int \frac{1}{2}\sqrt{B_p C_p}\, cth\left(\frac{1}{2}\beta_c\sqrt{\frac{C_p}{B_p}}\right)dp. \tag{59}$$

Применим теорему 5 к исследуемой модели. Из предыдущего раздела известно, что $B_p = \omega_p^{-1}$. $\mathcal{D}(\beta)$ есть, очевидно, $n+\frac{1}{12\pi^2}p^3_{max}(\beta)$,

где p_{max} -импульс Дебая. Прямое вычисление дает

$$\beta^{-1}c_p = \omega_p + \frac{1}{V}\sum_k [\nu(0)+\nu(p-k)]\langle a_k^+ a_k\rangle. \tag{60}$$

Предполагая положительность и ограниченность $0\leq \nu(k)\leq\tilde{\nu}$ потенциала, имеем

$$C_p = \omega_p + n\nu_0, \tag{61}$$

где введено обозначение $\nu_0 \equiv \nu(0)+\tilde{\nu}$. Условие (57) принимает вид

$$\int \omega_p^{-1}dp<\infty, \quad n<\infty. \tag{62}$$

Если положить, что $\omega_p = \frac{1}{2}p^2$, то (62) будет выполнено при $d\geq 3$, что соответствует теореме q^{-2}. Отметим, что всюду в интегралах по импульсам верхний предел интегрирования ограничен некоторым максимальным импульсом - импульсом Дебая. В пространственно-трехмерном случае условие (56) принимает вид

$$n>\frac{1}{12\pi^2}\int_0^{p_{max}} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_p+n\nu_0}{\omega_p}}\, p^2 dp.$$

Считая, что $\omega_p = \frac{1}{2}p^2$, имеем

$$n>\frac{1}{12\pi^2}\left[(p^2_{max}+2n\nu_0)^{\frac{3}{2}}-(2n\nu_0)^{\frac{3}{2}}\right]. \tag{63}$$

Для простоты можно положить, что $p^3_{max}=6\pi^2(n-n_0)$, где n_0 -число частиц в единице объема конденсата, $n_0=n_0(\beta)$, $0\leq n_0\leq n$. Легко заметить, что условие (63) выполняется при любых n. Таким образом, нами доказана

Теорема 6. В модели неидеального бозе-газа с положительным ограниченным фурье-образом потенциала взаимодействия при любых концентрациях $n<\infty$ при достаточно низких температурах ($\beta>\beta_c$) существует дальний порядок. При этом для определения температуры фазового перехода имеем уравнение

$$n=\frac{1}{3\pi^2}\int_0^{p_{max}(\beta_c)} \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2n\nu_0}{p^2}}\, cth\left[\frac{1}{2}\beta_c\sqrt{\frac{p^2}{2}\left(\frac{p^2}{2}+n\nu_0\right)}\right]p^2dp. \tag{64}$$

Условие ограниченности потенциала $\nu(p)$, по-видимому, можно ослабить.

Из теоремы 2 и доказанных выше оценок в модели неидеального бозе-газа можно получить оценку сверху для спектра элементарных возбуждений в модели. Действительно, из соотношений (32) немедленно имеем

$$\langle a_p a_p^+ + a_p^+ a_p \rangle \leq \sqrt{1+\frac{n\nu_0}{\omega_p}}\, cth\left[\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{\omega_p(\omega_p+n\nu_0)}\right]. \tag{65}$$

При нулевой температуре из (65) получаем

$$\langle a_p a_p^+ + a_p^+ a_p \rangle\Big|_{\beta^{-1}=0} \leq \sqrt{1+\frac{n\nu_0}{\omega_p}}. \tag{66}$$

С другой стороны, известен результат теоремы q^{-2} при $\beta^{-1}=0$:

$$\langle a_p a_p^+ + a_p^+ a_p \rangle\Big|_{\beta^{-1}=0} \geq \frac{n_0(\beta^{-1}=0)}{n}\,\frac{\mathcal{E}(p)}{p^2}, \tag{67}$$

где $\mathcal{E}(p)$ –энергия элементарных возбуждений. Полагая в (67) $n_0 \equiv \xi n$ и сравнивая с (66), получаем

$$\xi\,\mathcal{E}(p) \leq \sqrt{p^4 + 2n\nu_0 p^2}, \tag{68}$$

что находится в соответствии с результатами Боголюбова для слабонеидеального бозе-газа и результатами диаграммной техники для гриновских функций /23/. Заметим, что оценка (68) дает независимое подтверждение сверхтекучего характера фазового перехода в модели. Величина $n\nu_0$, входящая в (68), связана с функцией Грина Σ_{11} модели.

Автор искренне благодарен Н.Н.Боголюбову за постоянное внимание к работе и А.М.Курбатову за многолетнее плодотворное сотрудничество в процессе проведения данного исследования.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Н.Н.Боголюбов(мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.:Наука, 1984.
2. Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
3. Д.Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.
4. Н.Н.Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. Препр. Д-781, Дубна, ОИЯИ /1961/.
5. Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР. Сер.физ.,11, 77 /1947/.
6. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys.Rev., 87, 420 /1952/.
7. R.Peierls. Proc.Camb.Phil.Soc., 32, 477 /1936/.
8. R.B.Griffiths. Phys.Rev., A136, 437 /1964/.
9. Р.Л.Добрушин. Теория вероятн. и ее прим., 10, 209 /1965/.

10. J.Ginibre. Comm.Math.Phys., 14, 205 /1969/.
11. D.W.Robinson. Comm.Math.Phys., 14, 195 /1969/.
12. J.Glimm, A.Jaffe, T.Spencer. Comm.Math.Phys., 45, 203 /1975/.
13. Я.Г.Синай. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
14. J.Fröhlich, B.Simon, T.Spencer. Comm. Math. Phys., 50, 79 /1976/.
15. F.J.Dyson, E.H.Lieb, B.Simon. Phys. Rev. Lett., 37, 120 /1976/.
16. N.D.Mermin, H.Wagner. Phys.Rev.Lett., 17, 1133 /1966/.
17. J.Fröhlich. Bull.Amer.Math.Soc., 84, 165 /1978/.
18. R.B.Griffiths. Phys.Rev., 152, 240 /1966/.
19. R.Kubo. J.Phys.Soc.Japan, 12, 570 /1957/.
20. G.Roepstorff. Comm.Math.Phys., 46, 253 /1976/.
21. N.N.Bogolyubov. Phys.Abh.S.U., 1, 113 /1962/.
22. J. Naudts, A.Verbeure, R.Weder. Comm.Math.Phys., 44, 87 /1975/.
23. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Статистическая физика, часть 2. М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 мая 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Санкович Д.П. Р17-88-348

Инфракрасные оценки и фазовый переход в модели неидеального бозе-газа

Рассмотрена модель неидеального бозе-газа. Доказано существование в ней конденсата при достаточно низких температурах. Использована техника мажорационных оценок для двухточечных функций Дюамеля и метод функционального интегрирования в голоморфном представлении. Получено уравнение для критической температуры и оценка сверху для энергии одночастичных возбуждений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Sankovich D.P. P17-88-348

Infrared Bounds and Phase Transitions in Non-Ideal Bose Gas Model

A model of the non-ideal Bose gas is considered. We prove the existence of condensate in the model at sufficiently low temperature. The method of majorizing estimate for the Duhamel Two Point Functions and the functional integral method in the holomorphic representation are used. An equation for the critical temperature and an upper bound for the energy of one-particle exitations are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. (2 тома)	7 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р. 00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике Алушта, 1986.	4 р. 50 к.
—	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. (2 тома)	13 р. 50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. (2 тома)	7 р. 35 к.
Д9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. (2 тома)	13 р. 45 к.
Д7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986.	7 р. 10 к.
Д2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа - 86". Дубна, 1986.	4 р. 45 к.
Д4-87-692	Труды Международного совещания по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, 1987.	4 р. 30 к.
Д2-87-798	Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р. 55 к.
Д14-87-799	Труды II Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987	4 р. 20 к.
Д17-88-95	Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.	5 р. 20 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.