сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-88-230

Л.А.Уварова*, В.К.Федянин

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\Delta A+\vec{D}(A_1, A_2, A_3)=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})$ В СОПРЯЖЕННЫХ СРЕДАХ

* Калининский политехнический институт

1988

Вопросы взаимодействия стационарной плоской волны фиксированной частоты ω с изотропным диэлектрическим материалом, показатель преломления которого зависит от вектора электрической напряженности как $n(\omega, |\vec{E}|) = n_0(\omega) + n_1(\omega)|\vec{E}|^2$, обсуждались, например, в [1-3]. В работах[4,5] были найдены точные решения нелинейных уравнений Максвелла, описывающих процесс переноса электромагнитной энергии в средах, диэлектрическая проницаемость которых зависит от вектора $\vec{E}$ по закону $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_1(\omega) + a(\omega)(|E_1|^2 + |E_2|^2)$, $\epsilon_{33} = \epsilon_{\parallel}(\omega)$. В работах [6-8] были найдены точные решения нелинейных уравнений Максвелла для слоистых структур в плоскопараллельной геометрии. В [9] приведены классы точных решений уравнений Максвелла в криволинейных системах координат для сопряженных сред, диэлектрическая проницаемость которых зависит от поля следующим образом: $\epsilon(\omega, \vec{E}) = \epsilon_0(\omega) - |a(\omega)|\vec{E}^2$.

При решении подобных задач возникает нелинейное уравнение вида

$$\Delta\vec{A} + \vec{D}(A_1, A_2, A_3) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}), \qquad /1/$$

где A_j – j -компонент вектора $\vec{A}$, $j = 1,2,3$; $\vec{D}$ - в общем случае произвольная векторная кусочно-непрерывная функция компонентов вектора $\vec{A}$. В настоящей работе получены некоторые классы точных решений таких уравнений, заданных в сопряженных областях $G_1 \subset G_2 \subset R^3$ в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.

Будем полагать, что области G_1 и G_2 содержат внутренние точки тел, подобных друг другу, имеющих центральную или осевую симметрии и расположенных таким образом, чтобы их центры или оси симметрии совпадали. Величины, относящиеся к внутренней области, будем помечать индексом 1, а внешней - индексом 2. На границе сопряжения областей должно быть выполнено равенство тангенциальных составляющих векторов $\vec{A}_i$. Найдем такие классы точных решений уравнения /1/, которые являются также и решениями системы

$$\Delta\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}), \quad \vec{D} = 0. \qquad /2/$$

1. В первом разделе будем рассматривать функции $\vec{D} = f(A_1, A_2, A_3)\vec{A}$, где под $f(A_1, A_2, A_3)$ понимается скалярная функция, определяемая согласно /3/ или /4/:

$$f(A_1,\ A_2,\ A_3) = \chi_1(A_1^2 + A_2^2) + \chi_2 A_3^2 - B^2, \qquad /3/$$

$$f(A_1,\ A_2,\ A_3) = \chi_1(A_1^2 + A_2^2) + \chi_2 A_3 - B^2, \qquad /4/$$

где χ_1, χ_2, B - вещественные постоянные. Требование равенства тангенциальных составляющих на границе раздела приводит к необходимости рассматривать два типа функции вида /4/ в зависимости от того, в какой степени входит в /4/ тангенциальная компонента. В дальнейшем будем сокращенно обозначать: зависимость между компонентами вектора вида /3/-КФ /квадратичная форма/, вида /4/ первого типа /тангенциальная компонента в первой степени - П1 /параболоид/, вида /4/ второго типа /тангенциальная компонента во второй степени/ - П2. Так, например, запись П1-П2 будет означать, что для внутренней фигуры функция f имеет вид /4/, причем тангенциальная составляющая входит в f_1 в первой степени, а для внешней фигуры - вид /4/, но тангенциальная составляющая входит в f_2 во второй степени. Подобный же смысл имеют обозначения типа П1-КФ, КФ-П1, П2-П1, П2-П1, П2-КФ, КФ-П2. Через δ_i обозначим величину, равную χ_{2i}/χ_{1i}, через c - некоторую постоянную, $A_\parallel = \sqrt{A_x^2+A_y^2}$, $A_\perp = A_z$ /П2/ или $A_\parallel = A_z$, $A_\perp = \sqrt{A_x^2+A_y^2}$ /П1/, $\beta = B_2/B_1$. Если решение ищется в классе вещественных чисел, то естественные ограничения на параметры следуют непосредственно из приведенных выражений.

В прямоугольной системе координат получим следующие классы точных решений /везде $A_{1\parallel} = A_{2\parallel}$ /:

1.1/КФ/.

$A_{2\parallel} = B_2 b$, $A_{2\perp} = B_2((1 - \chi_{12} b^2)\chi_{22}^{-1})^{1/2}$,

$A_{1\perp} = B_1((1 - \chi_{11}\beta^2 b^2)\chi_{21}^{-1})^{1/2}$

$b = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{3}\,(\chi_{12}^{-1} - c^2)^{1/2})$

1.2/П1/.

$A_{2\parallel} = B_2(1 - \chi_{12} b^2)\chi_{22}^{-1}$, $A_{2\perp} = b B_2$,

$B_{1\perp} = B_1((\chi_{22} - \chi_{21}\beta(1 - \chi_{12} b^2))\chi_{11}^{-1}\chi_{22}^{-1})^{1/2}$

$b = (2\chi_{12} c^2 - 1)(2\chi_{12} c)^{-1}$

1.3/П2/.

$A_{2\parallel} = B_2 b$, $A_{2\perp} = B_2(1 - \chi_{12} b^2)\chi_{22}^{-1}$

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{11}\beta^2 b^2)\chi_{21}^{-1}$

b - такое же, как и в классе 1.2.

1.4(П1-П2).

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{21} b\beta)^{1/2}\chi_{11}^{-1/2}$

1.5(П2-П1).

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{11}\beta^2(\frac{1 - \chi_{12} b^2}{\chi_{22}}))\chi^{-1}$

1.6(КФ-П2).

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{11}\beta^2 b^2)^{1/2}\chi_{21}^{-1/2}$

1.7(П2-КФ).

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{11}\beta^2 b^2)\chi_{21}^{-1}$

1.8(КФ-П1).

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{21}\beta^2(\frac{1 - \chi_{12} b^2}{\chi_{22}})^2)^{1/2}\chi_{12}^{-1}$

1.9(П1-КФ).

$A_{1\perp} = B_1(1 - \chi_{21}\beta)\chi_{12}^{-1}$

Далее в классах 1.10-1.12 компоненты векторов $\vec{A}_i$ равны

$A_{ij} = a_{ij} e^{\vec{\kappa}\vec{r}} + b_{ij}$,

где κ_x, κ_y, κ_z связаны между собой соотношением $\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = 0$, $b^2 = b_{2x}^2 + b_{2y}^2$, b определяется формулой соответствующего класса из рассмотренных выше, $b_{2x} = b\cos\phi_2$, $b_{2y} = b\sin\phi_2$, $b_{1x} = \beta b\cos\phi_1$,

$b_{1y} = \beta b\sin\phi_1$, $\bar{a}_{ix} = \frac{a_{ix}}{a_{2z}}$, $\bar{a}_{iy} = \frac{a_{iy}}{a_{2z}}$, $b_{2z} = \frac{A_{2\perp}}{B_2}$,

$b_{1z} = A_{1\perp} B_2^{-1}$, $A_{2\perp}$, $A_{1\perp}$

берутся из соответствующего класса.

1.10.(П2).

$a_{ix} = \pm i a_{iy}$, $a_{iy} = \frac{\kappa_y \mp i\kappa_x}{\kappa_z} a_{iz}$,

$a_{1z} = a_{2z}\frac{\delta_2}{\delta_2}$, $\phi_1 = \pm\phi_2 + 2\pi k$, или $\phi_2 = \pm(\phi_2 + \pi) + 2\pi k$,

$$\kappa_x = \frac{-\delta_2\kappa_z}{2b} e^{\pm i\phi_2} \mp i\kappa_y, \quad \left|\frac{\delta_1}{\delta_2\beta}\right| = 1,$$

$$\kappa_y = \pm\frac{ib}{\delta_2} e^{\mp i\phi_2} \left(1 + \frac{\delta_2^2}{4b} e^{\pm i2\phi_2}\right).$$

1.11(П1). Постоянные определяются, как и в классе 1.10, но $a_{1z} = a_{2z}$.

1.12(КФ).

$$a_{1z} = \pm a_{2z}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_2}},$$

$$a_{1y} = -\left(\frac{\kappa_x}{\kappa_z}\right)^2 \left(\mp\frac{\kappa_y\kappa_z}{\kappa_x^2}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \mp \sqrt{\Delta}\right),$$

где знаки + и - перед Δ необходимо рассматривать оба, как для -, так и для +, стоящими перед первым одночленом в скобке,

$$\bar a_{1x} = \pm\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\bar a_{2x} \pm\frac{\kappa_y}{\kappa_x}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\bar a_{2y} - \frac{\kappa_y}{\kappa_x}\bar a_{1y},$$

$$\Delta = \bar a_{2x}^2\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} + \left(\frac{\kappa_y}{\kappa_x}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{\kappa_y}{\kappa_x}\right)^2\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) + 1\right)\bar a_{2y}^2 -$$

$$- 2\frac{\kappa_y}{\kappa_x}\frac{\delta_2}{\delta_1}\bar a_{2x}\bar a_{2y}, \quad \bar a_{2y} = \frac{\kappa_y}{\kappa_z} \mp \frac{\kappa_x}{\kappa_z}(\delta_2 - 1),$$

$$\bar a_{2x} = \frac{\kappa_x}{\kappa_z} \pm \frac{\kappa_y}{\kappa_z}(\delta_2 - 1), \quad \bar\kappa_x = \pm(-(1 + \kappa_y^2))^{1/2},$$

$$\bar\kappa_x = \frac{\kappa_x}{\kappa_z}, \quad \bar\kappa_y = \frac{\kappa_y}{\kappa_z},$$

$$\bar\kappa_y = -\frac{b_{2z}}{b\delta_2}(\sin\phi_2 \pm (\delta_2 - 1)^{1/2}\cos\phi_2) \pm$$

$$\pm((1 - b^2)(\sin\phi_2 \pm (\delta_2 - 1)^{1/2}\cos\phi_2)^2 - \delta_2(b^2(\delta_2 - 2)\sin^2\phi_2 \mp$$

$$\mp b^2(\delta_2 - 1)^{1/2}\sin 2\phi_2 + 1))^{1/2}(b\delta_2)^{-1},$$

$$\phi_1 = \arccos\left(-\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\, b_{1z}\cos\psi\,(b\beta\bar a_{1x})^{-1}\right) + \psi,$$

$$\psi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\bar a_{1y}}{\bar a_{1x}}\right), \quad b_{1z} = b_{2z}.$$

1.13(КФ).

$$A_{ij} = (a_{ij} + c_{ij}x)e^{\vec\kappa\vec r} + b_{ij}, \quad \kappa_x = 0, \quad \kappa_z = \pm i\kappa_y,$$

хотя бы одно из δ_i не равно 1,

$$a_{1z} = \pm\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}a_{2z}, \quad c_{1z} = \pm\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}c_{2z}, \quad c_{iy} = -c_{iz}\frac{\kappa_z}{\kappa_y},$$

$$c_{ix} = \pm c_{iz}(\delta_i - 1)^{1/2}, \quad a_{2x} = \pm\left(-\left(\frac{\kappa_z}{\kappa_y} + \frac{\lambda}{\kappa_y}\right) - \delta_2\right)^{1/2},$$

$$\bar a_{1x} = \pm\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \frac{\delta_2\lambda^2}{\delta_1\kappa_y^2}(1 - \delta_1) \mp 2\frac{\delta_2}{\delta_1}\lambda(\delta - 1)^{1/2}\frac{\kappa_z}{\kappa_y^2} - \delta_2\right)^{1/2},$$

$$\phi_1 = \arcsin\left(\left(\frac{\bar a_{2x}}{\bar a_{1y}}\cos\phi_2 + \frac{\bar a_{2y}}{\bar a_{1y}}\sin\phi_2\right)\cos\psi\right) - \psi, \quad \psi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\bar a_{1x}}{\bar a_{1y}}\right),$$

$$c_{2z} = \lambda a_{2z}, \quad a_{iy} = -a_{iz}\frac{\kappa_z}{\kappa_y} - \frac{c_{ix}}{\kappa_y}.$$

Параметры λ и κ_y находятся соответственно из уравнений

$$\bar a_{1x}\bar c_{1x} + \bar a_{1y}\bar c_{1y} = \bar a_{2x}\bar c_{2x} + \bar a_{2y}\bar c_{2y},$$

$$\bar a_{2x}\bar c_{2x} + \bar a_{2y}\bar c_{2y} + \delta_2 = 0.$$

Три из четырех параметров δ_i, β, b (на выбор) определяются из следующих условий:

$b_{1z} = b_{2z}$

$$\pm b\cos\phi_2(\delta_2 - 1)^{1/2} - b\sin\phi_2 \frac{\kappa_z}{\kappa_y} + \delta_2 b_{2z} = 0,$$

$$\pm b\cos\phi_1(\delta_1 - 1)^{1/2} - b\sin\phi_1 \frac{\kappa_z}{\kappa_y}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} + \delta_1 \frac{b_{1z}}{\beta} = 0.$$

1.14(КФ).

$$A_{ij} = (a_{ij} + c_{ij}\, x)\, e^{\vec{\kappa}\vec{r}} + b_{ij}\ , \quad \kappa_x = 0, \quad \kappa_z = \pm i\kappa_y\ ,$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 1, \quad a_{1z} = \pm i a_{2z}\ , \quad c_{1z} = \pm c_{2z}\ , \quad a_{ix} = c_{ix} = 0,$$

$$b_{iy} = b_{iz} = 0, \quad c_{iy} = -c_{iz}\frac{\kappa_z}{\kappa_x}\ , \quad \kappa_y = \pm i\kappa_z\ , \quad \beta = 1,$$

$$b_x = b = 1, \text{ т.е. } c = \frac{1}{2}.$$

1.15(КФ, П1, П2). Компоненты векторов выражаются как в классах 1.10-1.12 или 1.13-1.14, $b = 0$. Тогда $b_{ix} = b_{iy} = 0, a_{iz} = 0$, $a_{ix} = \pm i a_{iy}$, $\delta_i b_{iz}^2 = B_i^2$ или $\delta_i b_{iz} = B_i^2$. Аналогично, $c_{ix} = \pm i c_{iy}$, $c_{iz} = 0$.

Рассмотрим далее точные решения в цилиндрической системе координат. Для всех решений, составляющих классы 1.1-1.9, возможен переход к решениям в цилиндрической системе координат с помощью группы R_3^+. При этом в случае П1 необходимо производить преобразования по формулам

$$A_{ir} = A_{i\perp}\, a\cos\phi + A_{i\perp}\, (1 - a^2)^{1/2}\sin\phi\ ,$$

$$A_{i\phi} = -A_{i\perp}\, a\sin\phi + A_{i\perp}\, (1 - a^2)^{1/2}\sin\phi,$$

$$A_{iz} = A_{i\parallel}\ .$$

Приравнивая A_{ir} и $A_{i\phi}$ на границе сопряжения, приходим к условию $A_{1\perp} = A_{2\perp}$. То есть, в цилиндрической системе координат формулы для компонентов векторов A_{ij}, полученные для П2-П2 и П1-П1, совпадают между собой. Если же в областях G_1 и G_2 действуют операторы $L_i = \Delta + f_i(A_{i1}, A_{i2}, A_{i3})$ с функциями различных типов, то получим следующие результаты.

1.17(П1-П2 или П1-КФ).

$$A_{1\parallel} = B_1(1 - \chi_{11} b^2\beta^2)\,\chi_{22}^{-1}.$$

$A_{2\parallel} = A_{1\perp}\,,\ A_{2\perp}$

определяются, как в классе 1.3 или в классе 1.1.

1.18(КФ-П1).

$$A_{1\perp} = B_1((1 - \chi_{11}\beta^2 b^2)\,\chi_{21}^{-1})^{1/2}.$$

$A_{2\perp} = A_{1\parallel}\,,\ A_{2\parallel}\,,\ b$

определяются, как в классе 1.2.

1.19(П2-П1).

$$A_{1\perp} = B_1\,(1 - \chi_{11}\beta^2 b^2)\,\chi_{21}^{-1}\,,$$

$A_2\,,\ A_{1\parallel},\ A_{2\parallel}$ определяются так же, как и в предыдущем классе.

В цилиндрической системе координат могут быть также получены классы точных решений, если компоненты векторов зависят от r и z.

1.20(КФ, П, КФ-П, П-КФ). Компоненты A_{ij} зависят только от r.

$$A_{i\phi} = Q_{i1} r + \frac{Q_{12}}{r}, \quad A_{iz} = Q_{i3}\,, \quad Q_{11} = Q_{21} + \frac{Q_{22}}{\sigma^2}, \quad Q_{12} = 0$$

(σ -радиус внутреннего цилиндра),

$$A_{ir} = ((B_i^2 - \chi_{i1}(Q_{i1} r + \frac{Q_{12}}{r})^2 - \chi_2\, Q)\,\chi_{i1}^{-1})^{1/2},$$

$$Q_{13} = \left(\frac{B_1^2}{\chi_{21}} - \frac{B_1^2\chi_{11}}{\chi_{21}\chi_{12}} + \frac{\chi_{22}\chi_{11} Q}{\chi_{12}\chi_{21}}\right)^{\gamma},$$

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{П} \\ 1/2, & \text{КФ} \end{cases} \qquad Q = \begin{cases} Q_{23}, & \text{П} \\ Q_{23}^2, & \text{КФ} \end{cases}.$$

Приведенные здесь решения являются и единственными. В классах 1.21-1.27 компонент $A_{i\phi}$ равен

$$A_{i\phi} = \sum_{\nu} P_i^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)} r)\, e^{\pm i\lambda^{(\nu)} z}\ ,$$

$$P_i^{(\nu)}(\rho) = Q_{11}^{(\nu)} J_1(\rho) + Q_{12}^{(\nu)} Y_1(\rho),\quad Q_{12}^{(\nu)} = 0,\quad Q_{11}^{(\nu)} = Q_{21}^{(\nu)} + Q_{22}^{(\nu)} \frac{Y_1(\lambda^{(\nu)}\sigma)}{J_1(\lambda^{(\nu)}\sigma)},$$

где $J_1(\rho)$, $Y_1(\rho)$ - функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно; $\lambda^{(\nu)}$ - корни соответствующего уравнения, полученного с помощью граничных условий на внешней границе рассматриваемой системы цилиндров. Через ϕ_i в этих классах обозначены функции, определяемые из уравнений

$$\Phi_i(\psi_{1i}(z, r, \phi_i),\ \psi_{2i}(z, r, \phi_i)) = 0,$$

в которых Φ_i - произвольные функции, а ψ_{1i}, ψ_{2i} - общие интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенной в каждом классе. Функция $F_i = ((B_i^2 - A_{i\phi}^2)\chi_{1i}^{-1})^{1/2}$ для классов 1.21-1.22, 1.25-1.26, для которых $\chi_{1i} > 0$ и $F_i = ((B_i^2 - A_{i\phi}^2)\chi_{2i}^{-1})^{1/2}$ для классов 1.23, 1.27, для которых $\chi_{1i} < 0$, $\chi_{2i} > 0$. через U_{1i} и U_{2i} обозначены следующие функции:

$$U_{1i} = \mp (F_i \chi_{iy})^{-1} A_{i\phi} \sum_\nu \lambda^{(\nu)} P_i^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)} r) e^{\pm\lambda^{(\nu)} z}$$

$$U_{2i} = -(F_i \chi_{iy})^{-1} A_{i\phi} \sum_\nu \lambda^{(\nu)} (P_i^{(\nu)}(\zeta))'_\zeta e^{\pm\lambda^{(\nu)} z},\quad \zeta = \lambda^{(\nu)} r,$$

где $\chi_{ji} = \chi_{1i}$, если $\chi_{1i} > 0$ и $\chi_{ji} = \chi_{2i}$, если $\chi_{1i} < 0$, а $\chi_{2i} > 0$.

1.21(КФ).

$\chi_{1i} > 0,\ \chi_{2i} > 0,\ A_{ir} = F_i \cos\phi_i,\ A_{iz} = \delta_i^{-1/2} F_i \sin\phi_i,$

$dr(A_{ir}^{-1}\delta_i^{1/2}) = dz(F_i \sin\phi_i)^{-1} = d\phi_i(U_{1i}\cos\phi_i - U_{2i}\sin\phi_i\,\delta_i^{1/2})^{-1}.$

1.22(КФ).

$\chi_{1i} > 0,\ \chi_{2i} < 0,\ A_{ir} = F_i \mathrm{ch}\phi_i,\ A_{iz} = |\delta_i|^{-1/2} F_i \mathrm{sh}\phi_i,$

$-dr(A_{ir}^{-1}|\delta_i|^{1/2}) = dz(F_i \mathrm{sh}\phi_i)^{-1} = d\phi_i(U_{1i}\mathrm{ch}\phi_i - U_{2i}\mathrm{sh}\phi_i|\delta_i|^{-1/2})^{-1}.$

1.23(КФ).

$\chi_{1i} < 0,\ \chi_{2i} > 0,\ A_{ir} = |\delta_i|^{1/2} F_i \mathrm{sh}\phi_i,\ A_{iz} = F_i \mathrm{ch}\phi_i,$

$dr(F_i \mathrm{sh}\phi_i)^{-1} = dz(|\delta_i|^{1/2} F_i \mathrm{ch}\phi_i)^{-1} = d\phi_i(U_{2i}\mathrm{ch}\phi_i - |\delta_i|^{1/2} U_{1i}\mathrm{sh}\phi_i).$

1.24(П).

$A_{i\phi} = 0,\ A_{ir} = \pm\frac{r}{2z}|\delta_i|,\ |\delta_1| = |\delta_2|,$

$A_{iz} = \mp\frac{r^2}{4z^2}|\delta_i| \pm B_i^2|\delta_i|^{-1}\chi_{1i}^{-1}.$

1.25(П).

$\chi_{1i} > 0,\ \chi_{2i} > 0,\ A_{ir} = F_i\cos\phi_i,\ A_{iz} = \delta_i^{-1} F_i^2 \sin^2\phi_i,$

$dr(F_i^2\delta_i^{-1}\sin 2\phi_i)^{-1} = dz(F_i\sin\phi_i)^{-1} = d\phi_i(U_{1i}\cos\phi_i - 2F_i U_{2i}\delta_i^{-1}\sin^2\phi_i)^{-1}.$

1.26(П).

$\chi_{1i} > 0,\ \chi_{2i} < 0,\ A_{ir} = F_i\mathrm{ch}\phi_i,\ A_{iz} = \delta_i^{-1} F_i^2\mathrm{sh}^2\phi_i,$

$-dr(F_i^2\mathrm{sh}2\phi_i)^{-1}\delta_i = dz(F_i\mathrm{sh}\phi_i)^{-1} = d\phi_i(U_{1i}\mathrm{ch}\phi_i - 2F_i\delta_i^{-1}\mathrm{sh}^2\phi_i U_{2i})^{-1}.$

1.27(П).

$\chi_{1i} < 0,\ \chi_{2i} > 0,\ A_{ir} = \delta_i F_i \mathrm{sh}\phi_i,\ A_{iz} = F_i^2\mathrm{ch}^2\phi_i,$

$dr(F_i^2\mathrm{sh}^2\phi_i)^{-1} = dz(F_i\mathrm{ch}\phi_i\delta_i)^{-1} = d\phi_i(2F_i U_{2i}\mathrm{ch}^2\phi_i - \delta_i U_{1i}\mathrm{sh}\phi_i)^{-1}.$

Условие на границе сопряжения получается из равенств $A_{ir}(\sigma) = A_{2r}(\sigma)$, $A_{1z}(\sigma) = A_{2z}(\sigma)$, $A_{1r}(\sigma) = A_{2z}(\sigma)$, $A_{1z}(\sigma) = A_{2r}(\sigma)$, записываемых в зависимости от направления распространения луча вдоль r или z в той или иной области. Так, например, для классов 1.21, 1.22 из равенства $A_{1r}(\sigma) = A_{2r}(\sigma)$ получается следующее граничное условие:

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{F_2}{F_2}\mathrm{ch}\phi_2\right),$$

В сферической системе координат получим следующие классы решений.

1.28. Компоненты векторов зависят только от r. В этом случае $A_{i\phi} = A_{i\theta} = 0$, $A_{ir} = B_i\chi_{2i}^{-1/2}$ (КФ, П), $A_{ir} = B^2\chi_{2i}^{-1}$ (П).

В классе 1.29-1.37 приведены решения, зависящие от r и θ. В них полагается, что F_i определена так же, как и для классов 1.21-1.27, ϕ-компонент определяется по формуле

$$A_{i\phi} = \sum_\nu S_i^{(\nu)}(r) P_\nu^{(1)}(\cos\theta),$$

$$S_i^{(\nu)} = Q_{11}^{(\nu)} r^{\frac{m-1}{2}} + Q_{12}^{(\nu)} r^{-\frac{1+m}{2}},\quad m = (1 + 4\nu(\nu + 1))^{1/2},$$

$$Q_{12}^{(\nu)} = 0,\quad Q_{11}^{(\nu)} = Q_{21}^{(\nu)} + Q_{22}^{(\nu)}\sigma^{-m}$$

Через ϕ_i в этих классах обозначены функции, определяемые из уравнений

$$\Phi_i(\psi_{1i}(r,\theta,\phi_i),\ \psi_{2i}(r,\theta,\phi_i)) = 0,$$

в которых Φ_i - произвольные функции, а ψ_{1i}, ψ_{2i} - общие интегралы систем дифференциальных уравнений, приведенных в каждом классе. Через U_{1i}, U_{2i} обозначены функции

$$U_{1i} = -\chi_{ji}^{-1} F_i^{-1} A_{i\phi} \sum_\nu S_i^{(\nu)} (P_\nu^{(1)}(\cos\theta))'_\theta$$

$$U_{2i} = (-2\chi_{ji} F_i)^{-1} A_{i\phi} \Sigma P_\nu^{(1)}(\cos\theta)((m-1)Q_{11}^{(\nu)} r^{\frac{m-3}{2}} - (m+1)Q_{12}^{(\nu)} r^{-\frac{5+m}{2}}).$$

1.29(КФ).

$\chi_{11} > 0$, $\chi_{12} > 0$, $A_{ir} = \delta_i^{-1} F_i \cos\phi_i$, $A_{i\theta} = F_i \sin\phi_i$,

$dr(rF_i\cos\phi_i)^{-1} = d\theta(F_i\sin\phi_i)^{-1}\delta_i = d\phi_i(\delta_i^{-1}U_{1i}\cos\phi_i - F_i\sin\phi_i -$

$- rU_{2i}\sin\phi_i)^{-1}$.

1.30(КФ).

$\chi_{11} > 0$, $\chi_{12} < 0$, $A_{ir} = |\delta_i|^{-1} F_i \operatorname{sh}\phi_i$, $A_{i\theta} = F_i \operatorname{ch}\phi_i$,

$dr(rF_i\operatorname{sh}\phi_i)^{-1} = -d\theta(F_i\operatorname{ch}\phi_i)^{-1}|\delta_i| = d\phi_i(|\delta_i|^{-1}U_{1i}\operatorname{sh}\phi_i -$

$- F_i\operatorname{ch}\phi_i - rU_{2i}\operatorname{ch}\phi_i)^{-1}$.

1.31(П).

$\chi_{11} > 0$, $\chi_{12} > 0$, $A_{ir} = \delta_i^{-1}F_i^2\sin^2\phi_i$, $A_{i\theta} = F_i\cos\phi_i$,

$dr(rF_i\sin\phi_i)^{-1} = d\theta(F_i^2\sin^2\phi_i)^{-1} = d\phi_i(2\delta_i^{-1}F_i U_{1i}\sin_i^2\phi_i -$

$- F_i\cos\phi_i - rU_{2i}\cos\phi_i)^{-1}$.

1.32(КФ).

$\chi_{11} < 0$, $\chi_{12} > 0$, $A_{ir} = F_i\operatorname{ch}\phi_i$, $A_{i\theta} = |\delta_i|^{1/2}F_i\operatorname{sh}\phi_i$,

$dr(r|\delta_{2i}|F_i\operatorname{ch}\phi_i)^{-1} = -d\theta(F_i\operatorname{sh}\phi_i)^{-1} = d\phi_i(|\delta_i|^{1/2}\operatorname{sh}\phi_i(F_i +$

$+ rU_{2i}) - U_{1i}\operatorname{ch}\phi_i)^{-1}$.

1.33(П).

$\chi_{11} > 0$, $\chi_{12} < 0$, $A_{ir} = |\delta_i|^{-1}F_i^2\operatorname{sh}^2\phi_i$, $A_{i\theta} = F_i\operatorname{ch}\phi_i$,

$-dr(rF_i\operatorname{ch}\phi_i)^{-1} = d\theta(F_i^2\operatorname{sh}(2\phi_i))^{-1}|\delta_i| = d\phi_i(2F_i|\delta_i|^{-1}U_{1i}\operatorname{sh}^2\phi_i$

$- F_i\operatorname{ch}\phi_i - rU_{2i}\operatorname{ch}\phi_i)^{-1}$.

1.34(П).

$\chi_{11} < 0$, $\chi_{12} > 0$, $A_{ir} = F_i^2\operatorname{ch}^2\phi_i$, $A_{i\theta} = |\delta_i|F_i\operatorname{sh}\phi_i$,

$-dr(r\delta_i F_i\operatorname{sh}\phi_i)^{-1} = d\theta(F_i\operatorname{sh}2\phi_i)^{-1} = d\phi_i(F_i\operatorname{sh}\phi_i +$

$+ rU_{2i}\operatorname{sh}\phi_i - 2|\delta_{2i}|F_i U_{1i}\operatorname{ch}^2\phi_i)^{-1}$.

1.35(П).

$A_{ir} = A_{i1}$, $\chi_{11} > 0$, $\chi_{12} > 9$, $A_{ir} = F_i\cos\phi_i$,,

$A_{i\theta} = \delta_i^{-1}F_i^2\sin^2\phi_i$,

$dr(F_i^2\sin 2\phi_i)^{-1}\delta_i = d\theta(F_i\sin\phi_i)^{-1} = d\phi_i(\delta_i^{-1}F_i\sin^2\phi_i(F_i +$

$+ 2rU_{2i}) - U_{1i}\cos\phi_i)^{-1}$.

1.36(П).

$A_{ir} = A_{i1}$, $\chi_{11} > 0$, $\chi_{12} < 0$, $A_{ir} = F_i\operatorname{ch}\phi_i$,

$A_{i\theta} = |\delta_i|^{-1}F_i^2\operatorname{sh}^2\phi_i$

$dr(F_i^2\operatorname{sh}^2\phi_i)^{-1}|\delta_i| = -d\theta(F_i\operatorname{sh}\phi_i)^{-1} = d\phi_i(|\delta_i|^{-1}F_i(F_i + 2rU_{2i}) \times$

$\times \operatorname{sh}^2\phi_i - U_{1i}\operatorname{ch}\phi_i)^{-1}$.

1.37(П).

$\chi_{11} < 0$, $\chi_{12} > 0$, $A_{ir} = A_{i1}$, $A_{ir} = F_i|\delta_i|\operatorname{sh}\phi_i$,

$A_{i\theta} = F_i^2\operatorname{ch}^2\phi_i$,

$dr(F_i^2\operatorname{sh}2\phi_i)^{-1} = -d\theta(|\delta_i|F_i\operatorname{ch}\phi_i)^{-1} = d\phi_i(-|\delta_i|(F_i + 2rU_{2i})F_i\operatorname{ch}^2\phi_i +$

$+ U_{1i}\operatorname{sh}\phi_i)^{-1}$.

На границе сопряжения должно выполняться условие $A_{1\theta}(\sigma) = A_{2\theta}(\sigma)$.

2. Во втором разделе будем полагать, что компоненты вектора $\vec{D}$ связаны с компонентами вектора $\vec{A}$ по закону

$$B_k = (\epsilon_{kj} - |\alpha_{kj}| A^2) A_j, \tag{5}$$

где $A = |\vec{A}|$. Подобная зависимость может, например, иметь место между компонентами векторов электрической индукции и напряженности электрического поля в нелинейных анизотропных средах.

В прямоугольной системе координат системе (2), (5) будут удовлетворять один или несколько векторов $\{A_n\}$ ($n = 1,2,\ldots N$), с постоянными компонентами, величины которых определяются из уравнений

$$B_k = 0, \quad k = x, y, z. \tag{6}$$

Системе (2), (5) может удовлетворять и счетное множество векторов $\{\vec{A}_n\}$ с постоянными компонентами, если система (6) вырождена.

Из системы уравнений (5)-(6) получаются следующие значения компонентов вектора $\vec{A}$:

$$A_x = \kappa_1(U) A_z,$$

$$A_y = \kappa_2(U) A_z,$$

$$A_z = |U| (1 + \kappa_1^2(U) + \kappa_2^2(U))^{-1/2},$$

где

$$\kappa_1(U) = (\epsilon_{xx} - |\alpha_{xx}| U)^{-1} (\kappa_2(U)(-\epsilon_{xy} + |\alpha_{xy}| U) - \epsilon_{xy} + |\alpha_{xz}| U), \quad \kappa_2(U) = (a_o + a_1 U + a_2 U^2) \times$$

$$\times (b_o + b_1 U + b_2 U^2)^{-1}, \quad a_o = \epsilon_{yx}\epsilon_{xz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{xx},$$

$$a_1 = -\epsilon_{yx}|\alpha_{xz}| - |\alpha_{yx}|\epsilon_{xz} + \epsilon_{xx}|\alpha_{yz}| + \epsilon_{yz}|\alpha_{xx}|,$$

$$a_2 = |\alpha_{xz}||\alpha_{yx}| - |\alpha_{xx}||\alpha_{yz}|, \quad b_o = \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{yx}\epsilon_{xy},$$

$$b_1 = \epsilon_{yx}|\alpha_{xy}| + |\alpha_{yx}|\epsilon_{xy} - |\alpha_{yy}|\epsilon_{xx} - |\alpha_{xx}|\epsilon_{yy},$$

$$b_2 = \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{yx}\alpha_{xy}.$$

Значения U определяются из уравнения

$$U^4(|\alpha_{zy}||\alpha_{xx}|a_2 + |\alpha_{xx}||\alpha_{zz}|b_2 - |\alpha_{zx}||\alpha_{xz}|b_2) + U^3(-|\alpha_{zx}|a_2 +$$

$$+ \epsilon_{zx}|\alpha_{xz}|b_2 + |\alpha_{zx}|\epsilon_{xz}b_2 - |\alpha_{zx}||\alpha_{xz}|b_1 - |\alpha_{xx}|\epsilon_{zy}a_2 +$$

$$+ |\alpha_{zy}||\alpha_{xx}|a_1 + |\alpha_{xx}||\alpha_{zz}|b_1 - |\alpha_{zz}|\epsilon_{xx}b_2) + U^2(\epsilon_{zx}a_2 -$$

$$- |\alpha_{zx}|a_1 - \epsilon_{zx}\epsilon_{xz}b_2 + \epsilon_{zx}|\alpha_{xz}|b_1 + |\alpha_{zx}|\epsilon_{xz}b_1 - |\alpha_{xz}||\alpha_{zx}|b_o +$$

$$+ \epsilon_{zy}\epsilon_{xx}a_2 - |\alpha_{zy}|\epsilon_{xx}a_1 - |\alpha_{zy}|\epsilon_{xx}a_2 - |\alpha_{xx}|\epsilon_{zy}a_1 +$$

$$+ |\alpha_{zy}||\alpha_{xx}|a_o + |\alpha_{xx}||\alpha_{zz}|b_o - |\alpha_{zz}|\epsilon_{xx}b_1 - |\alpha_{xx}|\epsilon_{zz}b_1 +$$

$$+ \epsilon_{zz}\epsilon_{xx}b_2) + U(\epsilon_{zx}a_1 - |\alpha_{zx}|a_o - \epsilon_{zx}\epsilon_{xz}b_1 + \epsilon_{zx}|\alpha_{xz}|b_o +$$

$$+ |\alpha_{zx}|\epsilon_{xz}b_o + \epsilon_{zy}\epsilon_{xx}a_1 - |\alpha_{zy}|\epsilon_{xx}a_o - |\alpha_{xx}|\epsilon_{zy}a_o - |\alpha_{zz}|\epsilon_{xx}b_o$$

$$- |\alpha_{xx}|\epsilon_{zz}b_o + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx}b_1) + \epsilon_{zx}a_o - \epsilon_{zx}\epsilon_{xz}b_o + \epsilon_{zy}\epsilon_{xx}a_o +$$

$$+ \epsilon_{zz}\epsilon_{xx}b_o = 0.$$

Условие равенства тангенциальных составляющих $\vec{A}_i$ на границе раздела сред для полученных решений принимает вид

$$\frac{\kappa_1^2(U_1) + \kappa_2^2(U_1)}{1 + \kappa_1^2(U_1) + \kappa_1^2(U_1)}|U_1| = \frac{\kappa_1^2(U_2) + \kappa_2^2(U_2)}{1 + \kappa_1^2(U_2) + \kappa_2^2(U_2)}|U_2|. \tag{7}$$

Поскольку значения U_1, U_2 уже известны, то условие (7) представляет собой некоторое ограничение на параметры задачи α и ϵ.

Классы частных решений уравнения (1), полученные в произвольной ортогональной системе координат в случае вырождения (6) в одно уравнение (что имеет место для изотропной среды), были подробно рассмотрены в [9].

Получим также классы точных решений в цилиндрической и сферической системах координат.

Пусть компоненты $\vec{A}$ зависят только от радиальной координаты r. В этом случае в цилиндрической системе координат уравнение для r-компонента переходит в условие $D_r = 0$, из которого можно выразить компонент A_r как функцию A_ϕ и A_z. Уравнение для A_z принимает вид

$$\frac{d^2A_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_z}{dr} + D_z(A_\phi, A_z, A_r(A_\phi, A_z)) = 0. \tag{8}$$

Компонент A_ϕ выражается через A_z и его производные с помощью уравнения

$$\left(\frac{\partial D_z}{\partial A_\phi}\right)^3\left[\frac{A_\phi}{r^2} - D_\phi(A_\phi, A_z, A_r,(A_\phi, A_z))\right] + \left(\frac{\partial D_z}{\partial A_\phi}\right)^2\left[\frac{d^4A_z}{dr^4} + \right.$$

$$+\frac{2}{r}\frac{d^3A_z}{dr^3} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2A_z}{dr^2}\Big] - \frac{\partial^2 D_z}{\partial A_\phi^2}\Big[\frac{d^3A_z}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2A_z}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dA_z}{dr} + \qquad (9)$$

$$+\frac{\partial D_z}{\partial A_z}\frac{dA_z}{dr}\Big]^2 - \frac{\partial^2 D_z}{\partial A_\phi \partial A_z}\frac{dA_z}{dr}\Big[\frac{d^3A_z}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2A_z}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dA_z}{dr} +$$

$$\left.+\frac{\partial D_z}{\partial A_z}\frac{dA_z}{dr}\right]\frac{\partial D_z}{\partial A_\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial A_z}\left(\frac{\partial D_z}{\partial A_\phi}\right)^2\frac{d^2A_z}{dr^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial D_z}{\partial A_\phi}\right)^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial A_z}{dr} - \frac{\partial D_z}{\partial A_z}\frac{dA_z}{dr}\right] = 0.$$

Таким образом, в данном случае система (8)-(9) определяет единственное решение исходного уравнения (1).

В сферической системе координат при отсутствии угловых зависимостей получается следующее единственное точное решение:

$$A_\theta = A_\phi = 0,\ A_r^2 = \frac{\epsilon_{rr}}{|\epsilon_{rr}|},\ \epsilon_{rr} = \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{r\phi},\ |a_{rr}| = |a_{r\theta}| = |a_{r\phi}|.$$

Можно получить также классы точных решений уравнения (1), удовлетворяющих (2), (5), в цилиндрической и сферической системах координат, если компоненты векторов $\vec{A}_i$ зависят от двух переменных: r и z в первом случае и r и θ - во втором. При этом полагаем, что выполнены условия

$$\epsilon_{kr} = \text{idem},\ \epsilon_{k\phi} = \text{idem},\ \epsilon_{kz} = \text{idem},\ \epsilon_{k\theta} = \text{idem},\ |a_{kr}| = \text{idem},$$

$$|a_{k\phi}| = \text{idem},\ |a_{kz}| = \text{idem},\ |a_{k\theta}| = \text{idem},$$

где $k = r, \phi, z$ или $k = r, \theta, \phi$.

В этих случаях A_r, A_z или A_r, A_θ определяются из уравнений (10)-(11) или (10), (12) соответственно:

$$\sum_{j=0}^{7} b_j A_r^j = 0, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=0}^{7} a_j A_z^j = 0, \qquad (11)$$

$$\sum_{j=0}^{7} a_j A_\theta^j = 0, \qquad (12)$$

где

$$a_0 = \tilde{f}^6 \sin\phi - |a_{rr}|^2 \tilde{f}^2 \cos^2\phi,$$

$$a_1 = -3\tilde{f}^4 \sin^4\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}),$$

$$a_2 = 3\tilde{f}^2 \sin^2\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}),$$

$$a_3 = -2\tilde{f}^4 \sin^4\phi|a_{rz}| - (|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rr})^3 - 2\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{rz}||a_{r\phi}|A_\phi -$$

$$- 2\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{r\phi}|A_\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}),$$

$$a_4 = 2\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{r\phi}|^2A_\phi^2 + 4\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{rz}|(|a_{rr}|A_\phi^2 -$$

$$- \epsilon_{rz}) - 3|a_{r\phi}|A_\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz})^2 - 2|a_{rz}|^3\tilde{f}^2\sin\ \phi +$$

$$+ |a_{r\phi}|A_\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz})^2 + (A_\phi^2|a_{rr}| - \epsilon_{rr})|a_{rr}|\tilde{f}^2\sin^2\phi,$$

$$a_5 = 4\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{r\phi}||a_{rz}|A_\phi + 6\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{r\phi}|A_\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 -$$

$$- \epsilon_{rz}) - 3|a_{r\phi}|^2A_\phi^2(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}) - 2(|a_{rz}|A_\phi^2 -$$

$$- \epsilon_{rz})^2|a_{rz}| + 2|a_{r\phi}||a_{rz}|A_\phi^2(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}) -$$

$$- (A_\phi^2|a_{rr}| - \epsilon_{rr})|a_{rr}|(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}),$$

$$a_6 = 3\tilde{f}^2\sin^2\phi|a_{rz}|^2 - 2|a_{r\phi}||a_{rz}|A_\phi(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}) -$$

$$- (A_\phi^2|a_{rr}| - \epsilon_{rr})|a_{rr}||a_{r\phi}|A_\phi,$$

$$a_7 = -|a_{rz}|^2(|a_{rz}|A_\phi^2 - \epsilon_{rz}) - |a_{rz}|(|a_{rr}|A_\phi^2 - \epsilon_{rr})|a_{rr}|.$$

Через $\tilde{f}$ обозначена функция

$$\tilde{f} = \epsilon_{r\phi}A_\phi - |a_{r\phi}|A_\phi^3.$$

Формулы для постоянных b_j получаются из только что приведенных формул путем замен в них: $\sin\phi \rightleftarrows \cos\phi$, $r \rightleftarrows z$ для второго индекса. Формулы для постоянных a_j, b_j в сферической системе координат получаются из соответствующих формул для a_j, b_j в цилиндрической системе координат путем замены индекса z на индекс θ. Компоненты $A_{i\phi}$ выражаются через r, z или θ, так же, как и в первом разделе. Соответствующие характеристические системы записываются в виде (13) (цилиндрическая система координат) или (14) (сферическая система координат):

$$dr\Big(\sum_{j=1}^{7} b_{ij}\, j\, A_{ir}^{j-1}\Big)^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{iz}^{j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial \phi_i}\Big)^{-1} = -dz\Big(\sum_{j=1}^{7} a_{ij}\, j\, A_{iz}^{j-1}\Big)^{-1} \times$$

$$\times\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{ir}^{j}\frac{\partial b_{ij}}{\partial \phi_i}\Big)^{-1} = d\phi_i\Big[\Big(\sum_{j=1}^{7} a_{ij}\, j\, A_{iz}^{j-1}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{ir}^{j} U_{1ij}\Big) - \qquad (13)$$

$$-\Big(\sum_{j=1}^{7} b_{ij}\, j\, A_{ir}^{j-1}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{iz}^{j} U_{2ij}\Big)\Big]^{-1},$$

$$\frac{dr}{r}\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{i\theta}^{j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial \phi_i}\Big)^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{7} b_{ij}\, j\, A_{ir}^{j-1}\Big)^{-1} = -d\theta\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{ir}^{j}\frac{\partial b_{ij}}{\partial \phi_i}\Big)^{-1} \times$$

$$\times\Big(\sum_{j=1}^{7} a_{ij}\, j\, A_{i\theta}^{j-1}\Big)^{-1} = d\phi_i\Big[\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{ir}^{j} U_{3ij}\Big) \times$$

$$\times\Big(\sum_{j=1}^{7} a_{ij}\, j\, A_{i\theta}^{j-1}\Big) - r\Big(\sum_{j=0}^{7} A_{i\theta}^{j} U_{2ij}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{7} b_{ij}\, j\, A_{ir}^{j-1}\Big) + \qquad (14)$$

$$+ A_{i\theta}\Big(\sum_{j=1}^{7} b_{ij}\, j\, A_{ir}^{j-1}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{7} a_{ij}\, j\, A_{i\theta}^{j-1}\Big)\Big]^{-1},$$

где

$$U_{1ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial z}, \quad U_{2ij} = \frac{\partial a_i}{\partial r}, \quad U_{3ij} = \frac{\partial b_j}{\partial \theta}.$$

На границе раздела выполняется одно из следующих условий:

$$A_{1z}(\sigma) = A_{2z}(\sigma), \quad A_{1\theta}(\sigma) = A_{2\theta}(\sigma).$$

Полученные в этом разделе классы частных точных решений в приложении к нелинейной электродинамике иллюстрируют возможность существования в нелинейных анизотропных средах таких полей, для которых один, два или все компоненты вектора электрической индукции равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelley P.L. - Phys. Rev. Lett., 1965, v.15, p.1005.
2. Таланов В.И. - Письма в ЖЭТФ, 1965, т.2, вып.5, с.218.
3. Абловец М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
4. Агранович В.М., Бавиченко В.С., Черняк В.Я. - Письма в ЖЭТФ, 1980, т.32, вып.8, с.532.
5. Jomlinson W.J. - Optics Lett., 1980, v.5, p.323.
6. Fedyanin V.K., Mihalache D. - Z. Phys. B, v.47, p.167.
7. Михалаке Д., Федянин В.К. Препринт ОИЯИ Р17-81-731. Дубна, 1981.
8. Михалаке Д., Федянин В.К. - ТМФ, 1983, т.54, с.443.
9. Уварова Л.А. Препринт ОИЯИ Р17-87-693. Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1988 года.