объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-88-18

В.И.Юкалов

ВОЗМОЖНОСТЬ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в журнал "Journal of Physics B"

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхизлучение Дикке [1], или суперфлюоресценция, возможны, как известно, в тех системах, в которых плотность n достаточно высока. Ограничение на плотность вытекает из естественного условия, чтобы время, через которое возникает сверхизлучательный импульс, так называемое время задержки t_0, было гораздо меньше времени спонтанного распада T_1. Эти характерные времена имеют порядки [2,3] :

$$t_0 \sim \frac{\hbar c \ln N}{2\pi n \omega L d^2}, \quad T_1 \sim \frac{\hbar c^3}{d^2 \omega^3},$$

где N - число излучателей, ω - частота, L - длина системы, d - дипольный момент каждого из излучателей. Так как $L \sim (N/n)^{1/3}$, то из условия $t_0 \ll T_1$ следует, что плотность излучателей должна быть гораздо больше критической плотности

$$n_c = \frac{(2\pi \ln N)^{3/2}}{\lambda^3 \sqrt{N}} .$$

где λ - длина волны. Если же $n \lesssim n_c$, то суперфлюоресценция невозможна. Последнее условие означает, что отношение длины волны к среднему расстоянию между излучателями a удовлетворяет неравенству

$$\frac{\lambda}{a} \le \frac{(2\pi \ln N)^{1/2}}{N^{1/6}} \qquad (n \lesssim n_c) .$$

При $N \gtrsim 10^6$ это дает $\lambda \lesssim a$.

В данной работе рассматриваются как раз такие разреженные системы, для которых $n \lesssim n_c$, и суперфлюоресценция Дикке отсутствует. Показано, что и в этих системах тем не менее может существовать сверхизлучение, но при совершенно других обстоятельствах - когда ансамбль излучателей, на который действует периодическое резонансное поле и стационарная немонохроматическая накачка, находится в постоянном однородном поле.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Рассмотрим систему N излучателей, на которую кроме квазирезонансного монохроматического поля действует еще и постоянное однородное поле:

$$\vec E_i(t) = \vec E_i e^{-i\omega t} + \vec E_0 \qquad (i = 1, 2 \ldots N) . \qquad /1/$$

Так как функция /1/ периодична, то всякая наблюдаемая величина, усредненная по периоду $2\pi/\omega$, является константой. Поэтому можно сказать, что рассматриваемая система стационарна в среднем. Очевидно, такой режим принципиально отличается от режима суперфлюоресценции, когда возбуждающий импульс действует на систему лишь в начальный момент времени.

Гамильтониан двухуровневых излучателей можно записать или в представлении векторного потенциала /А-представление/ или в дипольном представлении. Эти представления, как известно [4], унитарно эквивалентны и переходят одно в другое в результате градиентного преобразования. При использовании A-представления обычно выбрасывают A^2-слагаемое и так называемые противовращательные слагаемые [2] . Справедливость делаемых приближений не всегда ясна, особенно в более сложных ситуациях, например при двухфотонных переходах [5,6] или для трехуровневых атомов [7] . Дипольное же представление включает A^2-слагаемое и более удобно при вычислениях; применение этого представления в теории возмущений дает более точные результаты; в особенности оно удобно и корректно при рассмотрении когерентных процессов [4] .

Дипольное представление гамильтониана с учетом поля переизлучения для системы излучателей с длиной волны $\lambda \lesssim a$ можно записать [8] в форме

$$\hat H(t) = \frac{1}{2}\omega_0 \sum_i [1 + \sigma_i^z(t)] - \frac{1}{2}\sum_i [\vec p_i^{\,+}(t)\vec E_i(t) + \vec E_i^{\,+}(t)\vec p_i(t)] -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} [\vec p_i^{\,-}(t)\vec E_{ij}(t) + \vec E_{ij}^{\,+}(t)\vec p_i(t)] , \qquad /2/$$

где $\hbar = 1$, ω_0 - частота перехода,

$$\vec p_i(t) = \vec d_i \sigma_i^-(t) , \qquad /3/$$

$\vec d_i$ - дипольный момент перехода, поле переизлучения

$$\vec E_{ij}(t) = \vec E_{ij} \sigma_j^-(t) , \qquad /4/$$

$$\vec{E}_{ij} = \frac{\omega^2}{c^2 r_{ij}} \vec{n}_{ij} \times [\vec{d}_j \times \vec{n}_{ij}] \exp(i \frac{\omega}{c} r_{ij}),$$

$$\vec{n}_{ij} \equiv \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|,$$

алгебра σ-операторов задается коммутационными соотношениями

$$[\sigma_i^z, \sigma_j^\pm] = \pm 2\delta_{ij}\sigma_i^\pm, \qquad [\sigma_i^+, \sigma_j^-] = \delta_{ij}\sigma_i^z .$$

В уравнениях движения для σ-операторов учтем наличие ширины возбужденного уровня и ширины линии перехода:

$$\gamma_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{T_2}, \tag{5}$$

а также существование стационарной немонохроматической накачки, характеризуемой величиной

$$\xi = \frac{N_+ - N_-}{N} \quad (N_+ + N_- = N), \tag{6}$$

в которой N_+ - число возбужденных, N_- - число девозбужденных атомов. Если нерезонансная накачка с помощью внешних полей отсутствует, то значение ξ определяется тепловой накачкой. При комнатной температуре $\xi \simeq -1$. Уравнения движения имеют вид

$$i\frac{d}{dt}\sigma_i^z(t) = \vec{d}_i [\vec{E}_i^+(t)\,\sigma_i^-(t) - \sigma_i^+(t)\vec{E}_i(t)] -$$
$$- 2\sum_{j(\neq i)} (\vec{d}_i \cdot \mathrm{Re}\vec{E}_{ij})[\sigma_i^+(t)\,\sigma_j^-(t) - \sigma_j^+(t)\,\sigma_i^-(t)] - \tag{7}$$
$$- i\gamma_1[\sigma_i^z(t) - \xi],$$

$$i\frac{d}{dt}\sigma_i^-(t) = (\omega_0 - i\gamma_2)\sigma_i^-(t) + \frac{1}{2}\vec{d}_i\vec{E}_i(t)\,\sigma_i^z(t) +$$
$$+ \sum_{j(\neq i)} (\vec{d}_i \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij})\,\sigma_i^z(t)\,\sigma_j^-(t). \tag{8}$$

Эффективный радиус взаимодействия через поле переизлучения [9] имеет порядок $r_{int} \sim \sqrt{\lambda L}$. Так как $L \sim aN^{1/3}$, то при $\lambda \sim a$ справедлива оценка

$$\frac{r_{int}}{a} \sim N^{1/6} \gg 1 \quad (N \gg 1),$$

из которой следует, что поле переизлучения задает дальнодействующие силы. В случае дальнодействия оправдано расцепление

$$\langle\sigma_i^\alpha(t)\,\sigma_j^\beta(t)\rangle = \langle\sigma_i^\alpha(t)\rangle\langle\sigma_j^\beta(t)\rangle \quad (i \neq j), \tag{9}$$

где $\alpha, \beta = z, \pm$. При решении усредненных уравнений /7/ и /8/ используем также полуклассическое приближение, которое для коллективных процессов дает практически те же результаты, что и чисто квантовое описание, опирающееся на представление когерентных состояний [10]. Кроме того, помним, что осуществляется квазирезонансная ситуация:

$$|\Delta| < \gamma_2 < \omega, \quad |\Delta| \ll \omega \quad (\Delta \equiv \omega - \omega_0). \tag{10}$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Система уравнений /7/, /8/ достаточно сложна, поэтому начнем ее исследование с поиска асимптотических решений, когда одно из внешний полей гораздо меньше другого.

Пусть постоянное поле существенно меньше переменного:

$$|\vec{E}_0| \ll |\vec{E}_1|. \tag{11}$$

Тогда, вводя обозначения для средних

$$\langle\sigma_i^z(t)\rangle = D_i^z, \quad \langle\sigma_i^-(t)\rangle = D_i e^{-i\omega t} \tag{12}$$

и действуя в духе теории среднего поля, что согласуется с расцеплением /9/, то есть полагая

$$\sum_j D_j \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij} \cong D\sum_j \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij}, \quad D \equiv \frac{1}{N}\sum_j D_j, \tag{13}$$

находим выражения

$$D_i^z = \xi\frac{\Delta^2 + \gamma_2^2}{\Delta^2 + \gamma_{i\,eff}^2}, \quad D_i = \frac{\xi(\Delta - i\gamma_2)}{2(\Delta^2 + \gamma_{i\,eff}^2)}(\vec{d}_i\vec{E}_{i\,eff}), \tag{14}$$

в которых

$$\gamma_{i\,eff}^2 = \gamma_2^2\left(1 + \frac{|\vec{d}_i\vec{E}_{i\,eff}|^2}{\gamma_1\gamma_2}\right),$$

$$\vec{E}_{i\,eff} = \vec{E}_i + 2D \sum_{j(\neq i)} \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij}\,,$$

$$D = \frac{\xi \sum_i (\vec{d}_i \vec{E}_i)(\Delta - i\gamma_2)/2N(\Delta^2 + \gamma^2_{i\,eff})}{1 - \xi \sum_{i \neq j} (\vec{d}_i \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij})(\Delta - i\gamma_2)/N(\Delta^2 + \gamma^2_{i\,eff})}\,.$$

Отсюда видно, что эффективное поле, действующее на i-й излучатель, близко к внешнему переменному полю, $\vec{E}_{i\,eff} \simeq \vec{E}$, при условии

$$\frac{\omega^2 d^2}{a\gamma_2 c^2} \ll 1 \qquad (d \equiv |\vec{d}_i|)\,. \qquad /15/$$

Теперь пусть,наоборот, переменное поле асимптотически мало по сравнению с постоянным:

$$|\vec{E}_i| \ll |\vec{E}_0|\,. \qquad /16/$$

В этом случае для средних

$$\langle\sigma_i^z(t)\rangle = D_i^z\,, \qquad \langle\sigma_i^-(t)\rangle = X_i\,, \qquad /17/$$

полагая аналогично /13/

$$\sum_j X_j \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij} \cong X \sum_j \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij}\,, \qquad X = \frac{1}{N}\sum_j X_j\,, \qquad /18/$$

получаем

$$D_i^z = \xi \frac{\omega_0^2 + \gamma_2^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2_{i\,eff}}\,, \qquad X_i = -\frac{\xi(\omega_0 + i\gamma_2)}{2(\omega_0^2 + \Gamma^2_{i\,eff})}(\vec{d}_i \vec{E}_i^{\,eff})\,, \qquad /19/$$

где

$$\Gamma^2_{i\,eff} = \gamma_2^2 \left(1 + \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i^{\,eff}|^2}{\gamma_1 \gamma_2}\right),$$

$$\vec{E}_i^{\,eff} = \vec{E}_0 + 2X \sum_{j(\neq i)} \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij}\,,$$

$$X = -\frac{\xi \sum_i (\vec{d}_i \vec{E}_0)(\omega_0 + i\gamma_2)/2N(\omega_0^2 + \Gamma^2_{i\,eff})}{1 + \xi \sum_{i \neq j} (\vec{d}_i \mathrm{Re}\,\vec{E}_{ij})(\omega_0 + i\gamma_2)/N(\omega_0^2 + \Gamma^2_{i\,eff})}\,.$$

Эффективное поле и постоянное внешнее поле близки друг другу, $\vec{E}_i^{\,eff} \simeq \vec{E}_0$, если

$$\frac{\omega d^2}{ac^2} \ll 1\,. \qquad /20/$$

В силу /10/ условие /20/ слабее, чем /15/.

4. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Общее решение уравнений /7/ и /8/ при произвольном соотношении между внешними полями имеет чрезвычайно громоздкий вид. Для упрощения получающихся выражений будем считать, что справедливо неравенство

$$\frac{k^2 d^2}{a\gamma_2} \ll 1 \qquad \left(k \equiv \frac{\omega}{c}\right). \qquad /21/$$

Средние от σ-операторов представляются рядами Фурье:

$$\langle\sigma_i^z(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_{ni}\, e^{-in\omega t}\,, \qquad \langle\sigma_i^-(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{ni}\, e^{-in\omega t}. \qquad /22/$$

Если в решении /22/ отбросить быстроосциллирующие слагаемые и противовращательные слагаемые, то получим приближение вращающейся волны, соответствующее выделению огибающих. В нашем случае для отбрасывания быстроосциллирующих слагаемых имеется и дополнительное оправдание, поскольку с ростом $n > 1$ коэффициенты рядов /22/ убывают как $1/n$. Кроме того, ниже будет показано, что существуют и другие параметры малости, позволяющие рассматривать /22/ как разложение по степеням этих параметров. Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned} \langle\sigma_i^z(t)\rangle &\cong D_i^z + Z_i e^{-i\omega t} + Z_i^* e^{i\omega t}\,, \\ \langle\sigma_i^-(t)\rangle &\cong X_i + D_i e^{-i\omega t} + Y_i e^{i\omega t}\,. \end{aligned} \qquad /23/$$

Для коэффициентов в выражении /23/ находим

$$D_i^z = \xi \{1 + \frac{1}{\gamma_1} \,\mathrm{Jm}\,[\, \frac{s_i^* |\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{t_i^*(\Delta - i\gamma_2)} + \frac{u_i |\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{\omega_0 - i\gamma_2}]\}^{-1},$$

$$Z_i = \frac{(\vec{d}_i \vec{E}_i)(\vec{d}_i \vec{E}_0)(\omega + 2i\gamma_2) D_i^z}{2 t_i v_i (\omega + i\gamma_1)(\omega_0 + i\gamma_2)(\Delta + i\gamma_2)},$$

$$X_i = -\frac{u_i (\vec{d}_i \vec{E}_0) D_i^z}{2(\omega_0 - i\gamma_2)}, \qquad D_i = \frac{s_i (\vec{d}_i \vec{E}_i) D_i^z}{2 t_i (\Delta + i\gamma_2)}, \qquad /24/$$

$$Y_i = -\frac{(\vec{d}_i \vec{E}_i^*) |\vec{d}_i \vec{E}_0|^2 (\omega - 2i\gamma_2) D_i^z}{4 t_i^* v_i^* (\omega + \omega_0 - i\gamma_2)(\omega - i\gamma_1)(\omega_0 - i\gamma_2)(\Delta - i\gamma_2)},$$

где

$$s_i = 1 + \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{2 v_i (\omega + i\gamma_1)(\omega_0 + i\gamma_2)},$$

$$t_i = 1 - \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{2 v_i (\omega + i\gamma_1)(\Delta + i\gamma_2)},$$

$$u_i = 1 + \frac{(\omega - 2i\gamma_2) |\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{2 t_i^* v_i^* (\omega - i\gamma_1)(\omega_0 - i\gamma_2)(\Delta - i\gamma_2)}, \qquad /25/$$

$$v_i = 1 - \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{2(\omega + i\gamma_1)(\omega_0 + i\gamma_2)} - \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{2(\omega + i\gamma_1)(\omega + \omega_0 + i\gamma_2)}.$$

От решения, задаваемого формулами /23/÷/25/, можно вернуться к рассмотренным выше предельным ситуациям. Так, при асимптотически слабом постоянном поле /11/ выражение /23/ переходит в /14/, где $\vec{E}_{i\,eff} \simeq \vec{E}_i$ согласно /15/, а при слабом переменном поле /16/ решение /23/ дает /19/, где $\vec{E}_i^{eff} \simeq \vec{E}_0$, поскольку из условия /21/ следует /20/.

В исследуемой физической задаче можно выделить естественные малые параметры

$$\frac{\gamma_1}{\omega} \ll 1, \qquad \frac{\gamma_2}{\omega} \ll 1,$$

$$\frac{d\,|\vec{E}_i|}{\omega} \ll 1, \qquad \frac{d\,|\vec{E}_0|}{\omega} \ll 1. \qquad /26/$$

Преобразуя /25/ при условии /26/, имеем

$$s_i = 1 + \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{2\omega^2}, \qquad t_i = 1 - \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{2\omega(\Delta + i\gamma_2)},$$

$$u_i = 1 + \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{2\omega(\Delta - i\gamma_2)}, \qquad v_i = 1 - \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{2\omega^2} - \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{4\omega^2}. \qquad /27/$$

Подставляя эти выражения в /24/, находим

$$D_i^z = \xi \frac{\Delta^2 + \gamma_2^2}{\Delta^2 + \Gamma_i^2}, \qquad Z_i = \frac{(\vec{d}_i \vec{E}_i)(\vec{d}_i \vec{E}_0)}{2\omega(\Delta + i\gamma_2)} D_i^z,$$

$$X_i = -\frac{(\vec{d}_i \vec{E}_0)}{2\omega} D_i^z, \qquad D_i = \frac{(\vec{d}_i \vec{E}_i)}{2(\Delta + i\gamma_2)} D_i^z, \qquad /28/$$

$$Y_i = -\frac{(\vec{d}_i \vec{E}_i^*) |\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{8\omega^2(\Delta - i\gamma_2)} D_i^z,$$

где эффективная константа затухания определяется равенством

$$\Gamma_i^2 = \gamma_2^2 (1 + \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{\gamma_1 \gamma_2} + \frac{\Delta^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2 \omega_0^2} |\vec{d}_i \vec{E}_0|^2).$$

При наличии малых параметров /26/ ряды в формуле /22/ представляют собой разложение по степеням этих параметров.

Еще более упростим найденные решения, предполагая, что выполняются равенства

$$\frac{|\Delta|}{\gamma_2} \ll 1, \qquad \frac{|\vec{d}_i \vec{E}_i|^2}{\gamma_1 \gamma_2} \ll 1, \qquad \frac{\gamma_2 |\vec{d}_i \vec{E}_0|^2}{\gamma_1 \omega^2} \ll 1. \qquad /29/$$

Тогда из /28/ получаем

$$D_i^z = \xi\left(1 - \frac{|\vec d_i \vec E_i|^2}{\gamma_1\gamma_2} - \frac{\gamma_2 |\vec d_i \vec E_0|^2}{\gamma_1 \omega^2}\right),$$

$$Z_i = -i\,\frac{\xi(\vec d_i \vec E_i)(\vec d_i \vec E_0)}{2\omega\gamma_2},$$

$$X_i = -\frac{\xi(\vec d_i \vec E_0)}{2\omega}, \qquad D_i = -i\,\frac{\xi(\vec d_i \vec E_i)}{2\gamma_2}, \qquad /30/$$

$$Y_i = -i\,\frac{\xi(\vec d_i \vec E_i^*)\,|\vec d_i \vec E_0|^2}{8\omega^2\gamma_2}.$$

5. ОРИЕНТАЦИЯ ДИПОЛЕЙ

Решения, исследованные в предыдущем пункте, пока заданы не полностью, так как они существенно зависят от ориентации дипольных моментов $\vec d_i$ относительно внешних полей. Для системы стационарной в среднем эта ориентация определяется самосогласованным образом, из условия минимума средней энергии.

$$W = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \langle \hat H(t)\rangle\,dt. \qquad /31/$$

Подставляя сюда гамильтониан /2/ и средние /23/, имеем

$$W = \frac{1}{2}\omega_0\left(N + \sum_i D_i^z\right) - \mathrm{Re}\sum_i \vec d_i(\vec E_i^* D_i + \vec E_0 X_i) -$$

$$- \sum_{i\neq j}\Phi_{ij}(X_i^* X_j + D_i^* D_j + Y_i^* Y_j), \qquad /32/$$

где

$$\Phi_{ij} \equiv \mathrm{Re}(\vec d_i \vec E_{ij}) = k^3[(\vec d_i \vec d_j) - (\vec d_i \vec n_{ij})(\vec d_i \vec n_{ij})]\,\frac{\cos(kr_{ij})}{kr_{ij}}.$$

Если направление поля $\vec E_i$ меняется случайно во времени или в пространстве, то сумма $\sum_i$ подразумевает и усреднение по направлениям $\vec E_i$.

Рассмотрим различные частные случаи. Допустим, пространственная ориентация поля $\vec E_i$ фиксирована, то есть не зависит от времени, а постоянное поле асимптотически мало, то есть справедливо неравенство /11/. По-прежнему считаем, что выполняется условие /21/. Тогда из /32/ находим

$$W \simeq \frac{1}{2}\omega_0 N + \frac{1}{2}\xi\sum_i \frac{\omega_0(\Delta^2 + \gamma_2^2) - \Delta|\vec d_i \vec E_i|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2 + (\gamma_2/\gamma_1)|\vec d_i \vec E_i|^2}. \qquad /33/$$

Введем векторы поляризации с помощью равенств

$$\vec d_i = d\vec\pi_i, \qquad \vec E_i = E_i \vec e_i \qquad (|\vec\pi_i| = 1 = |\vec e_i|).$$

Как нетрудно убедиться, наименьшее значение средней энергии /33/ достигается при условии

$$(\vec\pi_i \vec e_i)^2 = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \qquad /34/$$

Строго говоря, при нерезонансной стационарной накачке число возбужденных атомов не может быть больше числа девозбужденных атомов, $N_+ \leq N_-$, значит, характеристика накачки /6/ неположительна, $\xi \leq 0$. Следовательно, если оставить в стороне специальные случаи, когда ξ отвечает некоторой эффективной характеристике квазирезонансной накачки, то неравенство $\xi > 0$ нереалистично. Таким образом, в обычной ситуации от выражения /34/ остается только одно равенство

$$(\vec\pi_i \vec e_i) = 0 \qquad (\xi < 0).$$

Допустим теперь, что постоянное поле асимптотически сильно, то есть выполняется неравенство /16/. В этом случае в качестве средней энергии /32/ имеем

$$W \simeq \frac{1}{2}\omega_0 N + \frac{1}{2}\omega_0\,\xi\sum_i \frac{\omega_0^2 + \gamma_2^2 + |\vec d_i \vec E_0|^2}{\omega_0^2 + \gamma_2^2 + (\gamma_2/\gamma_1)|\vec d_i \vec E_0|^2} -$$

$$- \sum_{i\neq j}\frac{\Phi_{ij}\,\xi^2(\omega_0^2 + \gamma_2^2)}{4(\omega_0^2 + \Gamma_i^2)(\omega_0^2 + \Gamma_j^2)}(\vec d_i \vec E_0)(\vec d_j \vec E_0). \qquad /35/$$

Определим вектор поляризации постоянного поля:

$$\vec E_0 = E_0 \vec e_0 \qquad (|\vec e_0| = 1).$$

Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то при условии /21/ основной вклад в среднюю энергию вносят первые два слагаемых, минимизация которых дает в зависимости от величины ξ либо

$$(\vec{\pi}_i \vec{e}_0)^2 = \begin{cases} 1, \gamma_1 < \gamma_2, \\ 0, \gamma_1 > \gamma_2, \end{cases} \quad (\xi > 0) \qquad /36/$$

либо

$$(\vec{\pi}_i \vec{e}_0)^2 = \begin{cases} 0, \gamma_1 < \gamma_2, \\ 1, \gamma_1 > \gamma_2. \end{cases} \quad (\xi < 0) \qquad /37/$$

В соответствии со сказанным выше более реалистичен случай /37/. Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то первые два слагаемых в /35/ не зависят от $\vec{\pi}_i$, поляризация дипольного момента определяется третьим слагаемым, которое можно несколько упростить, учитывая /29/, откуда $\Gamma_i \cong \cong \gamma_2$. При этом средняя энергия /35/ принимает вид

$$W = \frac{1}{2} N \omega_0 (1+\xi) - \frac{\xi^2 d^2 E_0^2}{4(\omega_0^2 + \gamma_2^2)} \sum_{i \neq j} \Phi_{ij} (\vec{\pi}_i \vec{e}_0)(\vec{\pi}_j \vec{e}_0). \qquad /38/$$

Наименьшее значение /38/ обеспечивается условием

$$(\vec{\pi}_i \vec{e}_0)^2 = 1 \qquad (\gamma_1 = \gamma_2, \forall \xi), \qquad /39/$$

которое показывает, что дипольные моменты $\vec{d}_i$ ориентируются параллельно или антипараллельно внешнему полю $\vec{E}_0$.

Пусть соотношение между амплитудами резонансного поля $\vec{E}_i$ и однородного поля E_0 произвольно, а направление $\vec{E}_i$ случайно во времени или в пространстве. Тогда, проводя усреднение по поляризациям $\vec{e}_i$ и принимая для простоты /26/ и /29/, из /32/ получаем

$$W = \frac{1}{2} N \omega_0 (1+\xi) - \frac{\xi \omega d^2}{6\gamma_1 \gamma_2} \sum_i |E_i|^2 + (\gamma_1 - \gamma_2) \frac{\xi E_0^2 d^2}{2\omega \gamma_1} \sum_i (\vec{\pi}_i \vec{e}_0)^2 -$$
$$- \frac{\xi^2 E_0^2 d^2}{4\omega^2} \sum_{i \neq j} \Phi_{ij} (\vec{\pi}_i \vec{e}_0)(\vec{\pi}_j \vec{e}_0). \qquad /40/$$

Минимальное значение средней энергии /40/ достигается при тех же условиях /36/, /37/ и /39/. Снова, ограничиваясь лишь случаем $\xi < 0$, можно записать

$$(\vec{\pi}_1 \vec{e}_0)^2 = \begin{cases} 0, \gamma_1 < \gamma_2, \\ 1, \gamma_1 \geq \gamma_2. \end{cases} \quad (\xi < 0)$$

6. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

От того, как ориентируются дипольные моменты переходов, существенно зависит интенсивность излучения. Усредненную по периоду интегральную интенсивность излучения можно записать [11] в форме

$$I = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I(t)\, dt = I_{inc} + I_{coh},$$

$$I(t) = \frac{4\omega^4}{3c^3} \sum_{ij} f_{ij} (\vec{d}_i \vec{d}_j) \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle, \qquad /41/$$

в которой выделены некогерентная I_{inc} и когерентная I_{coh} составляющие

$$I_{inc} = \frac{2d^2\omega^4}{3c^3} \sum_i (1 + D_i^z),$$
$$I_{coh} = \frac{4\omega^4}{3c^3} \sum_{i \neq j} f_{ij} (\vec{d}_i \vec{d}_j)(X_i^* X_j + D_i^* D_j + Y_i^* Y_j). \qquad /42/$$

Здесь f_{ij} – так называемый фактор формы [2]. Для анализа относительного вклада когерентной компоненты введем коэффициент когерентности

$$C_{coh} \equiv I_{coh} / I_{inc}, \qquad /43/$$

который кажется более удобным по сравнению с обычно используемым фактором когерентности [12]

$$F_{coh} = I_{coh} / I = C_{coh} / (1 + C_{coh}).$$

Удобство коэффициента /43/ состоит в том, что при когерентном режиме $C_{coh} \gg 1$, тогда как $F_{coh} \simeq 1$. Рассматривая различные частные случаи, везде ниже считаем, что справедливы неравенства /26/ и /29/.

При асимптотически слабом постоянном поле /11/ и фиксированной поляризации переменного поля $\vec{e}_i$ из /42/ находим

$$I_{inc} = \frac{2d^2\omega^4}{3c^3}\left[N(1+\xi) - \frac{\xi d^2}{\gamma_1\gamma_2}\sum_i (\vec{\pi}_i\vec{e}_i)^2\,|E_i|^2\right],$$

$$I_{coh} = \frac{\xi^2 d^4\omega^4}{3\gamma_2^2 c^3}\sum_{i\neq j} f_{ij}(\vec{\pi}_i\vec{\pi}_j)(\vec{\pi}_i\vec{e}_i)(\vec{\pi}_j\vec{e}_j)\,E_i^*E_j\,. \qquad /44/$$

Для реалистической накачки с характеристикой $\xi < 0$ согласно /34/ имеем $(\vec{\pi}_i\vec{e}_i) = 0$. Поэтому

$$I_{inc} = N(1+\xi)\frac{2d^2\omega^4}{3c^3}, \qquad I_{coh} = 0\,.$$

Таким образом, в обычных условиях резонансное поле усиливаемой лазерной моды, даже будучи поляризованным, не может привести к появлению когерентного излучения.

При асимптотически сильном постоянном поле /16/ из /42/ следует

$$I_{inc} = N\frac{2d^2\omega^4}{3c^3}\left(1+\xi-\xi\frac{\gamma_2 d^2E_0^2}{\gamma_1\omega^2}\right),$$

$$I_{coh} = \frac{\xi^2E_0^2\omega^2d^4}{3c^3}\sum_{i\neq j} f_{ij}(\vec{\pi}_i\vec{\pi}_j)(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)(\vec{\pi}_j\vec{e}_0)\,. \qquad /45/$$

Когерентное излучение при $\xi < 0$ в соответствии с /36/, /37/ и /39/ существует, если $\gamma_1 \gtrsim \gamma_2$, когда $(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)^2 = 1$. В этом случае, полагая для простоты $\xi = -1$, из /45/ получаем

$$I_{inc} = N\frac{2\gamma_2E_0^2\omega^2d^4}{3\gamma_1c^3},$$

$$I_{coh} = N^2 f\frac{E_0^2\omega^2d^4}{3c^3} \qquad \left(f = \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j} f_{ij}\right).$$

Когда когерентная составляющая гораздо больше некогерентной, полная интенсивность /41/ пропорциональна N^2. Такое свойство характерно для сверхизлучения. При этом $C_{coh} \gg 1$. Сверхизлучательный режим осуществляется при достаточно большом числе излучателей,

$$Nf\frac{3\gamma_1}{2\gamma_2} \gg 1 \qquad (N \gg 1)\,.$$

Пусть теперь соотношение между амплитудами внешних полей произвольно. Тогда

$$I_{inc} = \frac{2d^2\omega^4}{3c^3}\left\{N(1+\xi) - \xi\frac{\gamma_2}{\gamma_1}d^2\sum_i\left[\frac{|E_i|^2}{\gamma_2^2}(\vec{\pi}_i\vec{e}_i)^2 + \frac{E_0^2}{\omega^2}(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)^2\right]\right\},$$

$$I_{coh} = \frac{\xi^2\omega^4d^4}{3c^3}\sum_{i\neq j} f_{ij}(\vec{\pi}_i\vec{\pi}_j)\left[\frac{E_i^*E_j}{\gamma_2^2}(\vec{\pi}_i\vec{e}_i)(\vec{\pi}_j\vec{e}_j) + \frac{E_0^2}{\omega^2}(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)(\vec{\pi}_j\vec{e}_0)\right]. \qquad /46/$$

Если поляризация переменного поля $\vec{e}_i$ случайна и отсутствует дополнительная накачка, то есть $\xi = -1$, то из /46/ находим

$$I_{inc} = \frac{2\gamma_2\omega^4d^4}{3\gamma_1c^3}\sum_i\left\{\frac{|E_i|^2}{3\gamma_2^2} + \frac{E_0^2}{\omega^2}(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)^2\right\},$$

$$I_{coh} = \frac{\xi^2E_0^2\omega^2d^4}{3c^3}\sum_{i\neq j} f_{ij}(\vec{\pi}_i\vec{\pi}_j)(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)(\vec{\pi}_j\vec{e}_0)\,. \qquad /47/$$

Рассмотрим ситуацию, когда диполи переходов выстроены, $(\vec{\pi}_i\vec{e}_0)^2 = 1$, и выполняется неравенство

$$\frac{\gamma_2E_0}{\omega E} \ll 1 \qquad (E \equiv |E_i|)\,. \qquad /48/$$

При этом некогерентная часть излучения почти целиком обязана переменному полю, а когерентная - постоянному:

$$I_{inc} = N\frac{2E^2\omega^4d^4}{9\gamma_1\gamma_2c^3}, \qquad I_{coh} = N^2 f\frac{E^2\omega^2d^4}{3c^3}. \qquad /49/$$

Коэффициент когерентности /43/

$$C_{coh} = Nf\frac{3\gamma_1\gamma_2E_0^2}{2\omega^2E^2} \qquad /50/$$

может быть достаточно большим при $N \gg 1$. Следовательно, возможен сверхизлучательный режим.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Все изложенное выше справедливо для произвольной системы двухуровневых излучателей с $\lambda \lesssim a$. В случае магнитно-дипольных переходов формулы сохраняют свой смысл при замене электрических полей на соответствующие магнитные: $E \to H$, $E_0 \to H_0$.

Для плотностей обычных газов $\rho \sim 10^{20} \div 10^{21}$ см$^{-3}$ среднее расстояние между атомами $a \sim 10^{-7} \div 10^{-6}$ см; сверхизлучение может возникать в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах.

Для гораздо более разреженной межзвездной среды $\rho \sim 10^{-6} \div 10^{4}$ см$^{-3}$, то есть $a \sim 10^{-1} \div 10^{2}$ см. Так как в космическом пространстве, особенно вблизи звезд, имеются постоянные магнитные поля, то в межзвездной среде возможно возникновение сверхизлучения на оптических частотах и радиочастотах.

Наконец, для гамма-диапазона разреженным можно считать и твердое тело, так как $\lambda \lesssim a$. При этом роль постоянного внешнего поля может играть собственное поле сегнетоэлектрика или сверхтонкое поле ферромагнетика. Чтобы продемонстрировать реальность гамма-сверхизлучения, приведем оценки для магнитных переходов в мессбауэровских ядрах на характерной частоте $\omega \sim \omega_0 \sim 10^4$ эВ при ширине уровня $\gamma_1 \sim 10^{-8}$эВ. Мессбауэровские ядра обладают следующим свойством /3/. Если время жизни возбужденного уровня $T_1 < 10^{-5}$ с, значит, $\gamma_1 > 6 \cdot 10^{-11}$ эВ, то однородная ширина линии совпадает с шириной уровня, $\gamma_2 = \gamma_1$. Если же $T_1 > 10^{-5}$ с, значит, $\gamma_1 < 6 \cdot 10^{-11}$ эВ, то $\gamma_2 \approx 6 \cdot 10^{-11}$ эВ. Существует очень мало ядер с $T_1 > 10^{-5}$ с. Например, это Ag, для которого $\gamma_1 < \gamma_2$. Практически для всех остальных мессбауэровских ядер $T_1 < 10^{-5}$с, следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$. При переходе M1 дипольный момент перехода имеет порядок магнитного момента ядра, $d \sim \mu_n \sim 10^{-12}$ эВ/Гс. Длина волны $\lambda \sim a \sim 10^{-8}$ см. Поле радиоактивного источника $H \sim 10^{-4}$ Э. Сверхтонкое поле $H_0 \sim 10^5$ Э. Приближения, использованные ранее, выполняются. Так, из оценки

$$\frac{k^2 \mu_n^2}{a \gamma_2} \sim 10^{-3}$$

вытекает справедливость неравенства /21/. Поскольку

$$\frac{\gamma_1}{\omega} \sim \frac{\gamma_2}{\omega} \sim 10^{-12}, \quad \frac{\mu_n H}{\omega} \sim 10^{-20}, \quad \frac{\mu_n H_0}{\omega} \sim 10^{-11},$$

то верно условие /26/. Значения величин

$$\frac{\mu_n^2 H^2}{\gamma_1 \gamma_2} \sim 10^{-16}, \quad \frac{\gamma_2 \mu_n^2 H_0^2}{\gamma_1 \omega^2} \sim 10^{-22}$$

оправдывают применимость /29/. Неравенство /48/ также справедливо, так как

$$\frac{H}{H_0} \sim 10^{-9}, \quad \frac{\gamma_2 H_0}{\omega H} \sim 10^{-3}.$$

Коэффициент когерентности /50/ зависит от числа излучателей N, находящихся в объеме когерентности, $N \sim n_M \ell_{coh}^3$, где n_M - плотность мессбауэровских ядер, ℓ_{coh} - длина когерентности, $r_{int} \lesssim \ell_{coh} \lesssim \ell_{ext}$, радиус взаимодействия $r_{int} \sim \sqrt{\lambda L}$, в качестве L надо брать длину экстинкции $\ell_{ext} \sim 10^{-3} \div 10^{-1}$ см, откуда $r_{int} \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$ см, $\ell_{coh} \sim 10^{-6} \div 10^{-1}$ см. При $n_M \sim 10^{21} \div 10^{23}$ см$^{-3}$ получаем $N \sim 10^{5} \div 10^{20}$. Поэтому $C_{coh} \sim /10^{-1} - 10^{14}/f$. В идеальных кристаллах неупругие каналы реакции при резонансном рассеянии гамма-квантов на углы Брэгга могут быть подавлены [13-15] . Такое подавление наблюдалось экспериментально [16-17]. При этом длина экстинкции может достигнуть 1 см, а коэффициент когерентности $C_{coh} \sim 10^{17}$ f.

Известно, что кроме фотонного существует и фононное сверхизлучение [18] . Если в системе имеются некоторые эффективные поля, действующие на фононные переменные, как, например, в сегнетоэлектриках или сплавах с кооперативным эффектом Яна - Теллера [9,20] , то в такой системе, по-видимому, также может появиться фононное сверхизлучение, аналогичное тому, что описано в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dicke R.H. - Phys.Rev., 1954, 93, p.99.
2. Allen L., Eberly J. - Optical Resonance and Two-Level Atoms, Wiley, New York, 1975.
3. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. - УФН, 1980, 131, с.653.
4. Fried Z. - Phys.Rev., 1973, A8, p.2835.
5. Боголюбов Н.Н./мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. - ТМФ, 1985, 62, с.461.
6. Бакасов А.А., Юкалов В.И. - ТМФ, 1987, 72, с.132.
7. Bogolubov N.N.(Jr.), Shumovsky A.S., Tran Quang - J.Phys., 1987, B20, p.629.
8. Юкалов В.И.- ОИЯИ, Р17-87-341, Дубна, 1987.
9. Емельянов В.И., Юкалов В.И. - Оптика и спектроскопия, 1986, 60, с.634.

10. Bloembergen N. - Nonlinear Optics, Benjamin, New York, 1965.
11. Stenholm S. - Phys.Rep., 1973, 6, p. 1.
12. Maitland A., Dunn M. - Laser Physics, North-Holland, Amsterdam, 1969.
13. Афанасьев А.М., Каган Ю.М. - ЖЭТФ, 1965, 48, с.327.
14. Каган Ю.М., Афанасьев А.М., Перстнев И.П. - ЖЭТФ, 1968, 54, с.1530.
15. Van Bürk U. - Hyp.Int., 1986, 27, p.219.
16. Войтовецкий В.К. и др. - ЖЭТФ, 1968, 54, с.1361.
17. Smirnov G.V. - Hyp.Int., 1986, 27, p.203.
18. Kopvillem U.K. et al. - Adv.Mol.Relax.Proc., 1976, 8,p.241.
19. Gehring G.A., Gehring K.A. - Rep.Prog.Phys., 1975,38,p.1.
20. Ohnari I. - J.Phys., 1982, C15, p.4781.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1988 года.

Юкалов В.И. Р17-88-18

Возможность сверхизлучения в разреженных системах

Рассмотрена система двухуровневых излучателей с плотностью, при которой сверхизлучение Дикке невозможно. Показано, что может существовать новый вид сверхизлучения при действии на систему периодического резонансного поля и постоянного однородного поля. Определены коэффициенты когерентности и приведены оценки для магнитных дипольных переходов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Yukalov V.I. P17-88-18

Possibility of Superradiation in Rarefied Systems

A system of two-level emitters, with a density for which the Dicke superradiation is impossible, is investigated. It is shown that a new type of superradiation can exist under the action of periodic resonant field and a uniform constant field. Coherence coefficients are defined and estimates for magnetic dipole transitions are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988