сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-88-165

Х.О.Абдуллоев*, А.В.Маханьков

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ХОЛСТЕЙНА – ПРИМАКОВА ДЛЯ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ И САМОЛОКАЛИЗАЦИИ СПИНОВЫХ ВОЛН

* Таджикский государственный университет, Душанбе

1988

ВВЕДЕНИЕ

Предыдущие работы этой серии /I/-/3/ были посвящены изучению особенностей квазиклассического поведения квантовых статистических моделей. В них рассматривались два типа процедуры перехода от квантового описания к классическому полевому. Первый тип основан на бозонизации исходного гамильтониана с помощью преобразований Холстейна-Примакова (ХП) и дальнейшем усреднении его по когерентным состояниям группы Гейзенберга-Вейля (бозонные когерентные состояния - БКС), второй - на усреднении исходного гамильтониана по спиновым когерентным состояниям группы $SU(2)$ (СКС).

Большое внимание уделялось важности анализа симметрии как исходного гамильтониана, так и основного состояния квантовой системы. Было показано, что применение различных типов процедуры сведения к исходной квантовой системе приводит к различным классическим моделям /2/. Исследовалась возможность соответствия этих моделей на примере легкоосной XXZ модели Гейзенберга /3/. Выяснилось, что условием квазиклассического приближения для спиновых анизотронных моделей (и применимости преобразований ХП и СКС) является не $S \gg I$, а $\delta \cdot S \gg I$ (δ - степень анизотропии), а также, что системы, полученные с помощью этих процедур (т.е. ХП и СКС), в случае легкой оси могут быть сведены друг к другу в низшем порядке по взаимодействию (в третьем порядке по полю в уравнении). В этом порядке два подхода описывают одинаково квазиклассическую самолокализацию спиновых волн с помощью кубического уравнения Шредингера либо вблизи установившихся состояний, либо, с меньшей точностью, быстро движущихся волновых пакетов.

Ниже мы исследуем изотронный и легкоплоскостной варианты модели Гейзенберга ($\Delta \leq 0$), а также получим условия самолокализации пакетов спиновых волн.

I. Рассмотрим модель Гейзенберга вида

$$\hat{H} = -\sum_n \left(J_1 \hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + J_2 \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y + J_3 \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right) . \qquad (I)$$

Используя обозначение /4/ $J_k = J_0 + \frac{a^2}{2} \beta_k$, к = I,2,3 , будем иметь

$$\hat{H} = -J_0 \sum_n \vec{\hat{S}}_n \vec{\hat{S}}_{n+1} - \frac{a^2}{2} \sum_n \left(\beta_1 \hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + \beta_2 \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y + \beta_3 \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right) . \qquad (2)$$

Вводя $\hat{S}_n^{\pm} = \hat{S}_n^x \pm i \hat{S}_n^y$, гамильтониан (2) перепишем в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_+ + \hat{H}_- \,, \tag{3}$$

где

$$\hat{H}_+ = -J_0 \sum_n \left[\frac{1}{2}\left(\hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^+ + \hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^-\right) + \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right], \tag{4}$$

$$\hat{H}_- = -\frac{a^2}{2} \sum_n \frac{(\beta_1+\beta_2)}{4} \left[\left(\hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^+ + \hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^-\right) + \frac{(\beta_1-\beta_2)}{(\beta_1+\beta_2)}\left(\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^+ + \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^-\right) + \frac{4\beta_3}{(\beta_1+\beta_2)} \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right]. \tag{5}$$

Как видно из (3), первый член гамильтониана соответствует изотропной модели, второй представляет анизотропную добавку. В легкоосном случае формула (3) принимает стандартный вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{4} \sum_n J \left(\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^- + \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^+\right) - \frac{1}{2} \sum_n \tilde{J}\, \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \,. \tag{6}$$

Теперь, бозонируя (6) с помощью преобразований XII, усредняя его по когерентным состояниям группы Гейзенберга-Вейля и переходя к континуальному пределу, получим классическую модель (см./2/):

$$H_{кл} = s a_0 J \int \left\{ \Delta|\alpha|^2 + |\alpha_x|^2 + G|\alpha|^4 + K|\alpha|^6 + B\left(\bar{\alpha}^2\alpha_x^2 + \bar{\alpha}_x^2\alpha^2\right)\right\} dx, \tag{7}$$

где

$$G = -\frac{\Delta}{2s} + \frac{1}{8s^2a_0^2} + \frac{1}{32s^3a_0^2} \,,$$

$$K = \frac{1}{16s^3a_0^2} \,,$$

$$B = \frac{1}{4s} \,.$$

Гамильтониан (7) порождает уравнение /3/

$$\frac{i\dot{\alpha}}{Jsa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha + \frac{\alpha|\alpha|^2}{s}\left(\Delta - \frac{1}{4sa_0^2}\right) + \frac{3}{8sa_0^2}\frac{\alpha|\alpha|^4}{2s^2} + \frac{\alpha|\alpha_x|^2}{s} - \frac{\bar{\alpha}\alpha_x^2}{2s} + \frac{\bar{\alpha}_{xx}\alpha^2}{2s} \,. \tag{8}$$

Усреднение гамильтониана (6) по спиновым когерентным состояниям приводит к уравнению следующего вида /2/:

$$i\Psi_t = \Psi_{xx} - 2\bar{\Psi}\cdot\frac{\Psi_x^2}{1+|\Psi|^2} + \Delta\frac{|\Psi|^2-1}{|\Psi|^2+1}\Psi \,. \tag{9}$$

Используя выражение для классического вектора спина $\vec{S} = s(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, можно найти соотношения между величинами Ψ, θ и φ. Поскольку $S^z = s\frac{1-|\Psi|^2}{1+|\Psi|^2}$ в случае $|\Psi|^2 \ll 1$: имеем $\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{s}}|\alpha|$; $\theta = \pm 2|\Psi|$ или (случай малых углов $\theta \ll 1$)

$$|\Psi|^2 = \frac{|\alpha|^2}{2s} \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в (9), получим уравнение в терминах α:

$$\frac{i\dot{\alpha}}{Jsa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha + \Delta\frac{\alpha|\alpha|^2}{s}\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{2s}\right) - \frac{\bar{\alpha}\alpha_x^2}{s} \,. \tag{11}$$

Сравнение (8) и (11), проведенное в /3/, дало условие квазиклассического приближения

$$\Delta\cdot a_0^2 \gg \frac{1}{4s} \,, \quad s \gg \frac{1}{4s} \,. \tag{12}$$

2. Изотропная модель, $\Delta = 0$

Сравнивая (8) и (11), видим, что при $\Delta = 0$ квазиклассическое приближение имеет место, когда "квантовым" членом $\frac{\alpha|\alpha|^2}{4s^2a_0^2}$, возникшим из-за упорядочения операторов, можно пренебречь, т.е. $\frac{\alpha|\alpha_x|^2}{s} \gg \frac{\alpha|\alpha|^2}{4s^2a_0^2}$ или

$$k_0^2 a_0^2 \gg \frac{1}{4s} \,, \tag{13}$$

где k_0 характеризует градиенты функции $\alpha(x,t)$. Объединяя (12) и (I3), имеем, что

$$\max\left(k_0^2, \Delta\right) a_0^2 \gg \frac{1}{4S} \qquad (I4)$$

есть условие квазиклассики.

3. Легкая плоскость, $\Delta < 0$

Направим ось квантования вдоль вектора намагниченности. В этом случае одноосный гамильтониан будет иметь вид

$$\hat{H} = -J\sum_n \left[\hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z + \rho\, \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y\right] \equiv \hat{H}_+ + \hat{H}_- \;,$$

где

$$\hat{H}_+ = -\frac{1+\rho}{2}\sum_n \left[\frac{1}{2}\left(\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^- + \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^+\right) + \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z\right], \qquad (I5)$$

$$\hat{H}_- = \frac{a_0^2}{2}\Delta\sum_n \left[\frac{1}{2}\left(\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^+ + \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^-\right) + \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z\right]. \qquad (I6)$$

Применяя первый метод к (I5), (I6) получим (см.также /2/)

$$H = Sa_0 J \int \left[|\alpha_x|^2 - \frac{\Delta}{2}\left(|\alpha|^2 - \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{2}\right)\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{2S}\right)\right] dx \;. \qquad (I7)$$

Использование второго метода для (I5), (I6) дает

$$H = 2Sa_0 J \left\{\int \left[\frac{|\psi_x|^2}{(1+|\psi|^2)^2} - \frac{1}{2J_0}\left(\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3\right)\frac{|\psi|^2}{(1+|\psi|^2)^2} - \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{4J_0}\cdot\frac{\psi^2 + \bar{\psi}^2}{(1+|\psi|^2)^2}\right] dx\right\}. \qquad (I8)$$

Положим в (I8) $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = \Delta$, тогда гамильтониан (I8) описывает легкоплоскостную модель, причем ось квантования Z лежит в легкой плоскости. Первый и второй варианты процедуры

сведения дают соответственно

$$\frac{i\dot{\alpha}}{Sa_0 J_0} = \alpha_{xx} + \frac{\Delta}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) - \frac{\Delta}{2S}|\alpha|^2\alpha + \frac{\Delta}{8S}\alpha^3 + \frac{3\Delta}{8S}|\alpha|^2\bar{\alpha}\;, \qquad (I9)$$

$$\frac{i\dot{\psi}}{2Sa_0 J_0} = \psi_{xx} - 2\bar{\psi}\frac{(\psi_x)^2}{1+|\psi|^2} - \frac{\Delta}{2}\frac{(\bar{\psi} - \psi^3)}{1+|\psi|^2} + \frac{\Delta}{2}\frac{(1-|\psi|^2)}{1+|\psi|^2}\psi\;, \qquad (20)$$

где $\Delta = \dfrac{\beta_2}{J_0}$.

Решения (I9) вблизи основного состояния $\alpha = 0$ описывают прецессию вектора спина при $\theta \ll$ I. В терминах ψ основное состояние также есть $\psi = 0$, поэтому для описания "слабой" прецессии можно учесть в (20) члены не выше кубического и перейти от ψ к α по формуле $\psi = \alpha/\sqrt{2S}$:

$$\frac{i\dot{\alpha}}{Sa_0 J_0} = \alpha_{xx} + \frac{\Delta}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) - \frac{\Delta}{2S}\alpha|\alpha|^2 + \frac{3\Delta}{8S}\bar{\alpha}|\alpha|^2 + \frac{\Delta}{8S}\alpha^3\;, \qquad (I9a)$$

$$\frac{i\dot{\alpha}}{Sa_0 J_0} = \alpha_{xx} + \frac{\Delta}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) - \frac{\Delta}{2S}\alpha|\alpha|^2 + \frac{\Delta}{4S}\bar{\alpha}|\alpha|^2 + \frac{\Delta}{4S}\alpha^3\,. \qquad (20a)$$

Из уравнений (I9a) и (20a) видно, что структуры обеих моделей одинаковы с точностью до численных коэффициентов при кубических членах. Первый метод можно применять и в этом случае, однако при правильном выборе оси квантования, отдавая себе отчет в том, что численные коэффициенты должны быть найдены из каких-то дополнительных соображений. То есть, полученные таким образом модели носят феноменологический характер. Для описания немалых спиновых отклонений от основного состояния уравнение, полученное с помощью спиновых когерентных состояний, представляется более адекватным, чем то, которое получено применением преобразований Холстейна-Примакова, поскольку при достаточно больших $S \gg$ I (классическая система) первое точно переходит в классическое уравнение Ландау-Лифшица. А при промежуточных значениях S спиновые когерентные состояния с хорошей точностью восстанавливают квантовый собственный вектор исходного гамильтониана /2/*).

4. Рассматриваемые нами уравнения легко обобщаются на случай D-мерных моделей. Для этого достаточно сделать замену $\frac{\partial}{\partial x} \to \nabla$ с соответствующей сверткой $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to \Delta$.

5. Ниже мы обсудим квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн в рамках одноосной модели Гейзенберга.

Для упрощения выкладок будем рассматривать симметричные пакеты. Их динамику описывает следующее нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\dot{\Psi} + \Psi_{rr} + \frac{D-1}{r}\Psi_r - \frac{dU(\Phi)}{d\Phi}\Psi = 0\,, \qquad (2\text{I})$$

которое приведено с достаточно общим типом взаимодействия, $\Phi = |\Psi|^2$.

Это уравнение имеет интегралы

$$E = \pi(2)^{D-1}\int\{|\Psi_r|^2 + U\}\, r^{D-1}\, dr\,, \qquad (22а)$$

$$N = \pi(2)^{D-1}\int|\Psi|^2 r^{D-1}\, dr\,, \qquad (22б)$$

характеризующие энергию и число частиц соответственно. Здесь $U(\Phi)$ есть достаточно гладкая функция от Φ.

Займемся изучением поведения во времени величины

$$B(t) = \pi(2)^{D-1}\int|\Psi|^2 r^{D+1}\, dr = \langle r^2\rangle N \geqslant 0\,, \qquad (22)$$

пропорциональной среднеквадратичному радиусу пакета, хорошо локализованного в пространстве.

Продифференцировав (22) дважды по времени и используя (2I), будем иметь (наличие центральной симметрии для получения (23) не обязательно /6/)

$$\ddot{B}(t) = 8E - \left\{4(D+2)\int U r^{D-1} dr - 4D\int\frac{dU}{d\Phi}|\Psi|^2 r^{D-1} dr\right\}\cdot 2^{D-1}\pi\,, \qquad (23)$$

где D – размерность пространства

или

$$\ddot{B}(t) = \pi 2^{D-1}\left\{8\int|\Psi_r|^2 dV + 4D\left[\int\left(\frac{dU}{d\Phi}\Phi - U\right)dV\right]\right\}. \qquad (23а)$$

Из (23а) следует общий вывод:

I) $U(\Phi) \geqslant 0$, делокализация пакетов спиновых волн имеет место при условии $\frac{dU}{d\Phi}\Phi - U \geqslant 0$;

2) $U(\Phi) < 0$, возможна их самолокализация.

Проиллюстрируем второй случай на ряде примеров.

Пусть $U(\Phi) = -\frac{1}{n}\Phi^n$, тогда формула (23) приобретет вид

$$\ddot{B}(t) = 8E - \frac{4}{n}\left\{D(n-1) - 2\right\}2^{D-1}\cdot\pi\int\Phi^n r^{D-1} dr \equiv 8E + T\,. \qquad (24)$$

<u>Предложение</u>

Стационарная "точка" $\ddot{B}(t) = 0$ является устойчивой, если $E < 0$, а $T > 0$.

Чтобы показать это, сделаем следующую оценку.

Используя интеграл (22б), имеем

$$\int\Phi^n r^{D-1} dr \approx \tilde{\Phi}^{n-1}\cdot N \approx \frac{N^n}{V^{n-1}}\,,$$ где V – объем,

занимаемый локализованным пакетом.

Откуда

$$\ddot{B} \approx 8E + \frac{4\pi}{n}\left(2 - D(n-1)\right)\frac{N^n}{V^{n-1}} \equiv 8E + T\,. \qquad (25)$$

Пусть T = 0, т.е. $D(n-1) - 2 = 0$.

Тогда $B(t) = 4Et^2 + C_1 t + C_2$, где $C_2 = N\langle r_0^2\rangle$, $C_1 = N\frac{d}{dt}\langle r_0^2\rangle$, положим $C_I = 0$*). Таким образом,

$$B(t) = 4Et^2 + C_2\,. \qquad (25а)$$

E = 0 – стационарная точка,

E < 0 – коллапс за время $t_c = \sqrt{\frac{C_2}{4|E|}}$,

<u>E > 0 – неограниченн</u>ое расширение пакета.

---

*) Подчеркнем, что обсуждаемые нами уравнения справедливы при достаточно малой анизотропии $\delta \sim a_0^2$. В противном пределе использование обеих процедур вряд ли можно считать оправданным (см. /2/).

*) Поскольку C_I определяется начальными характеристиками пакета и может быть элементарно учтено.

Стационарная точка E = 0 неустойчива.

<u>Пусть T < 0</u>.

Стационарная точка $\ddot{B}(t) = 0$ есть

$$8E = a\frac{N^n}{V^{n-1}_{(t)}} \quad , \text{где} \quad a = \frac{4\pi}{n}\left(2 - D(n-1)\right), \quad E > 0 .$$

Если в начальный момент $t = 0$ $\ddot{B}(0) > 0$ $(\ddot{B}(0) < 0)$, то в процессе эволюции пакета это неравенство сохраняется в силу того, что

$$\frac{d|T|}{dt} < 0 \ \text{при} \ \ddot{B}(0) > 0 \ \left(\frac{d|T|}{dt} > 0 \ \text{при} \ \ddot{B}(0) < 0\right).$$

Итак, при $\ddot{B}(0) > 0$ происходит неограниченное расширение, а при $\ddot{B}(0) < 0$ – неограниченное сжатие.

<u>Пусть T > 0</u>.

Стационарная точка $\ddot{B}(t) = 0$ есть

$$8E = a\frac{N^n}{V^{n-1}_{(t)}} \quad , \text{где} \quad a = \frac{4\pi}{n}\left(D(n-1) - 2\right), \quad E < 0 .$$

Если $8|E| > T$, начинается локализация, но не коллапс. Это связано с тем, что при локализации T растет и в некоторый момент времени $t_1, \ddot{B}(t_1) = 0$, после чего $\ddot{B}$ станет положительным $(8|E| < T)$. То есть в точке t_1 "ускорение" меняет знак, поэтому в некоторый момент t_2 сжатие пакета сменится расширением.

Это означает, что эта стационарная точка $8|E| = T$ является устойчивой.

Вернемся к уравнению (25), в силу только что доказанного предложения устойчивые стационарные пакеты существуют, если T > 0 или

$$2 - D(n-1) > 0 \quad , \quad 1 < n < 1 + \frac{2}{D} . \tag{26}$$

Это условие в точности совпадает с условием Q – устойчивости стационарных солитонов /5/. Из него также следует, что устойчивыми стационарными пакетами обладает модель (24) при $D = I$, $n = 2$. В остальных моделях этого класса в зависимости от начального состояния пакеты либо коллапсируют, либо раздуваются.

Вернемся к спиновым моделям (19а) и (20а).

Как мы видели выше, бозонизация по ХП правильно описывает взаимодействие спиновых волн только в низшем порядке, т.е. φ^4 по полю.

С другой стороны, в этом порядке существуют стационарные устойчивые состояния только для одномерных моделей. Для $D \geq 2$ мы имеем либо коллапс, либо раздутие пакета, первый процесс заведомо не может соответствовать исходным приближениям: $\frac{|\alpha|^2}{2S} \leq 1$.

Метод СКС приводит к уравнению (9), которое обладает устойчивыми стационарными решениями и не допускает переворота спина в результате нелинейного самосжатия пакета.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность В.Г.Маханькову за обсуждение постановки задачи и её результатов.

<u>Литература</u>

I. V.G.Makhankov, R.Myrzakulov and A.V.Makhankov. Generalized coherent states and the continuous Heisenberg XYZ model with one-ion anisotropy. Physica Scripta, 1987, 35, p.233-237.

2. В.Г.Маханьков, А.В.Маханьков. Спиновые когерентные состояния, преобразования Холстейна-Примакова для моделей Гейзенберга и статус уравнения Ландау-Лифшица. ОИЯИ, PI7-87-295, Дубна, I987.

3. А.В.Маханьков, Х.О.Абдуллоев. О квазиклассическом описании анизотропного магнетика Гейзенберга. ОИЯИ, PI7-87-46I, Дубна, I987.

4. А.М.Косевич, Б.А.Иванов, А.С.Ковалев. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, I983, с.II.

5. В.Г.Маханьков. Солитоны и численный эксперимент. ЭЧАЯ, I983, т.I4, стр.I5I-I53.

6. R.T.Glassey. On the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. Journal of Math. Phys., 1977, v.18, 9, p.1794-1797.

Рукопись поступила в издательский отдел
II марта I988 года.