



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

Ф 20

P17-87-860

Фам Ле Киен

МНОГОФОТОННАЯ N-УРОВНЕВАЯ  
(N-1)-МODOВАЯ СИСТЕМА  
СО СМЕШАННОЙ КОНФИГУРАЦИЕЙ ПЕРЕХОДОВ

Направлено в журнал "Доклады АН СССР"

1987

Большой интерес представляет исследование взаимодействия конечноуровневого атома с конечномодовым полем излучения. Модель Джейнса Каммингса /1/ описывающая взаимодействие двухуровневого атома с одной модой излучения, интенсивно изучалась /2/ в связи с возможностью проверки различных предсказаний на основе экспериментов по одноатомному мазеру. Недавно /3,4/ на основе метода операторных уравнений и характеристического оператора /5,6/ исследованы различные аспекты динамики атома и статистики фотонов в трехуровневых двухмодовых модельных системах /7,8/, а также в N-уровневых (N-1)-модовых системах с конфигурацией типа лямбда /9,10/.

В настоящей работе обобщается метод операторных уравнений и характеристического оператора на многофотонную N-уровневую (N-1)-модовую систему со смешанной конфигурацией переходов. Полученные ниже замкнутая система линейных дифференциальных операторных уравнений с постоянными коэффициентами и соотношение между характеристическим оператором и операторами населенностей уровней позволяют исследовать динамические и статистические свойства системы "атом + излучение".

Рассмотрим гамильтониан

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{j=1}^N \hbar \Omega_j \hat{R}_{jj} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \hbar \omega_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{+} \hat{a}_{\alpha} + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \hbar g_{\alpha} (\hat{R}_{\ell(\alpha)k(\alpha)} \hat{a}_{\alpha}^{m_{\alpha}} + \hat{R}_{k(\alpha)\ell(\alpha)} \hat{a}_{\alpha}^{+m_{\alpha}}),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

описывающий так называемое эффективное многофотонное взаимодействие N-уровневого атома с (N-1)-модовым полем излучения в приближении вращающейся волны. Здесь оператор  $\hat{R}_{jj}$  описывает населенность уровня j с энергией  $\hbar \Omega_j$ , оператор  $\hat{R}_{ij}$  описывает переход атома из уровня j в уровень i (i ≠ j), фотонные операторы  $\hat{a}_{\alpha}$  и  $\hat{a}_{\alpha}^{+}$  описывают соответственно уничтожение и рождение фотона в моде α с частотой  $\omega_{\alpha}$ ;  $g_{\alpha}$  - константы связи. Операторы  $\hat{R}_{ij}$  удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\hat{R}_{ij}, \hat{R}_{pq}] = \hat{R}_{iq} \delta_{pj} - \hat{R}_{pj} \delta_{iq}
 \tag{2}$$

и соотношению линеаризации /5/

$$\hat{R}_{ij} \hat{R}_{pq} = \hat{R}_{iq} \delta_{pj} \quad /3/$$

В модели /1/ атомные переходы  $l(a) \rightarrow k(a)$  ( $k(a) \rightarrow l(a)$ ) осуществляются посредством испускания /поглощения/  $m_a$  фотонов в моде  $a$ . Предполагается, что для любой пары уровней  $(j, i)$  существует единственная последовательность переходов  $j \rightarrow p \rightarrow \dots \rightarrow q \rightarrow i$ , посредством осуществления которых атом может перейти из уровня  $j$  в уровень  $i$ .

Аналогично тому, как сделано в работе /5/, можно найти следующие интегралы движения:

$$\hat{R}_{jj} + \sum_{\substack{\alpha \\ l(a)=j}} m_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} - \sum_{\substack{\beta \\ k(\beta)=j}} m_{\beta} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \hat{a}_{\beta} = \text{const} \equiv \hat{P}_j \quad /4/$$

Здесь  $\Sigma'$  ( $\Sigma''$ ) означает суммирование по модам, связывающим уровень  $j$  с ниже /выше/ расположенными уровнями. Разрешив систему линейных алгебраических уравнений /4/, можно получить для операторов чисел фотонов  $\hat{N}_{\alpha} \equiv \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}$  / $\alpha = 1, \dots, N-1$ / выражения в виде линейных комбинаций операторов населенностей уровней  $\hat{R}_{jj}$  / $j = 1, \dots, N$ / и постоянных операторов  $\hat{P}_j$  / $j = 1, \dots, N$ /:

$$\hat{N}_{\alpha}(t) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{\alpha j} \hat{R}_{jj}(t) + \hat{M}_{\alpha} \quad /5/$$

$$\text{где } \hat{M}_{\alpha} = - \sum_j \mathcal{N}_{\alpha j} \hat{P}_j.$$

Введем теперь вспомогательные операторы

$$\hat{L}_{ij} = \hat{R}_{ij} \prod' g_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\#m_{\alpha}} \quad (i \neq j), \quad \hat{L}_{jj} \equiv \hat{R}_{jj}, \quad /6/$$

где символ  $\prod' g_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\#m_{\alpha}}$  означает произведение фотонных амплитуд  $g_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{m_{\alpha}}$  или  $g_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{+m_{\alpha}}$ , соответствующих последовательности переходов атома из уровня  $j$  в уровень  $i$ . Заметим, что операторы  $\hat{L}_{l(a)k(a)}$  и  $\hat{L}_{k(a)l(a)}$  описывают соответственно элементарные переходы  $k(a) \rightarrow l(a)$  и  $l(a) \rightarrow k(a)$ . Оператор  $\hat{L}_{ij}$  с  $i \neq j$  всегда может быть представлен в виде произведения нескольких операторов элементарных переходов. Постоянные операторы  $\hat{M}_{\alpha}$  коммутируют с операторами  $\hat{L}_{ij}$ . Тогда, с помощью соотношения линеаризации /3/ и соотношения /5/ легко показать, что произ-

ведение оператора  $\hat{L}_{ij}$  с оператором  $\hat{L}_{pp}$ ,  $\hat{L}_{l(a)k(a)}$  или  $\hat{L}_{k(a)l(a)}$  всегда может быть представлено в виде линейной комбинации операторов  $\hat{L}_{i'j'}$  ( $i, j, p, i', j = 1, \dots, N$ ;  $\alpha = 1, \dots, N-1$ ). Коэффициенты такой комбинации являются постоянными операторами или числами. С другой стороны, гамильтониан /1/ можно записать в виде

$$H = \sum_{j=1}^N \hbar \Omega_j \hat{L}_{jj} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \hbar \omega_{\alpha} (\hat{M}_{\alpha} + \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{\alpha j} \hat{L}_{jj}) + \hbar \sum_{\alpha=1}^{N-1} (\hat{L}_{l(a)k(a)} + \hat{L}_{k(a)l(a)}). \quad /7/$$

Поэтому коммутатор  $[\hat{L}_{ij}, H]$  также может быть представлен в виде линейной комбинации операторов  $\hat{L}_{pq}$  и, следовательно, согласно уравнению Гейзенберга, получаем

$$\frac{d}{dt} \hat{L}_{ij}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{L}_{ij}(t), H] = \frac{i}{\hbar} \sum_{p,q=1}^N \mathcal{L}_{ijpq} \hat{L}_{pq}(t), \quad /8/$$

где  $\mathcal{L}_{ijpq}$  - постоянные диагональные операторы. Из /8/ видно, что уравнения движения для операторов  $\hat{L}_{ij}$  образуют замкнутую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Можно разрешить эту систему уравнений стандартными методами, в результате чего получить явные выражения для операторов населенностей уровней  $\hat{R}_{jj}(t) = \hat{L}_{jj}(t)$ . Последние операторы позволяют исследовать временную эволюцию наблюдаемых величин при произвольном начальном состоянии динамической системы. Тем самым разрешена проблема динамики модели /1/ на общем операторном уровне.

Введем теперь характеристический оператор функции распределения фотонов /6/

$$\hat{\chi} = \exp \left[ i \sum_{\alpha=1}^{N-1} \xi_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}(t) \right]. \quad /9/$$

Используя формулы /3/ и /5/, легко получить

$$\hat{\chi} = \exp \left[ i \sum_{\alpha=1}^{N-1} \xi_{\alpha} \hat{M}_{\alpha} \right] \left\{ \sum_{j=1}^N \left[ \exp \left( i \sum_{\beta=1}^{N-1} \xi_{\beta} \mathcal{N}_{\beta j} \right) - 1 \right] \hat{R}_{jj}(t) + 1 \right\}. \quad /10/$$

Зная выражения для  $\hat{R}_{jj}(t)$ , можно получить явное выражение для  $\hat{\chi}$  и вычислить характеристическую функцию, статистические моменты распределения фотонов и функции корреляции между модами по формулам

$$\chi = \langle \hat{\chi} \rangle,$$

$$\langle \hat{N}_a^{k_a} \rangle = \frac{\partial^{k_a}}{\partial (i\xi_a)^{k_a}} \chi (\{\xi = 0\}), \quad /11/$$

$$\langle \hat{N}_{a_1}^{k_1} \dots \hat{N}_{a_n}^{k_n} \rangle = \frac{\partial^{(k_1 + \dots + k_n)}}{\partial (i\xi_{a_1})^{k_1} \dots \partial (i\xi_{a_n})^{k_n}} \chi (\{\xi = 0\}).$$

Тем самым разрешена на уровне операторов проблема статистики фотонов в обобщенной N-уровневой (N-1)-модовой системе с многофотонными переходами и со смешанной конфигурацией переходов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jaynes E.T., Cummings F.W. - Proc. IEEE, 1963, vol.51, p. 89.
2. Yoo H.I., Eberly J.H. - Phys.Rep., 1985, vol.118, p.239.
3. Meschede D., Walther H., Muller G. - Phys.Rev.Lett., 1985, vol.54, p.551.
4. Rempe G., Walther H., Klein N. - Phys.Rev.Lett., 1987, vol.58, p.353.
5. Bogolubov N.N.(Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. - Phys. Lett., 1984, vol.101A, p.201.
6. Bogolubov N.N.(Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. - Phys. Lett., 1985, vol.107A, p.456.
7. Bogolubov N.N.(Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. - J.Phys. (Paris), 1986, vol.47, p.427.
8. Bogolubov N.N.(Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. - Europhys.Lett., 1987, vol.4(3), p.281.
9. Kozierowski M. - J.Phys. B, 1986, vol.19, p.L535.
10. Abdel-Hafez A.M., Obada A.S.F., Ahmad M.M.A. - Phys.Rev., 1987, vol.35A, p.1634.

Рукопись поступила в издательский отдел  
9 декабря 1987 года.

Фам Ле Киен

P17-87-860

Многофотонная N-уровневая (N-1)-модовая система со смешанной конфигурацией переходов

Обобщается метод операторных уравнений и оператора характеристической функции на N-уровневую (N-1)-модовую систему со смешанной конфигурацией переходов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Fam Le Kien

P17-87-860

Multiphoton N-Level (N-1)-Mode System with Combined Configuration of Transitions

The operator equation - and characteristic operator method is developed for the multiphoton N-level (N-1)-mode system with combined configuration of transitions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987