сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-87-693

Л.А.Уварова*

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СОПРЯЖЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

*Калининский политехнический институт

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах /1-3/ решены точно уравнения Максвелла для слоистных структур в плоскопараллельной геометрии и определенным образом поляризованного света. Существенным моментом в постановке задачи было наличие среды с нелинейными свойствами: диэлектрическая проницаемость среды /например, пластинки/ зависела от напряженности электрического поля, как правило, следующим образом: $\epsilon_{i\omega} = \epsilon_{i0}(\omega) - a_i\,|\vec{E}|^2$. Получены соответствующие законы дисперсии. На решениях были построены различные физические характеристики /например, поток, распространяющийся вдоль пластины/. Анализ результатов позволил выявить обусловленные нелинейностью новые, необычные физические свойства таких систем: нелинейные поверхностные поляритоны, "волны, захваченные пластиной", бистабильность и т.п. /см. /1-4/. Представляет интерес распространить этот подход и на среды иной геометрии.

Будем решать сопряженную задачу для тел, подобных друг другу, имеющих центральную или осевую симметрии и расположенных таким образом, чтобы их центры или оси симметрии совпадали. Величины, относящиеся к внутренней фигуре, будем помечать индексом "1", а к внешней фигуре - индексом "2". Будем полагать, что в средах не содержится зарядов. Выделим зависимость от времени в виде множителя $e^{-i\omega t}$. Тогда система уравнений Максвелла для амплитуд напряженностей и индукций электрического и магнитного полей будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{H}_i = -k_{1i}\,\vec{E}_i, \\ &\nabla \times \vec{E}_i = k_2 \vec{H}_i, \\ &\nabla \cdot \vec{D}_i = 0, \\ &\nabla \cdot \vec{B}_i = 0, \end{aligned} \qquad /1/$$

где $k_{1i} = \frac{i\omega}{c}\left(\epsilon_i + i\,\frac{4\pi\sigma_i}{\omega}\right)$, $k_2 = \frac{i\omega}{c}$, $i = 1, 2$. Полагаем далее, что диэлектрическая проницаемость среды зависит от напряженности электрического поля по закону

$$\epsilon_i = \epsilon_{i0} - |\alpha_i|\, \vec{E}_i^2. \qquad /2/$$

Используя стандартные тождества векторного анализа, вместо /1/ получим

$$\Delta \vec{E}_i + k^2 \delta_i (E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) \vec{E}_i = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}_i), \qquad /3/$$

$$\Delta \vec{H}_i + k^2 \delta_i (E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) \vec{H}_i = \nabla k_{1i} \times \vec{E}_i, \qquad /4/$$

$$\nabla \cdot (k_{1i} \vec{E}_i) = 0, \qquad /5/$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, E_{i1}, E_{i2}, E_{i3} - компоненты вектора $\vec{E}_i$ в произвольной ортогональной системе координат. Через δ_i обозначена следующая функция:

$$\delta_i (E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) = \epsilon_{0i} - |\alpha_i|\, \vec{E}_i^2 + i \frac{4\pi\sigma_i}{\omega}. \qquad /6/$$

В общем случае /т.е. при других зависимостях диэлектрической проницаемости от поля/ функция δ_i может быть произвольной кусочно-непрерывной функцией компонентов вектора $\vec{E}_i$.

Найдем такие классы частных точных решений системы /3/-/5/, для которых будет выполнено условие

$$\delta_i (E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) = 0 \qquad /7/$$

Таким образом, из множества всех решений системы /3/-/5/ $\mathfrak{M}$ мы выделим подмножество $\mathfrak{M}_1$, содержащее такие решения, каждое из которых удовлетворяет указанной системе и некоторому дополнительному условию, не противоречащему системе, в данном случае условию /7/. В частности, если δ_1 зависит от компонентов $\vec{E}_i$ согласно формуле /6/, то в подмножество решений векторов электрической напряженности $\mathfrak{M}_1^{(\vec{E})}$ будут входить векторы, удовлетворяющие системе

$$\Delta \vec{E}_i = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}_i), \quad \vec{E}_i^2 = \frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + i \frac{4\pi\sigma_i}{\omega |\alpha_i|}. \qquad /8/$$

При этом подмножество решений векторов магнитной напряженности $\mathfrak{M}_1^{(\vec{H})}$, как это следует из /4/, содержит гармонические решения.

Получим конкретные классы точных решений системы /8/, учитывая равенство тангенциальных составляющих $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ на границе раздела.

2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ /ДВА КУБА С ОБЩИМ ЦЕНТРОМ/

2.1. Первый класс решений. Системе /8/ удовлетворяют векторы с постоянными компонентами. Для того чтобы учесть граничное условие, выделим продольные и поперечные составляющие векторов $\vec{E}_i$. Выделим также действительные и мнимые части этих составляющих:

$$E_{i\parallel} = E^*_{i\parallel} + i E^{**}_{i\parallel}, \quad E_{i\perp} = E^*_{i\perp} + i E^{**}_{i\perp}.$$

Тогда вместо второго уравнения /8/ получим систему

$$\begin{aligned} &(E^*_{i\parallel})^2 - (E^{**}_{i\parallel})^2 + (E^*_{i\perp})^2 - (E^{**}_{i\perp})^2 = \frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|}, \\ &E^*_{i\parallel} E^{**}_{i\parallel} + E^*_{i\perp} E^{**}_{i\perp} = \frac{2\pi\sigma_i}{\omega |\alpha_i|}. \end{aligned} \qquad /9/$$

Нормируем каждую составляющую $E_{i\parallel}$, $E_{i\perp}$ на $\sqrt{\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|}}$ и, вводя обозначение $d_i^2 = \frac{2\pi\sigma_i}{\omega \epsilon_{0i}}$, вместо /9/ получим

$$\begin{aligned} &(\tilde{E}^*_{i\parallel})^2 - (\tilde{E}^{**}_{i\parallel})^2 + (\tilde{E}^*_{i\perp})^2 - (\tilde{E}^{**}_{i\perp})^2 = 1, \\ &\tilde{E}^*_{i\parallel} \tilde{E}^{**}_{i\parallel} + \tilde{E}^*_{i\perp} \tilde{E}^{**}_{i\perp} = d_i^2, \end{aligned} \qquad /10/$$

где $\tilde{E}^*_{i\parallel} = E^*_{i\parallel} \sqrt{\frac{|\alpha_i|}{\epsilon_{0i}}}$, $\tilde{E}^{**}_{i\parallel} = E^{**}_{i\parallel} \sqrt{\frac{|\alpha_i|}{\epsilon_{0i}}}$, $\tilde{E}^*_{i\perp} = E^*_{i\perp} \sqrt{\frac{|\alpha_i|}{\epsilon_{0i}}}$, $\tilde{E}^{**}_{i\perp} = E^{**}_{i\perp} \sqrt{\frac{|\alpha_i|}{\epsilon_{0i}}}$. На границе раздела условия сопряжения имеют вид

$$\tilde E^*_{1\parallel} = \beta \tilde E^*_{2\parallel}, \quad \tilde E^{**}_{1\parallel} = \beta \tilde E^{**}_{2\parallel}, \qquad /11/$$

где $\beta = \left(\frac{\epsilon_{02}|\alpha_1|}{\epsilon_{01}|\alpha_2|}\right)^{1/2}$. С помощью /10/-/11/ получим следующие формулы:

$$E^*_{1\parallel} = E^*_{2\parallel} = \sqrt{\frac{\epsilon_{02}}{|\alpha_2|}}\, \tilde E^*_{2\parallel},$$

$$E^{**}_{1\parallel} = E^{**}_{2\parallel} = \sqrt{\frac{\epsilon_{02}}{|\alpha_2|}}\, E_{2\parallel}, \qquad /12/$$

$$E^*_{1\perp} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_{01}}{|\alpha_1|}}\,[1 + \beta^2(\tilde E^{**}_{2\parallel})^2 - (\tilde E^*_{2\parallel})^2 + ((1 + \beta^2(\tilde E^{**}_{2\parallel})^2 - \beta^2(\tilde E^*_{2\parallel})^2)^2 + 4(d_1^2 - \beta^2 \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel})^2)^{1/2}]^{1/2},$$

$$E^*_{2\perp} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\epsilon_{02}}{|\alpha_2|}}\,[1 + (\tilde E^{**}_{2\parallel})^2 - (E^*_{2\parallel})^2 + ((1 + (E^{**}_{2\parallel})^2 - (\tilde E^*_{2\parallel})^2)^2 + 4(d_2^2 - \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel})^2)^{1/2}]^{1/2}, \qquad /13/$$

$$E^{**}_{1\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon_{01}}{|\alpha_1|}}\;\frac{d_1^2 - \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel}\beta^2}{\tilde E^*_{1\perp}}, \qquad /12'/$$

$$E^{**}_{2\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon_{02}}{|\alpha_2|}}\;\frac{d_2^2 - \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel}}{\tilde E^*_{2\perp}}. \qquad /13'/$$

Здесь $\tilde E^*_{2\parallel}$, $\tilde E^{**}_{2\parallel}$ - свободные параметры. Из условия неотрицательности подкоренного выражения в /12/ следует ограничение на выбор свободных параметров, β и d_1, требуемое для реализации полученных решений. При выводе /12/ полагалось, что $\tilde E^*_{1\perp}$. Если эти условия /или одно из них/ не выполнены, то вместо /12/-/13'/ приходим к следующим результатам:

а/ $\tilde E^*_{2\perp} = 0$, $\tilde E^*_{1\perp} \neq 0$, тогда $E^*_{1\perp}$, $E^{**}_{1\perp}$ определяются по /12/, /12'/, а $E^{**}_{2\perp}$ - по формуле

$$E^{**}_{2\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon_{02}}{|\alpha_2|}}\,((\tilde E^*_{2\parallel})^4 - (\tilde E^*_{2\parallel})^2 - d_1^4)^{1/2}(\beta \tilde E^*_{2\parallel})^{-1}; \qquad /15/$$

б/ $\tilde E^*_{1\perp} = 0$, $\tilde E^*_{2\perp} \neq 0$, тогда $E^*_{2\perp}$, $E^{**}_{2\perp}$ определяются согласно /13/, /13'/, а $E^{**}_{1\perp}$, $E^{**}_{2\parallel}$ - по формулам /16/-/16'/:

$$E^{**}_{1\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon_{01}}{|\alpha_1|}}\,(\beta^4(\tilde E^*_{2\parallel})^4 - \beta^2(\tilde E^*_{2\parallel})^2 - d_1^4)^{1/2}(\beta \tilde E^*_{2\parallel})^{-1}, \qquad /16/$$

$$\tilde E^{**}_{2\parallel} = d_1^2(\beta \tilde E^*_{2\parallel})^{-1}; \qquad /16'/$$

в/ $\tilde E^*_{1\perp} = \tilde E^*_{2\perp} = 0$, тогда $E^{**}_{2\perp}$, $E^{**}_{1\perp}$ определяются по формулам /15/ и /16/ соответственно, а $\tilde E^{**}_{2\parallel}$ - по одной из формул /15/ или /16/, причем должно выполняться условие $d_1 = \beta d_2$.

Ниже будут рассмотрены классы точных решений в цилиндрической, сферической, тороидальной системах координат. Поэтому отметим попутно, что векторы, компоненты которых в соответствующей системе координат получаются из найденных здесь /при некотором произволе деления $E_{i\parallel}$ на две составляющих, т.е. $E_{ix} = a_i E_{i\parallel}$, $E_{iy} = \sqrt{1 - a_i^2}\, E_{i\parallel}$) путем преобразования R_3^+ удовлетворяют и граничным условиям в цилиндрической системе координат при тех же ограничениях на физические параметры /причем $a_1 = a_2$/, а в сферической и тороидальной системах координат требуется еще дополнительное условие, которое в принятых здесь обозначениях запишется в виде

$$\tilde E^*_{1\perp} = \beta \tilde E^*_{2\perp}, \quad \tilde E^{**}_{1\perp} = \beta \tilde E^{**}_{2\perp}.$$

Из условий /12'/, /13'/ и /12/, /13/ получим соответственно два ограничения на параметры задачи:

$$d_1^2 = \beta(d_2^2 - \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel}) + \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel}\beta^2,$$

$$(1 - \beta^2)(1 - (\tilde E^*_{2\parallel})^2) = \beta^2[(1 + (\tilde E^{**}_{2\parallel})^2 - (\tilde E^*_{2\parallel})^2)^2 + 4(d_2^2 - \tilde E^*_{2\parallel}\tilde E^{**}_{2\parallel})^2]^{1/2} - [(1 + (\tilde E^{**}_{2\parallel})^2\beta^2 - (\tilde E^*_{2\parallel})^2\beta^2)^2 + 4(d_1^2 - \beta^2 E^*_{2\parallel}E^{**}_{2\parallel})^2]^{1/2}.$$

В частности, если среда непроводящая, то $\tilde{E}^{**}_{i\parallel} = \tilde{E}^{**}_{i\perp} = 0$ и $\beta = 1$. Если $E_{i\perp} = 0$, то из /14/, /16/ найдем

$$d_2^2 = E^*_{2\parallel}(1+\beta)^{-1/2}(1-(1+\beta)(E^*_{2\parallel})^2)^{1/2} .$$

2.2. Второй класс решений. Системе /8/ при определенных значениях параметров a_{ij} и κ_j удовлетворяют решения

$$E_{ij} = a_{ij}\, e^{\vec{\kappa}\vec{r}} + \gamma_{ij}, \quad \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = 0, \quad j = x, y, z.$$

Величины a_{ij}, κ_j находятся из следующей системы уравнений

$$a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2 = 0, \quad \vec{a}_i \vec{\kappa}_i = \vec{a}_i \vec{\kappa}_i = 0, \quad a_{1x}^2 + a_{1y}^2 = a_{2x}^2 + a_{2y}^2,$$

$$a_{1x}\gamma_{1x} + a_{1y}\gamma_{1y} = a_{2x}\gamma_{2x} + a_{2y}\gamma_{2y}$$

и оказываются равными

$$a_{1j} = a_{2j}, \quad \bar{a}_{ix} = \bar{\kappa}_x, \quad a_{iy} = \bar{\kappa}_y,$$

$$\bar{\kappa}_y = (-\gamma_{2y}\gamma_{2z} \pm (\gamma_{2y}^2\gamma_{2z}^2 - \gamma_{2x}^2\gamma_{2y}^2 - \gamma_{2x}^4)^{1/2})\,\gamma_{2x}^{-2},$$

$$\bar{\kappa}_x = -(\bar{\kappa}_y\gamma_{2y} - \gamma_{2z})\,\gamma_{2x}^{-1}, \quad \gamma_{2x} \neq 0,$$

$$\gamma_{1y} = \bar{\kappa}_y\gamma_{2z} \pm \bar{\kappa}_x\left(-\frac{\epsilon_{i0}}{|\alpha_i|} - i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega|\alpha_i|}\right)^{1/2},$$

где $\bar{\kappa}_x = \dfrac{\kappa_x}{\kappa_z}$, $\bar{\kappa}_y = \dfrac{\kappa_y}{\kappa_z}$, $\bar{a}_{ix} = \dfrac{a_{ix}}{a_{2z}}$, $\bar{a}_{iy} = \dfrac{a_{iy}}{a_{2z}}$, γ_{ix}, γ_{iy} - проекции продольных составляющих $E_{i\parallel}$, найденных в предыдущем классе, $\gamma_{iz} = E_{i\perp}$. В этом классе выполняется также условие $\gamma_{1z} = \gamma_{2z}$, приводящее к дополнительному ограничению на параметры задачи. Если $\gamma_{2x} = 0$, то $\gamma_{2y} \neq 0$, и значения $\bar{\kappa}_y$, $\bar{\kappa}_x$ получаются из приведенных выше путем замены индекса x на y и наоборот.

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ /ДВА СООСНЫХ ЦИЛИНДРА/

3.1. Первый класс решений. Будем полагать, что все компоненты E_{ij} зависят только от r. В этом случае проекция уравнения /3/ вырождается во второе условие системы /8/, поэтому приведенное здесь точное решение является и единственным решением /3/:

$$E_{ir} = \left(\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega|\alpha_i|} - E_{i\phi}^2 - E_{iz}^2\right)^{1/2},$$

$$E_{i\phi} = D_{i1}r + D_{i2}r^{-2}, \quad E_{iz} = D_{i3}.$$

Учитывая равенство тангенциальных составляющих $E_{i\phi}$, E_{ir} на границе раздела областей и ограниченность $E_{i\phi}$, E_{ir} при $r = 0$, получим следующие значения для постоянных D_{11}, D_{12}, D_{13}:

$$D_{11} = D_{21} + D_{23}R^{-2}, \quad D_{12} = 0,$$

$$D_{13} = \left(\frac{\epsilon_{10}}{|\alpha_1|} - \frac{\epsilon_{20}}{|\alpha_2|} + i\frac{4\pi}{\omega}\left(\frac{\sigma_1}{|\alpha_1|} - \frac{\sigma_2}{|\alpha_2|}\right)\right)^{1/2}.$$

Здесь через R обозначен радиус внутреннего цилиндра. Интересно отметить, что при $\dfrac{\sigma_1}{|\alpha_1|} = \dfrac{\sigma_2}{|\alpha_2|}$ проводимость среды влияет только на E_{ir}.

3.2. Второй класс решений. Будем полагать, что компоненты $\vec{E}_i$ зависят от r и z. В этом случае из проекции первого уравнения /8/ на орт $\vec{e}_\phi$ найдем

$$E_{i\phi} = \sum_\nu F_i^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)} r)\, v(\lambda^{(\nu)} z),$$

где

$$F_i^{(\nu)}(\rho) = C_{i1}^{(\nu)} J_1(\rho) + C_{i2}^{(\nu)} Y_1(\rho), \quad v(\ ) = e^{\pm\zeta},$$

$J_1(\rho)$, $Y_1(\rho)$ - функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно, $\lambda^{(\nu)}$ - корни соответствующего уравнения, полученного с помощью условия на внешней границе рассматриваемой системы цилиндров, ν - номер корня, $C_{12}^{(\nu)} = 0$,

$$C_{11}^{(\nu)} = C_{22}^{(\nu)}\frac{Y_1(\lambda^{(\nu)} R)}{J_1(\lambda^{(\nu)} R)} + C_{21}^{(\nu)}.$$

Две других проекции первого из уравнений /8/ приводят к одному и тому же условию

$$E_z = \frac{\partial}{\partial z} \int E_r \partial r + K. \qquad /17/$$

Учитывая далее второе из уравнений /8/ и выражение /17/, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \int E_{ir} \partial r + K_i\right)^2 + E_{ir}^2 = f_i^2. \qquad /18/$$

Обозначим

$$Y_i = \int E_{ir} \partial r, \quad f_i = \left(\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega|\alpha_i|} - E_{i\phi}^2\right)^{1/2}.$$

Тогда вместо /18/ получим следующее уравнение

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial z} + K_i\right)^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)^2 = f_i^2. \qquad /19/$$

Уравнение /19/ является уравнением Гамильтона плоского движения точки с потенциальной функцией $W_i = \frac{E_{i\phi}^2}{2}$:

$$\frac{p_i^2 + q_i^2}{2} + W_i = \mathrm{const}_i,$$

где

$$p_i = \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial r}, \quad q_i = \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t}, \quad \tilde{V}_i = V_i + K_i z,$$

$$\mathrm{const}_i = \frac{\epsilon_{0i}}{2|\alpha_i|} + i\frac{2\pi\sigma_i}{\omega|\alpha_i|}.$$

Уравнение /19/ приводится к квазилинейному уравнению вида

$$\sqrt{f_i^2 - E_{ir}^2}\,\frac{\partial E_{ir}}{\partial z} + E_{ir}\frac{\partial E_{ir}}{\partial r} - f_i U_i = 0,$$

где

$$U_i = -\frac{E_{i\phi}}{f_i} \sum_\nu \lambda_\nu F'_{i\rho}(\lambda^{(\nu)} r)\, v(\lambda^{(\nu)} z), \quad \rho = \lambda^{(\nu)} r.$$

Тогда E_{ir} определятся из системы

$$\chi_i(\Phi_{1i}(r, z, E_{ir}),\ \Phi_{2i}(r, z, E_{ir})) = 0,$$

где χ_i - произвольные функции, а Φ_{ji} - общие интегралы системы

$$\frac{dr}{E_{ir}} = \frac{dz}{\sqrt{f_i^2 - E_{ir}^2}} = \frac{dE_{ir}}{f_i U_i}.$$

На границе раздела областей должно выполняться условие равенства E_r- или E_z-составляющих /в зависимости от направления падающего луча/.

4. СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ /СИСТЕМА КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР/

4.1. Первый класс решений. Полагая, что все компоненты E_{ji} зависят только от r, получим единственное решение /3/:

$$E_{ir} = \left(\frac{1}{2}\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|}\right) + \frac{16\pi^2\sigma_i^2}{\omega^2|\alpha_i|^2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} +$$

$$+ i\left(-\frac{1}{2}\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|}\right)^2 + \frac{16\pi^2\sigma_i^2}{\omega^2|\alpha_i|^2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}.$$

Компоненты $E_{i\theta}$, $E_{i\phi}$ равны нулю.

4.2. Второй класс решений. В этом классе рассматривается зависимость компонентов векторов от r и θ. Подобно классу решений 3.2, в данном случае выявляется, что две проекции первого из уравнений /8/ /а именно, проекции на орты $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\theta$ / вырождаются в одно уравнение. Учитывая далее второе из уравнений /8/, получим следующие решения:

$$E_{i\phi} = \sum_\nu F_i^{(\nu)}(r)\, P_\nu^{(1)}(\cos\theta),$$

$$E_{ir} = f_i \cos\psi_i, \quad E_{i\theta} = f_i \sin\chi_i,$$

$$F_i^{(\nu)}(r) = A_{i1}^{(\nu)} r^{\frac{m-1}{2}} + A_{i2}^{(\nu)} r^{-\frac{1+m}{2}}, \quad m = (1 + 4\nu(\nu+1))^{1/2},$$

$$A_{12}^{(\nu)} = 0, \quad A_{11}^{(\nu)} = A_{21}^{(\nu)} + A_{22}^{(\nu)} R^{-m}.$$

Через ψ_i обозначены функции, определяемые из уравнений

$$\chi_i(\Phi_{1i}(r, \theta, \psi_i), \quad \Phi_{2i}(r, \theta, \psi_i)) = 0,$$

в которых χ_i - произвольные функции, Φ_{1i}, Φ_{2i} - общие интегралы системы

$$\frac{dr}{r f_i \cos\psi_i} = \frac{d\theta}{f_i \sin\psi_i} = \frac{d\psi_i}{U_{1i}\cos\psi_i - U_{2i} r \sin\psi_i + \kappa_i},$$

где

$$U_{1i} = -f_i^{-1} E_{i\phi} \sum_\nu F_i^{(\nu)}(r) P_\nu^{(1)}(\cos\theta)(P_\nu^{(1)}(\cos\theta))'_\theta,$$

$$U_{2i} = -(2f_i)^{-1} E_{i\phi} \sum_\nu P_\nu^{(1)}(\cos\theta)((m-1) A_{i1}^{(\nu)} r^{\frac{m-3}{2}} - (m+1) A_{i2}^{(\nu)} r^{-\frac{5+m}{2}}),$$

$$\kappa_i = K_i r^2 \sin\theta - f_i \sin\psi_i .$$

На границе раздела выполняется условие

$$f_1 \sin\psi_1|_R = f_2 \sin\psi_2|_R.$$

5. ТОРОИДАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ /ДВА СООСНЫХ ТОРА/

В тороидальной системе координат удается получить класс точных решений, если рассматривать зависимость E_{ji} от τ и σ. В этом случае /аналогично классам 3.2 и 4.2/ из двух проекций первого из уравнений /8/ получится один и тот же результат

$$E_{i\tau} = \frac{1}{ch\tau - \cos\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\int E_{i\sigma}(ch\tau - \cos\sigma)\partial\sigma + F_i(s, \tau)\right].$$

Учитывая второе из уравнений /8/, для $E_{i\sigma}$, $E_{i\tau}$ получим

$$E_{i\sigma} = f_i \sin\psi_i, \quad E_{i\tau} = f_i \cos\psi_i .$$

Через ψ_i обозначены функции, определяемые из уравнений

$$\chi_i(\Phi_{1i}(\sigma, \tau, \psi_i), \quad \Phi_{2i}(\sigma, \tau, \psi_i)) = 0,$$

в которых χ_i - произвольные функции, а Φ_{1i}, Φ_{2i} - общие интегралы системы

$$\frac{d\tau}{S_i \cos\psi_i} = \frac{d\sigma}{S_i \sin\psi_i} = \frac{d\psi_i}{U_{1i}\cos\psi_i - U_{2i}\sin\psi_i + F_{1i}(\sigma,\tau)},$$

где

$$S_i = f_i(ch\tau - \cos\sigma), \quad U_{1i} = S'_{i\tau}, \quad U_{2i} = S'_{i\sigma},$$

$$E_{i\phi} = \frac{v_i\, sh\tau}{ch\tau - \cos\sigma}.$$

Функция $v_i(\tau, \sigma)$ находится из уравнения Лапласа в тороидальных координатах [5]. Через F_i, F_{1i} обозначены величины

$$F_i = K_i(ch\tau\, sh\tau\,\sigma - sh\tau \sin\sigma), \quad F_{1i} = F'_{i\sigma}.$$

На границе раздела выполнены условия

$$V_1 = V_2, \quad E_{1\sigma} = E_{2\sigma}.$$

6. ПОЛУЧЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Можно также получить классы приближенных решений, налагая некоторые ограничения на размеры области, в которой интегрируется уравнение /3/, и следующее дополнительное условие вместо /7/:

$$\delta_i(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) = \epsilon_{0i} c_i, \qquad /20/$$

где c_i - постоянные. В этом случае подмножество решений векторов магнитной напряженности $\mathfrak{M}_1^{(\vec{H})}$ содержит решения уравнения Гельмгольца. Приведем примеры приближенных решений для $\vec{E}_i$.

6.1. Цилиндрическая система координат. Рассматриваем зависимость от r и z. Решения имеют вид

$$E_{ir} = \pm\sqrt{\lambda}\, M_i J_1(\sqrt{\lambda + k^2 c_i}\; r) e^{\pm\sqrt{\lambda}\, z},$$

$$E_{iz} = - M_i J_0(\sqrt{\lambda + k^2 c_i}\; r) e^{\pm\sqrt{\lambda}\, z},$$

$$E_{i\phi} = M_i J_1(\sqrt{\lambda + k^2 c_i}\; r) e^{\pm\sqrt{\lambda}\, z}.$$

Постоянные c_i равны

$$c_i = \frac{\dfrac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + i\dfrac{4\pi\sigma_i}{\omega|\alpha_i|} - M_i^2\lambda}{k^2 M_i^2 + \dfrac{\epsilon_{0i}}{|\alpha_i|} + i\dfrac{4\pi\sigma_i}{\omega|\alpha_i|}}. \qquad /21/$$

Постоянная M_1 определяется из равенства $E_{1\phi} = E_{2\phi}$ и $E_{1r} = E_{2r}$ на границе раздела и равна

$$M_1 = M_2 c_2 c_1^{-1} J_1(\sqrt{\lambda + k^2 c_2}\, R)\,(J_1(\sqrt{\lambda + k^2 c_1}\, R))^{-1}. \qquad /22/$$

Из /21/-/22/ следует, что M_1 и c_1 определяются в системе. Если из физического смысла задачи следует, что надо приравнивать E_z-компоненты, то получаем дополнительное условие на физические константы системы. Размеры областей /для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ / ограничиваются неравенствами

$$\sqrt{\lambda}\,|z| \le \sqrt{\lambda}\,|z_0| \ll 1, \quad (\lambda + k^2 c_i) r \le (\lambda + k^2 c_i) r_{i0} \ll 1.$$

6.2. Сферическая система координат. Полагаем, что компоненты векторов E_i зависят от r и ϕ. Решения имеют вид

$$E_{i\theta} = N_i \Phi_i(k\sqrt{c_i}\, r)\cos\phi, \quad E_{i\phi} = - N_i \Phi_i(k\sqrt{c_i}\, r)\sin\phi, \quad E_{ir} = 0,$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\cos\zeta}{\zeta^2} - \frac{\sin\zeta}{\zeta^3} + \frac{\sin\zeta}{\zeta}.$$

Постоянные c_i, N_1 равны

$$c_i = 1 - \frac{|\alpha_i| N_i^2}{\epsilon_{0i}} + i\frac{4\pi\sigma_i}{\omega\epsilon_{0i}},$$

$$N_1 = N_2 \Phi_2(k\sqrt{c_2}\, R)\,(\Phi_1(k\sqrt{c_1}\, R))^{-1}.$$

Размеры областей /при $\sigma_i = 0$ / ограничиваются радиусами r_{i0}, такими, что $r_{i0}\, k\sqrt{c_i} \ll 1$.

7. ОДИН ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Если проводимости σ_1 и σ_2 равны нулю и векторы $\vec{E}_i$ вещественны, то полученные приближенные решения обладают одним общим свойством: плотность их электрической энергии постоянна. Рассмотрим поэтому тепловую задачу для системы концентрических сфер, полагая, что плотности тепловых источников постоянны и равны /с учетом /23//

$$q_i = \frac{\epsilon_{0i}^2 c_i (1 - c_i)}{8\pi|\alpha_i|}.$$

Рассмотрим сферически-симметричную квазистационарную задачу

$$\nabla\cdot(\tilde{\kappa}_i \nabla T_i) = - q_i / \kappa_{i0} \qquad /24/$$

$$T_2(R_1) = T_0,\ T_1(R) = T_2(R),\ -\kappa_1 \nabla T_1|_R = -\kappa_2 \nabla T_2|_R, \qquad /25/$$

где

$$\tilde{\kappa}_i = \kappa_i \kappa_{i0}^{-1}.$$

Решение /24/-/25/ имеет вид

$$\int_{T_S}^{T} \tilde{\kappa}_1(T)\,dT = \frac{q_1}{6\kappa_{10}}(R^2 - r^2), \quad r \le R,$$

$$\int_{T_0}^{T} \tilde{\kappa}_2(T)\,dT = \frac{R}{r}\,\frac{R_1 - r}{R_1 - R}\Big[\int_{T_0}^{T_S} \tilde{\kappa}_2(T)\,dT - \frac{q_2}{6\kappa_{20}}(R_1^2 - R^2)\Big] + \frac{q_2(R^2 - r^2)}{6\kappa_{20}};$$

где $T_S = T_1(R)$ находится из условия

$$\frac{(q_1 - q_2)R}{3} = \frac{\kappa_{20} R_1}{R(R_1 - R)} \int_{T_0}^{T_S} \tilde{\kappa}_2(T)\, dT - \frac{q_2(R_1 - R)R_1}{6R}. \qquad /26/$$

Из выражения для плотности теплового потока следует, что при $|a_1| \ll |a_2|$ и $c_1 \sim c_2$ плотность q_2 значительно превышает q_2. В этом случае в формуле /26/ можно пренебречь величиной $\frac{q_2 R}{3}$, и температура T_S может оказаться достаточно высокой. Если к тому же $\kappa_1 \gg \kappa_2$, то внутренняя частица будет прогрета равномерно.

Таким образом, меняя граничные условия и физические константы, в нелинейных средах можно получить как окна прозрачности /п.п. 2-5/, так и значительную концентрацию энергии в малых объемах /п.п. 6-7/.

Я признательна В.К.Федянину за обсуждение деталей работы и ценные конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fedyanin V.K., Mihalache D. - Z.Phys.B., 1982, 47, p.167-173.
2. Михалаке Д., Федянин В.К. - ТМФ, 1983, 54, 3, с.443-455.
3. Mihalache D., Nazmitdinov R.G., Fedyanin V.K. - Physica Scripta, 1984, 29, p.269-275.
4. Михалаке Д., Федянин В.К. - В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 5-85, Дубна: ОИЯИ, 1985, с.5-10.
5. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, т.2, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 сентября 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Уварова Л.А. P17-87-693
Некоторые точные решения для вектора напряженности электрического поля в сопряженных нелинейных средах

Получены классы частных точных решений нелинейных уравнений Максвелла, записанных для сред, диэлектрическая проницаемость которых зависит от поля по следующему закону: $\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{0i}(\omega) - a_i \vec{E}_i^2$, $i = 1, 2$. Решения получены для следующих систем: два куба с общим центром, два соосных цилиндра, две концентрических сферы, два соосных тора. Характерной особенностью полученных решений является постоянство величин $\vec{E}_i^2$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Uvarova L.A. P17-87-693
Some Exact Solutions for the Vector of the Electric Field Strength in the Conjugate Nonlinear Medium

Particular exact solutions of the nonlinear Maxwell equation are derived for media the dielectric constant of which depends on the electric field by the law: $\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{i0}(\omega) - a_i \vec{E}_i^2$, $i = 1, 2$. The solutions are obtained for the following systems: two cubes with a common centre, two coaxial cylinders, two concentric spheres and two coaxial tori. A specific feature of the obtained solutions is the constancy of $\vec{E}_i^2$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987