объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-87-461

Х.О.Абдуллоев*, А.В.Маханьков

О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ АНИЗОТРОПНОГО МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Направлено в журнал "ДАН ТаджССР"

*Таджикский государственный университет, Душанбе

1987

Данная работа является продолжением серии работ по исследованию особенностей классического поведения квантовых статистических моделей /I/-/2/. В предыдущих работах были рассмотрены различные типы процедуры сведения, была подчеркнута важность анализа симметрии как гамильтониана, так и основного состояния квантовой системы, а также показано, что применение различных процедур сведения к исходной квантовой системе приводит к разным классическим моделям. Ниже мы рассмотрим возможность их соответствия на примере легкоосной модели Гейзенберга.

I. Итак, имеем

$$\hat{H} = -\frac{1}{4}\sum_j J\left(\hat{S}_j^+\hat{S}_{j+1}^- + \hat{S}_j^-\hat{S}_{j+1}^+\right) - \frac{1}{2}\sum \tilde{J}\,\hat{S}_j^z\hat{S}_{j+1}^z . \qquad (I)$$

Покажем, что модель Гейзенберга (I) в случае $J=\tilde{J}$ (изотропном) имеет $SU(2)$ симметрию. Для этого нужно, чтобы $\hat{H}$ был инвариантен относительно преобразования $R\in SU(2)$, то есть

$$R^{-1}\hat{H}R = \hat{H} , \qquad (2)$$

где в общем случае

$$R = \prod_{j=1}^{N} e^{i(\theta_x\hat{S}_j^x + \theta_y\hat{S}_j^y + \theta_z\hat{S}_j^z)} = e^{i\vec{\theta}\,\vec{\hat{S}}_j} . \qquad (3)$$

Запишем исходный гамильтониан (I) в виде

$$\hat{H} = \sum_j\left(\hat{S}_j^x\hat{S}_{j+1}^x + \hat{S}_j^y\hat{S}_{j+1}^y + \hat{S}_j^z\hat{S}_{j+1}^z\right) \equiv \sum_j \hat{H}_j , \qquad (4)$$

при малых θ (2) сводится к условию

$$[\hat{H}, \ell] = 0 , \qquad (5)$$

где $$\ell = \sum_{j=1}^{N}\vec{\theta}\,\vec{\hat{S}}_j .$$

Рассмотрим один член в (5), соответствующий повороту вокруг оси OY,:

$$i\theta_y\Big[\hat{H}, \sum_{j=1}^{N}\hat{S}_j^y\Big] = i\theta_y\Big[\sum_{j=1}^{N}\hat{H}_j, \sum_{j=1}^{N}\hat{S}_j^y\Big] . \qquad (6)$$

$\hat{H}_j$ содержит спиновые операторы в двух соседних узлах, поэтому в $\sum \hat{S}^y_i$ следует оставить члены, соответствующие тем же узлам. В результате (6) разобьется в сумму коммутаторов вида

$$\left[\left(\hat{S}^x_j \hat{S}^x_{j+1} + \hat{S}^y_j \hat{S}^y_{j+1} + \hat{S}^z_j \hat{S}^z_{j+1}\right), \left(\hat{S}^y_j + \hat{S}^y_{j+1}\right)\right]. \tag{7}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}\left[(\vec{S}_j \vec{S}_{j+1}), \hat{S}^y_j\right] &= \vec{S}_j \vec{S}_{j+1} \hat{S}^y_j - \hat{S}^y_j \vec{S}_j \vec{S}_{j+1} = \\ &= \vec{S}_{j+1} \vec{S}_j \hat{S}^y_j - \hat{S}^y_j \vec{S}_j \vec{S}_{j+1},\end{aligned} \tag{8}$$

аналогично

$$\left[(\vec{S}_j \vec{S}_{j+1}), \hat{S}^y_{j+1}\right] = \vec{S}_j \vec{S}_{j+1} \hat{S}^y_{j+1} - \hat{S}^y_{j+1} \vec{S}_{j+1} \vec{S}_j, \tag{9}$$

теперь, сложив (8) и (9), получим

$$\begin{aligned}&\left[(\vec{S}_j \vec{S}_{j+1}), \hat{S}^y_j\right] + \left[(\vec{S}_j \vec{S}_{j+1}), \hat{S}^y_{j+1}\right] = \\ &= \vec{S}_{j+1} \vec{S}_j \hat{S}^y_j + \vec{S}_j \vec{S}_{j+1} \hat{S}^y_{j+1} - \hat{S}^y_j \vec{S}_j \vec{S}_{j+1} - \hat{S}^y_{j+1} \vec{S}_{j+1} \vec{S}_j = \\ &= \hat{S}^x_{j+1}[\hat{S}^x_j, \hat{S}^y_j] + \hat{S}^x_j[\hat{S}^x_{j+1}, \hat{S}^y_{j+1}] + \hat{S}^z_{j+1}[\hat{S}^z_j, \hat{S}^y_j] + \hat{S}^z_j[\hat{S}^z_{j+1}, \hat{S}^y_{j+1}].\end{aligned} \tag{10}$$

Из последнего равенства в выражении (10) видно, что поскольку

$$\hat{S}^x_{j+1}[\hat{S}^x_j, \hat{S}^y_j] = -\hat{S}^z_j[\hat{S}^z_{j+1}, \hat{S}^y_{j+1}]$$

и

$$\hat{S}^x_j[\hat{S}^x_{j+1}, \hat{S}^y_{j+1}] = -\hat{S}^z_{j+1}[\hat{S}^z_j, \hat{S}^y_j]$$

, сумма равна нулю. Аналогично можно проверить, что коммутаторы, соответствующие поворотам вокруг осей OX и OZ, также равны нулю, т.е. изотропная модель Гейзенберга обладает $SU(2)$ симметрией.

2. Вернемся к некоторым результатам работ /1/-/2/. Рассмотрим полученные там с помощью двух разных процедур сведения классические модели (будем рассматривать легкоосный случай $\Delta > 0$):

$$\frac{i\dot{\alpha}}{JSa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha - \alpha|\alpha|^2\left(\mathbb{G} - \mathbb{K}|\alpha|^2\right) + \mathbb{B}\left(\bar{\alpha}_{xx}\alpha^2 - \bar{\alpha}\alpha_x^2 + 2\alpha|\alpha_x|^2\right),$$

$$\mathbb{G} = -\frac{\Delta}{S} + \frac{1}{4S^2a_0^2} + \frac{1}{16S^3a_0^2} \tag{11}$$

$$\mathbb{K} = \frac{3}{16S^3a_0^2}$$

$\mathbb{B} = \frac{1}{2S}$, где a_0 – расстояние между узлами решетки,

$$i\Psi_t = \Psi_{xx} - 2\bar{\Psi}\frac{\Psi_x^2}{1+|\Psi|^2} + \Delta\frac{|\Psi|^2-1}{|\Psi|^2+1}\Psi. \tag{12}$$

Формула (11) получается из исходной квантовой модели Гейзенберга с помощью преобразований Холштейна-Примакова, упорядочения бозе-операторов и перехода к С-числам посредством глауберовских когерентных состояний:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{13}$$

Уравнение (12) есть результат непосредственного применения к (1) спиновых когерентных состояний (СКС):

$$|\Psi_j\rangle = (1+|\Psi_j|^2)^{-S} \cdot e^{\Psi_j \hat{S}^+_j}|S,-S\rangle. \tag{14}$$

Подробное описание СКС можно найти в /3/.

Для более наглядного сравнения этих моделей в формуле (12) перейдем от Ψ к α, т.е. сделаем подстановку

$\Psi \to \frac{\alpha}{\sqrt{2S}}$. Модель (12) приобретает вид:

$$\frac{i\dot{\alpha}}{JSa_0} = \alpha_{xx} - 2\bar{\alpha}\frac{\alpha_x^2}{2S+|\alpha|^2} + \Delta\frac{|\alpha|^2-2S}{|\alpha|^2+2S}\alpha. \tag{15}$$

Сравнивая (11) и (15), можно сказать, что эти модели различны, и в общем случае имеется совпадение только в линейном приближении. Рассмотрим их более подробно. Представив (15) в виде ряда по $|\alpha|^2/2S$, а в формуле (11) раскрыв скобки, получим более удобный для изучения вид:

(ХП) $$\frac{i\dot{\alpha}}{JSa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha + \frac{\alpha|\alpha|^2}{S}\left(\Delta - \frac{1}{4Sa_0^2}\right) + \frac{3}{8Sa_0^2}\cdot\frac{\alpha|\alpha|^4}{2S^2} + \frac{\alpha|\alpha_x|^2}{S} - \frac{\bar{\alpha}\alpha_x^2}{2S} + \frac{\bar{\alpha}_{xx}\alpha^2}{2S} \tag{15.a}$$

(СКС) $$\frac{i\dot{\alpha}}{JSa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha + \Delta\frac{\alpha|\alpha|^2}{S}\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{2S}\right) - \frac{\bar{\alpha}\alpha_x^2}{S}. \tag{15.в}$$

Обратим внимание, что в (15.а)(ХП) при первом неисчезающем члене взаимодействия коэффициент содержит разность$\left(\Delta - \frac{1}{4Sa_0^2}\right)$, где первый член соответствует основному приближению, а второй член возникает из упорядочения бозе-операторов.

Видно, что даже при $\Delta > 0$ локализация спиновых волн может смениться их делокализацией, следовательно, система типа легкой оси может перейти в систему типа легкой плоскости в точке $\Delta = \frac{1}{4 S a_0^2}$ (назовем ее критической), т.е.

$$\Delta a_0^2 < \frac{1}{4S} \quad \text{или} \quad \delta < \frac{1}{4S}. \tag{I6}$$

Это, вообще говоря, противоречит ситуации в точно решаемом $S = \frac{1}{2}$ варианте анизотропной модели Гейзенберга, т.к. в ней легкоосное упорядочение начинается с $\Delta \geqslant 0 + \varepsilon$, и она не содержит критической точки при $\Delta > 0$ /4/. Модель (I5.в)(СКС) также не содержит критической точки.

Полученное противоречие указывает на то, что условия квазиклассического приближения для спиновых анизотропных моделей не $S \gg 1$,

а
$$\delta \cdot S \gg 1 \quad , \tag{I7}$$

поэтому члены порядка $\frac{1}{\delta S}$ далее рассматриваться не будут (их можно учесть как малые поправки).

Похожая ситуация встречалась при изучении легкоплоскостных моделей (см. /2/).

Исследуем разность правых частей (I5.а) и (I5.в)

$$\begin{aligned} D\left[(15.a)-(15.\text{в})\right] &= \frac{1}{2S}\left(\bar{\alpha}_{xx}\alpha^2 + \bar{\alpha}\alpha_x^2 + 2\alpha|\alpha_x|^2\right) + \\ &+ \alpha\frac{|\alpha|^4}{2S^2}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{S a_0^2} + \Delta\right) \equiv D_3 + D_5. \end{aligned} \tag{I8}$$

В силу (I7) первый член в D_5 мал, т.е. в членах 5-го порядка по полю возникает принципиальное расхождение, так как при преобразовании Холштейна-Примакова (ХП) теряется основной член. Далее, величина производной $\frac{\partial}{\partial x}$ в D_3 определяется как длиной несущей волны $\lambda_0 = \frac{1}{k_0}$, так и размером волнового пакета L.

Рассмотрим две возможности:

$$\lambda_0 \gtrsim L \tag{I9.a}$$

$$\lambda_0 \ll L \quad . \tag{I9.в}$$

В первом случае оценим величину L вблизи стационарного состояния:

$\alpha_{xx} \sim \Delta \frac{\alpha|\alpha|^2}{S}$, что также следует из односолитонного решения:

$$\alpha = e^{i\Delta\tau} \cdot \frac{a}{\operatorname{ch}\frac{x - x_0}{\Delta x}} \quad , \quad \Delta x = \sqrt{\frac{2S}{\Delta}}\Big/ a \; ;$$

$$\frac{1}{L} \sim \frac{1}{\Delta x} = a\sqrt{\frac{\Delta}{2S}} = \sqrt{\frac{\Delta}{2S}}\,|\alpha_{max}|.$$

Отсюда

$$D_3 \sim \Delta \frac{|\alpha|^5}{S^2} \tag{20}$$

Поэтому в области (I9.а) модели ХП и СКС описывают одинаково состояния, близкие к стационарным.

Во втором случае удобно сделать плосковолновый анзац:

$$\alpha = \varphi(x + 2k_0 t, t)\, e^{i k_0 x} \quad . \tag{2I}$$

С точностью до первых двух по k_0 членов имеем:

$$D_3 \approx \frac{\alpha|\alpha|^2}{2S}\cdot\frac{k_0}{L}$$

или вблизи стационара

$$D_3^{k_0} \approx \frac{\alpha|\alpha|^2}{2S}\sqrt{\frac{(\Delta + k_0^2)}{2S}}\,|\alpha|\cdot k_0 \quad . \tag{22}$$

Легко оценить отношение $D_3 / D_3^{k_0}$ из формул (20) и (22)

$$\frac{D_3}{D_3^{k_0}} = \left(\frac{|\alpha|^2}{S}\cdot\frac{\Delta}{k_0^2}\cdot\frac{\Delta}{(\Delta + k_0^2)}\right)^{1/2} \ll 1 . \tag{23}$$

<u>Резюме</u>

1. Условия применимости преобразований Холштейна-Примакова, (а также и СКС) есть не $S \gg 1$, а $\delta \cdot S \gg 1$.

2. Системы ХП и СКС в случае легкой оси могут быть сведены друг к другу только в низшем порядке по взаимодействию (в третьем порядке по полю в уравнении). Системы типа легкой плоскости находятся в стадии изучения.

3. В этом порядке два подхода описывают одинаково классическую самолокализацию спиновых волн с помощью кубического уравнения Шредингера $S3$, либо вблизи установившихся состояний, либо с меньшей точностью быстро движущихся волновых пакетов.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность В.Г.Маханькову за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Литература

1. V.G. Makhankov, R.Myrzakulov and A.V.Makhankov. Generalized Coherent States And The Continuous Heisenberg XYZ Model With One-Ion Anisotropy. Physica Scripta,1987,vol.35,p.233-237.
2. Маханьков А.В., Маханьков В.Г. Спиновые когерентные состояния, преобразования Холштейна - Примакова для моделей Гейзенберга и статус уравнения Ландау - Лифшица. ОИЯИ,Р17-87-295, Дубна,1987.
3. А.М.Переломов. Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения. УФН,1977, 123, с.23-55.
4. C.N.Yang, C.P.Yang. One-Dimensional Chain Of Anisotropic Spin-Spin Interactions.I.Proof Of Bethe's Hypothesis For Ground State In A Finite System. Phys.Rev.,1966,150,p.321-327.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Абдуллоев Х.О., Маханьков А.В. P17-87-461

О квазиклассическом описании анизотропного магнетика Гейзенберга

Работа посвящена изучению особенностей классического поведения квантовых статистических моделей. Рассматриваются две различные классические модели, полученные из исходной квантовой двумя разными методами: методом преобразования Холштейна-Примакова /ПХП/ и спиновыми когерентными состояниями /СКС/. Исследуется возможность соответствия этих моделей на примере легкоосной модели Гейзенберга. Получены следующие результаты: 1/ условия применимости преобразований Холштейна-Примакова /а также и СКС/ есть не $S >> 1$, а $\delta\cdot S >> 1$; 2/ системы ХП и СКС в случае легкой оси могут быть сведены друг к другу только в низшем порядке по взаимодействию /в третьем порядке по полю в уравнении/; 3/ в этом порядке два подхода описывают одинаково классическую самолокализацию спиновых волн с помощью кубического уравнения Шредингера S3 либо вблизи установившихся состояний, либо с меньшей точностью быстро движущихся волновых пакетов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Abdulloev Kh.O., Makhankov A.V. P17-87-461

About Quasiclassical Description of Anisotropic Heisenberg Ferromagnetic

The special features of classical behaviour of quantum statistical models are studied. Two different classical models have been obtained from the initial quantum one by the method of Holstein-Primakoff transformations (HPT) and by the spin coherent state method (SCS). A possible correspondence of these models to each other is discussed taking as an example the easy-axis Heisenberg model. The following results have been obtained: 1) condition of applicability of Holstein-Primakoff transformations(as well as of spin coherent states) is $\delta\cdot S >> 1$; 2) in the easy-axis case the HP and SCS systems are the same only in the lowest approximation with respect to interaction (in the third order of field in equation); 3) both the approaches describe equivalently spin wave selflocalization via the NLS near the equilibrium state as well as quickly moving wave packets but with a worse accuracy.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987