сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-87-405

С.А.Апикян*, Т.М.Мишонов

СУПЕРКОНФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

*Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР

1987

I. Введение

В настоящей работе рассмотрены некоторые возможности реализации дополнительных симметрий в двумерной конформно-инвариантной теории поля. В /I/ был развит метод их изучения с помощью операторных разложений и конформных тождеств Уорда. Центральную роль при этом играет генератор конформных преобразований, сохраняющий ток размерности 2-тензор-энергии-импульса $T(z)$. Мы, как обычно, будем считать, что все операторы зависят только от одной комплексной переменной z, а зависимость от $\bar{z}$ будем опускать. Конформные свойства $T(z)$ вполне определяются видом сингулярных членов операторного разложения:

$$T(z)T(z') = \frac{c/2}{(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{T'(z')}{z-z'} + reg(z-z'), \tag{I}$$

которое, по существу, является алгеброй Вирасоро его компонент

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{1+n} T(z), \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}. \tag{2}$$

Оператором бесконечно малых конформных преобразований $z \to z + \varepsilon(z)$ служит оператор

$$\hat{\delta}_\varepsilon = \oint \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) T(z). \tag{3}$$

Основой найденной в /I/ классификации операторов являются инвариантные поля Φ_i, законы конформных преобразований которых, или, что то же самое, операторное разложение с $T(z)$, особенно просты:

$$T(z)\Phi_i(z) = \frac{\Delta_i}{(z-z')^2}\Phi_i(z') + \frac{1}{z-z'}\Phi_i'(z') + reg(z-z') \tag{4}$$

(нет суммирования по i). Штрих обозначает дифференцирование, Δ_i – размерность оператора Φ_i, так что коррелятор

$\langle \Phi_i(z)\Phi_i(z')\rangle = (z-z')^{-2\Delta_i}$. Операторы, получающиеся из Φ_i действием конформных преобразований, образуют конформный класс $[\Phi_i]$ оператора Φ_i.

Важнейшим является требование существования операторной алгебры

$$\Phi_i(z)\Phi_j(z') = \sum_k C_{ij}^k (z-z')^{[\Delta_k]-\Delta_i-\Delta_j}\,[\Phi_k(z')] \qquad (5)$$

и ее ассоциативности.

Дополнительным группам симметрии соответствуют сохраняющиеся токи канонической размерности – целой для бозонов и полуцелой для фермионов. Все корреляционные функции и операторные разложения являются аналитическими функциями координат этих токов, и вид сингулярных членов операторного разложения произведения тока и оператора определяет трансформационные свойства этого оператора или соответствующих току преобразований симметрии.

Операторы, возникающие в разложении произведения токов, имеют, таким образом, канонические размерности, и, ограничив число различных токов, нетрудно увидеть, что их алгебра, включая, разумеется, $T(z)$, замыкается. Требование ассоциативности налагает ряд условий на ее структурные константы и является весьма ограничительным. Так, например, если предположить, что, кроме $T(z)$, существует еще ток $S(z)$ размерности 3/2, а других инвариантных полей канонической размерности нет, то наиболее общее разложение $S(z)S(z')$, совместное с требованием симметрии, имеет вид:

$$S(z)S(z') = A\,(z-z')^{-3} + 2T(z')(z-z')^{-1} + reg \qquad (6)$$

которое вместе с (I) и соотношением

$$T(z)S(z') = \frac{3}{2(z-z')^2}S(z') + \frac{1}{z-z'}S'(z') + reg$$

образует замкнутую алгебру. Коэффициент 2 перед $T(z')$ в (6) есть просто условие нормировки. Оказывается, что требование ассоциативности можно удовлетворить при $A=\frac{2}{3}C$, и полученная алгебра является n = I суперагеброй Неве-Шварца. Аналогичное рассмотрение мультиплета токов J^a размерности I приводит к теориям, содержащим наряду с алгеброй Вирасоро алгебру Каца-Муди (алгебру токов). Общие свойства таких теорий были изучены в /2/.

В работе /3/ рассмотрены следующие за размерностью 3/2 нетривиальные случаи одного тока размерности 2, 5/2 и 3. Характерной чертой возникающих при этом алгебр является наличие квадратич-

ных по токам операторов уже в сингулярной части операторного разложения произведения токов, т.е. эти алгебры не являются алгебрами Ли.

С квадратично определяющими соотношениями алгебра найдена в работе Книжника /4/, где были рассмотрены токи размерности 3/2, составляющие мультиплет некоторой группы, генераторами преобразований которой служат сохраняющиеся токи размерности I, образующие алгебру Каца-Муди. Ниже сделан следующий шаг в этом направлении. Уравнения ассоциативности решены в случае нескольких токов размерности I/2, 3/2, составляющих мультиплет $SO(N)$ группы, генератором преобразований которой является сохраняющийся ток размерности I, образующий алгебру Каца-Муди. В этом случае получается алгебра с биквадратными определяющими соотношениями.

2. $SO(N)$ – инвариантная супералгебра

Мы будем рассматривать только группу $SO(N)$. Предположим, что в теории имеется $SO(N)$ – мультиплет токов $S^i(i=1,\dots,N)$ размерности 3/2, мультиплет токов $\Psi^i(i=1,\dots,N)$ размерности I/2 и мультиплет токов J^a размерности I в присоединенном представлении $SO(N)$ (a = I, ..., $N(N-1)/2$). Будем искать супералгебру, совместную с $SO(N)$ – инвариантностью и требованиями конформной симметрии в виде:

$$T(z)J^a(z') = \frac{1}{(z-z')^2}J^a(z') + \frac{1}{z-z'}J^{a\prime}(z') + reg \qquad (7)$$

$$T(z)\Psi^i(z') = \frac{1}{2(z-z')^2}\Psi^i(z') + \frac{1}{z-z'}\Psi^{i\prime}(z') + reg \qquad (8)$$

$$T(z)S^i(z') = \frac{3}{2(z-z')^2}S^i(z') + \frac{1}{z-z'}S^{i\prime}(z') + reg \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} S^i(z)S^j(z') &= \frac{\alpha_1\delta^{ij}}{(z-z')^3} + \frac{2T(z')\delta^{ij}}{z-z'} + \frac{\alpha_2\lambda^a_{ij}}{(z-z')^2}J^a(z') \\ &+ \frac{\alpha_2\lambda^a_{ij}}{z-z'}J^{a\prime}(z') + \frac{\alpha_3}{z-z'}\Pi^{ab}_{ij}:J^aJ^b: + \alpha_2\frac{\lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl}}{(z-z')^2}:\Psi_k\Psi_l: \\ &+ \frac{\alpha_2}{z-z'}\lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl}\frac{\partial}{\partial z'}:\Psi_k\Psi_l: + \frac{2\alpha_3}{z-z'}\Pi^{ab}_{ij}\lambda^b_{kl}:J^a\Psi_k\Psi_l: \\ &+ \frac{\alpha_3}{z-z'}\Pi^{ab}_{ij}\lambda^a_{kl}\lambda^b_{mn}:\Psi_k\Psi_l\Psi_m\Psi_n: + reg \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} S^i(z)J^a(z') &= \frac{\beta_1\lambda^{(a)}_{ij}}{z-z'} + S^j(z') + \frac{\beta_2\lambda^a_{ij}}{(z-z')^2}\Psi_j(z') \\ &+ \frac{\beta_2\lambda^a_{ij}}{z-z'}\Psi_j'(z') + \frac{\beta_3 U^{ab}_{ij}}{z-z'}:J^b\Psi_j: \end{aligned}$$

$$\frac{\beta_3}{z-z'} U^{ab}_{ik}\lambda^{b}_{ml} :\psi_k\psi_m\psi_l: + reg \tag{11}$$

$$J^a_{(z)}\psi^i_{(z')} = \frac{\delta_1\lambda^a_{ij}}{z-z'}\psi^j(z') + reg \tag{12}$$

$$S^i(z)\psi^j(z') = \frac{\gamma_1\lambda^a_{ij}}{z-z'}J^a(z') + \frac{\gamma_1\lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl}}{z-z'} :\psi_k\psi_l: + reg \tag{13}$$

$$J^a_{(z)}J^b_{(z')} = \frac{\mu_1\delta^{ab}}{(z-z')^2} + \frac{f^{abc}}{z-z'}J^c(z') + reg \tag{14}$$

$$\psi^i(z)\psi^j(z) = \frac{\delta^{ij}}{z-z'} + reg, \tag{15}$$

где λ^a_{ij} и f^{abc} – соответственно антисимметричные вещественные генераторы и структурные константы группы $SO(N)$, индексы $a(b)$ на самом деле являются парой целых чисел $a\equiv(p,q)$, $1\le p<q\le N$

$$\lambda^{(pq)}_{ij} = \delta^p_i\delta^q_j - \delta^p_j\delta^q_i, \quad [\lambda^a\lambda^b] = f^{abc}\lambda^c,$$
$$tr(\lambda^a\lambda^b) = -2\delta^{ab}, \quad f^{abc}f^{abd} = 2(N-2)\delta^{cd} \tag{16}$$

$$\lambda^a_{im}\lambda^a_{kj} = \delta_{ik}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mk}$$

Алгебру (10) – (15) можно написать в более удобном виде, если ввести новый оператор

$$K^a(z) = J^a(z) + I^a(z) = J(z) + \lambda^a_{ij} :\psi_i\psi_j: \tag{17}$$

и сделать технически несложные вычисления, после этого алгебра будет иметь вид:

$$S^i(z)S^j(z') = \frac{\alpha_1\delta^{ij}}{(z-z')^3} + \frac{2\delta^{ij}T(z)}{z-z'} + \frac{\alpha_2\lambda^a_{ij}}{(z-z')^2}K^a(z') \tag{18}$$
$$+ \frac{\alpha_2\lambda^a_{ij}}{z-z'}K^{a\prime}(z') + \frac{\alpha_3}{z-z'}\Pi^{ab}_{ij} :K^aK^b: + reg$$

$$S^i_{(z)}K^a(z') = \frac{\beta_1\lambda^a_{ij}}{z-z'}S^j(z') + \frac{\beta_2\lambda^a_{ij}}{(z-z')^2}\psi_j(z')$$
$$+ \frac{\beta_2\lambda^a_{ij}}{z-z'}\psi_j'(z') + reg \tag{19}$$

$$S^i_{(z)}\psi^j_{(z)} = \frac{\gamma_1\lambda^a_{ij}}{z-z'}K^a(z') + reg \tag{20}$$

$$K^a_{(z)}\psi^i_{(z')} = \frac{\delta_1 - 1}{z-z'}\lambda^a_{ij}\psi^j(z') + reg \tag{21}$$

$$K^a_{(z)}K^b(z') = \frac{(\mu_1+2\delta_1-2)\delta^{ab}}{(z-z')^2} + \frac{f^{abc}}{z-z'}K^c(z') + reg \tag{22}$$

$$\psi^i_{(z)}\psi^j_{(z)} = \frac{\delta^{ij}}{z-z'} + reg, \tag{23}$$

где

$$:K^a(z')K^b(z'): = \oint_{z'}\frac{dz}{2\pi i}(z-z')^{-1}K^a(z)K^b(z'). \tag{24}$$

В правой части операторного разложения (19) имеется член такого вида:
$$\frac{\beta_3}{z-z'}U^{ab}_{ij} :K^b\psi_j: \; - \frac{\gamma_1}{z-z'}\lambda^a_{jm}\lambda^b_{im} :K^b\psi^m:,$$
но его можно убрать, если подходящим образом выбрать β_3 и U^{ab}_{ij}, а именно:

$$\gamma_1 = \beta_3, \quad U^{ab}_{ij} = \lambda^a_{jm}\lambda^b_{im}.$$

Постоянный тензор Π^{ab}_{ij}, как видно из (18), является симметричным тензором

$$\Pi^{ab}_{ij} = \Pi^{ab}_{ji} = \Pi^{ba}_{ij}, \tag{26}$$

оператором $SO(N)$ преобразований является

$$\hat{\delta}_\omega = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \omega^a(z) K^a(z), \qquad (27)$$

суперпартнером этих преобразований

$$\hat{\delta}_\varkappa = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \varkappa_i(z) \Psi^i(z), \qquad (28)$$

а оператором суперконформных преобразований является

$$\hat{\delta}_\chi = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \chi_i(z) S^i(z), \qquad (29)$$

где $\omega^a(z)$, $\varkappa_i(z)$ и $\chi_i(z)$ – соответствующие инфинитезимальные параметры. Супермультиплеты будут такими:

$$j^i(Z^i) = S^i(z) + \theta^i T(z)$$

$$g^i(Z^i) = \Psi^i(z) + \theta^j \lambda^a_{ij} K^a(z) \qquad (30)$$

$$Z^i \equiv (z, \theta^i);$$

из требования ассоциативности нашей алгебры вытекает довольно жесткое условие на Π^{ab}_{ij}

$$\alpha_3 \Pi^{ab}_{kj} \lambda^a_{im} \lambda^b_{ml} = \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} - \lambda^a_{ki}\lambda^a_{jl}, \qquad (31)$$

с помощью (16) можно убедиться, что ему удовлетворяет соотношение

$$\Pi^{ab}_{kj} = \lambda^a_{km}\lambda^b_{mj} + \lambda^b_{km}\lambda^a_{mj} + 2\delta^{ab}\delta_{kj},$$

$$\alpha_3^{-1} = N-2. \qquad (32)$$

Далее нетривиальные условия на параметры алгебры получаются требованием перекрестной симметрии всевозможных четырехточечников, которые приводят нас к семейству уравнений:

$$\delta_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = 2(2-\mu_1), \quad \gamma_1^2 = (2-\mu_1)^{-1} \qquad (33)$$

$$\beta_2^2 = 2-\mu_1,$$

а связь между Γ_1 и центральным зарядом C можно найти, вычисляя двухточечник $\langle T(z)T(z')\rangle$, где $T(z)$ есть:

$$2NT(z') = \oint_{z'} \frac{dz}{2\pi i} \left[S^i(z) S^i(z) - \frac{\alpha_3 \Pi^{ab}_{ii}}{z-z'} :K^a(z')K^b(z'): \right]$$

$$C = N^{-1}\left\{3N(\mu_1-2)^2 + 2(N-1)\left[(2-\mu_1)^2 + 2 - N\right]\right\}. \qquad (34)$$

Алгебру (18) – (24) нетрудно переписать в градуированном виде. Введем

$$K^a_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n K^a(z), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$S^i_r = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2} S^i(z) \qquad (35)$$

$$\Psi^i_\alpha = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{\alpha-1/2} \Psi^i(z).$$

Для них из (18) – (24) без труда получаются

$$[L_n, K^a_m] = -m K^a_{n+m}$$

$$[L_n, S^i_r] = \left(\frac{n}{2} - r\right) S^i_{r+n}$$

$$[L_n, \Psi^i_\alpha] = -\left(\frac{n}{2} + \alpha\right)\Psi^i_{\alpha+n}$$

$$[K^a_n, K^b_m] = n(\mu_1-2)\delta^{ab}\delta_{n+m,0} + f^{abc}K^c_{n+m}$$

$$\{S^i_r, S^j_\sigma\} = \frac{\alpha_1}{2}\delta^{ij}\left(r^2 - \frac14\right)\delta_{r+\sigma,0} + 2\delta^{ij}L_{r+\sigma} + \frac12 (r-\sigma)\lambda^a_{ij}K^a_{r+\sigma} + \alpha_3 \Pi^{ab}_{ij}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :K^a_{r+\sigma-n}K^b_n:$$

$$[S^i_r, K^a_m] = \lambda^a_{ij}\lambda^j_{r+m} - m\beta_2\lambda^a_{ij}\Psi^j_{r+m}$$

$$\{S^i_r, \Psi^j_\alpha\} = \gamma_1 \lambda^a_{ij} K^a_{r+\alpha}$$

$$[K^c_m, \Psi^i_\alpha] = -\lambda^c_{ij}\Psi^j_{\alpha+m}$$

$$\{\Psi^i_\alpha, \Psi^j_\beta\} = \delta^{ij}\delta_{\alpha+\beta,0}. \qquad (36)$$

Здесь : : обозначает нормальное стандартное упорядочение: оператор с отрицательным индексом левее оператора с положительным.

3. Заключение

К сожалению, не удалось пока понять геометрический смысл построенных выше супералгебр. Не найдено также и физических моделей, обладающих такими симметриями. Осталось также невыясненным, существуют ли алгебры типа (36) для других групп.

Весьма интересно было бы построение модуля Вера и нахождение условий его вырождения как для нахождения минимальных теорий, так и для определения критических размерностей, если таковые имеются.

В заключение нам хочется поблагодарить А.Б.Замолодчикова и М.А.Бершадского за полезное обсуждение.

Литература

1. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. - Nucl.Phys., 1984, B241 333-381
2. Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B. - Nucl.Phys., 1984, B247, 83-103.
3. Замолодчиков А.Б. - ТМФ, 1985, 65, №3 347-359.
4. Книжник В.Г. - ТМФ, 1986, 66, № 1 102-108.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1987 года.

Апикян С.А., Мишонов Т.М. P17-87-405
Суперконформные алгебры в двух измерениях

Построена SO(N)-инвариантная алгебра расширенной суперконформной симметрии в двух измерениях с произвольным центральным зарядом, содержащая кроме тензора энергии-импульса токи размерности 1/2, 1 и 3/2.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Apikian S.A., Mishonov T.M. P17-87-405
Superconformal Algebras in Two Dimensions

SO(N) is obtained-invariant algebra of extended superconformal symmetry in two dimensions with arbitrary central charge containing besides the energy-momentum tensor the current dimensions 1/2, 1 and 3/2.

The investigation has been performed at Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987