объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р17-87-238

А.А.Бакасов

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ ДВУХУРОВНЕВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Направлено в "Журнал экспериментальной
и теоретической физики"

1987

В теории сверхизлучения, как и в теории лазеров, существуют критические значения некоторых физических величин, которые, как иногда считается, соответствуют переходу системы из одного режима излучения в другой. В теории лазеров параметром, принимающим критические значения, может быть интенсивность накачки. После превышения первого критического уровня накачки лазер излучает синусоидальную волну, которую при достижении второго порога сменяют ультракороткие импульсы/1,2/. Решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику такого лазера, при критических значениях интенсивности накачки становятся неустойчивыми: сначала реализуется устойчивый фокус, который затем сменяется предельными циклом, а в дальнейшем - тором/3/. При этом интенсивность накачки является управляющим внешним параметром системы.

Для сверхизлучающих систем ситуация несколько иная. Объектом изучения обычно является предварительно инвертированная система, которая может переходить в основное состояние, вообще говоря, различными путями. При этом внешнего параметра, подобного интенсивности накачки для лазера, для сверхизлучающей системы не существует. Режим излучения зависит от того, в каком состоянии подготавливается система, содержащая инвертированные излучатели. Это находит отражение в начальных условиях для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику такой системы.

Одной из основных величин является число предварительно инвертированных излучателей $K(t_0)$, где $t_0$ -начальный момент времени. Иногда считают, что если $K(t_0) > K_{thr}$, где $K_{thr}$ - некоторое критическое значение, то реализуется режим кооперативного излучения/4/. В противном случае $K(t_0) < K_{thr}$ излучение будет спонтанным. Другим примером является критерий Ареччи-Куртенса/5/, в частности, для числа излучателей $N$. Так, если $N < N_c$, где $N_c$ - критическое значение, то импульс сверхизлучения имеет гладкую секансообразную форму, если же $N > N_c$, то кооперативное излучение становится осцилляторным.

В данной работе строгими методами теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений будет исследован вопрос о характере изменений режима излучения безрезонаторной системы двухуровневых атомов. Если существуют такие критические значения величин $K_{thr}$ или $N_c$, при которых решения соответствующих эволюционных уравнений становятся неустойчивыми, то режим излучения изменяется скачкообразно: спонтанное излучение сменяется кооперативным, или секансообразный импульс сменяется осцилляторным. Если же решения остаются устойчивыми, то переход через значения $K_{thr}$ или $N_c$ является плавным и непрерывным.

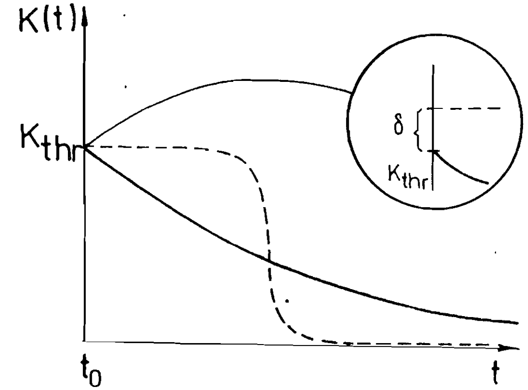
В основу нашего анализа будет положена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая излучение иглообразной системы двухуровневых атомов, взаимодействующей с двумя резонансными модами[6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt} + \frac{n}{\tau} = F, \\
&\frac{dF}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_2}\right)F = \frac{1}{T_0^2}\left(2n\cdot K - N\cdot n + K + S\right), \\
&\frac{dS}{dt} + \frac{S}{T_2} = F(2K - N), \\
&\frac{dK}{dt} + \frac{K}{T_{noh}} = -F.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $n$ -число фотонов внутри образца, $K$ -число инвертированных атомов, $S$ -величина корреляции между дипольными моментами переходов двухуровневых атомов, $F$ -скорость обмена энергией между полем и атомами, $\tau$ -время релаксации поля за счет вылета фотонов из образца, $T_2$ -время однородной релаксации макроскопического дипольного момента, $T_{noh}$ -время релаксации инвертированных атомов за счет безизлучательных механизмов, $N$ -число атомов в системе, $T_0 = \sqrt{2}\,|g|/\hbar$, где $g$ -константа взаимодействия в гамильтониане Дикке.

Если при переходе начального числа инвертированных атомов $K(t_0)$ через значение $K_{thr}$ режим излучения меняется скачком, то соответствующее решение уравнений (1) становится неустойчивым. Это иллюстрируется рисунком, где сплошная кривая соответствует спонтанному излучению, а штриховая - кооперативному. При превышении $K(t_0)$ над $K_{thr}$ на бесконечно малую величину $\delta$ решения, соответствующие сплошной и штриховой линиям, расходятся на конечное расстояние и, следовательно, становятся неустойчивыми по Ляпунову[7]. Поэтому наша задача состоит в исследовании некоторых нетривиальных решений уравнений (1) на устойчивость. Попутно мы выясним, какие условия будут наложены на исследуемые решения.






Введем безразмерные переменные и время

$$y_1 = n,\; y_2 = \tau F,\; y_3 = S,\; y_4 = K; \quad \theta = \frac{t}{\tau}, \qquad (2)$$

а также безразмерные константы

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{T_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau}{T_0}, \quad \alpha_3 = \frac{\tau}{T_{noh}}. \qquad (3)$$

Система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = -y_1 + y_2, \\
&\dot{y}_2 = -\frac{1}{2}(1+\alpha_1)y_2 + \alpha_2^2\left(2y_1y_4 - Ny_1 + y_3 + y_4\right), \\
&\dot{y}_3 = -\alpha_1 y_3 + 2y_2y_4 - Ny_2, \\
&\dot{y}_4 = -\alpha_3 y_4 - y_2.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Пусть $A(\theta) = \{A_1(\theta), A_2(\theta), A_3(\theta), A_4(\theta)\}$ -некоторое, пока еще произвольное, решение системы (4). Исследуем его на устойчивость. Записывая

$$y(\theta) = A(\theta) + x(\theta), \tag{5}$$

получим для вариаций $x(\theta) = \{x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta), x_4(\theta)\}$ приведенную неавтономную квазилинейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{1}{2}(1+\alpha_1)x_2 + \alpha_2^2\big(2x_1x_4 + 2A_1(\theta)x_4 + \\ &\quad + 2A_4(\theta)x_1 - Nx_1 + x_3 + x_4\big), \\ \dot{x}_3 &= -\alpha_1 x_3 - Nx_2 + 2A_2(\theta)x_4 + 2A_4(\theta)x_2 + 2x_2x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\alpha_3 x_4 - x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

В сокращенной записи имеем

$$\dot{x} = (B + \mathcal{A}(\theta))x + f(x), \tag{7}$$

где $B$ –постоянная матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 N & -\frac{1}{2}(1+\alpha_1) & \alpha_2^2 & \alpha_2^2 \\ 0 & -N & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\mathcal{A}(\theta)$ –матрица, зависящая от времени:

$$\mathcal{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_2^2 A_4(\theta) & 0 & 0 & 2\alpha_2^2 A_1(\theta) \\ 0 & 2A_4(\theta) & 0 & 2A_2(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$f(x) = \{0,\ 2\alpha_2^2 x_1 x_4,\ 2x_2x_4,\ 0\} \tag{10}$$

Чтобы применить критерий Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем /8/, необходимо показать, что неавтономная система первого приближения



$$\dot{\xi} = (B + \mathcal{A}(\theta))\xi \tag{11}$$

является правильной по Ляпунову /7/. Потребуем, чтобы исследуемое решение $A(\theta)$ удовлетворяло условию

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \|\mathcal{A}(\theta)\|\, d\theta < \infty, \qquad \theta_0 = \frac{t_0}{\tau}. \tag{12}$$

Производя в системе (11) замену $\xi = C\eta$, где $C$ - неособенная матрица, диагонализующая матрицу $B$:

$$\Lambda = C^{-1}BC = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \tag{13}$$

получим линейную систему уравнений

$$\dot{\eta} = \Lambda\eta + C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\eta, \tag{14}$$

где в правой части не зависящие от времени коэффициенты $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ стоят по диагонали. Из условия (12) вытекает, что $\int_{\theta_0}^{\infty} \|C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\|\, d\theta < \infty$. Тогда система (14) - правильная по Ляпунову, а числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ образуют ее полный спектр /9/. Поскольку нелинейность (10) удовлетворяет условиям критерия Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем, то исследование на устойчивость тривиального решения приведенной системы (6)-(10), или, что то же, решения $A(\theta)$ исходной системы (4), сводится к простому вопросу об отрицательной определенности постоянной матрицы $B$. Пользуясь критерием Сильвестра, легко видеть, что при всех положительных значениях $\tau$, $T_2$, $T_0$, $T_{пол}$ и $N$ в уравнениях (1) главные миноры матрицы $-B$ положительны:

$$\begin{aligned} \Delta_1(-B) &= 1 > 0, \\ \Delta_2(-B) &= \tfrac{1}{2}(1+\alpha_1) + \alpha_2^2 N > 0, \\ \Delta_3(-B) &= \alpha_1\Delta_2(-B) + \alpha_2^2 N > 0, \\ \Delta_4(-B) &= \alpha_3\cdot\Delta_3(-B) + \alpha_1\cdot\alpha_2^2 > 0, \end{aligned} \tag{15}$$

и, следовательно, матрица $B$ отрицательно знакоопределена, т.е. $\lambda_i < 0$, $i = 1,2,3,4$. Тогда, согласно критерию Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем тривиальное решение приведенной системы (6)-(10) устойчиво по Ляпунову. Это значит, что решение $A(\theta)$

$$y(\theta)= A(\theta)+x(\theta), \tag{5}$$

получим для вариаций $X(\theta)=\{X_1(\theta),X_2(\theta),X_3(\theta),X_4(\theta)\}$ приведенную неавтономную квазилинейную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot X_1 &= -X_1+X_2,\\
\dot X_2 &= -\tfrac{1}{2}(1+\alpha_1)X_2+\alpha_2^2\big(2X_1X_4+2A_1(\theta)X_4+\\
&\quad +2A_4(\theta)X_1-NX_1+X_3+X_4\big),\\
\dot X_3 &= -\alpha_1X_3-NX_2+2A_2(\theta)X_4+2A_4(\theta)X_2+2X_2X_4,\\
\dot X_4 &= -\alpha_3X_4-X_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

В сокращенной записи имеем

$$\dot X=\big(B+\mathcal{A}(\theta)\big)X+f(X), \tag{7}$$

где $B$ –постоянная матрица:

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ -\alpha_2^2N & -\frac{1}{2}(1+\alpha_1) & \alpha_2^2 & \alpha_2^2\\ 0 & -N & -\alpha_1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\mathcal{A}(\theta)$ –матрица, зависящая от времени:

$$\mathcal{A}(\theta)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 2\alpha_2^2A_4(\theta) & 0 & 0 & 2\alpha_2^2A_1(\theta)\\ 0 & 2A_4(\theta) & 0 & 2A_2(\theta)\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$f(x)=\{0,\ 2\alpha_2^2x_1x_4,\ 2x_2x_4,\ 0\} \tag{10}$$

Чтобы применить критерий Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем [8], необходимо показать, что неавтономная система первого приближения



$$\dot\xi=\big(B+\mathcal{A}(\theta)\big)\xi \tag{11}$$

является правильной по Ляпунову [7]. Потребуем, чтобы исследуемое решение $A(\theta)$ удовлетворяло условию

$$\int_{\theta_0}^{\infty}\|\mathcal{A}(\theta)\|\,d\theta<\infty, \qquad \theta_0=\frac{t_0}{\tau}. \tag{12}$$

Производя в системе (11) замену $\xi = C\eta$, где $C$ – неособенная матрица, диагонализующая матрицу $B$:

$$\Lambda = C^{-1}BC=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4), \tag{13}$$

получим линейную систему уравнений

$$\dot\eta=\Lambda\eta+C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\eta, \tag{14}$$

где в правой части не зависящие от времени коэффициенты $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ стоят по диагонали. Из условия (12) вытекает, что $\int_{\theta_0}^{\infty}\|C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\|\,d\theta<\infty$. Тогда система (14) – правильная по Ляпунову, а числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ образуют ее полный спектр [9]. Поскольку нелинейность (10) удовлетворяет условиям критерия Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем, то исследование на устойчивость тривиального решения приведенной системы (6)-(10), или, что то же, решения $A(\theta)$ исходной системы (4), сводится к простому вопросу об отрицательной определенности постоянной матрицы $B$. Пользуясь критерием Сильвестра, легко видеть, что при всех положительных значениях $\tau$, $T_2$, $T_0$, $T_{non}$ и $N$ в уравнениях (1) главные миноры матрицы $-B$ положительны:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(-B)&=1>0,\\
\Delta_2(-B)&=\tfrac{1}{2}(1+\alpha_1)+\alpha_2^2N>0,\\
\Delta_3(-B)&=\alpha_1\Delta_2(-B)+\alpha_2^2N>0,\\
\Delta_4(-B)&=\alpha_3\cdot\Delta_3(-B)+\alpha_1\cdot\alpha_2^2>0,
\end{aligned} \tag{15}$$

и, следовательно, матрица $B$ отрицательно знакоопределена, т.е. $\lambda_i<0$, $i$ = 1,2,3, 4. Тогда, согласно критерию Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем тривиальное решение приведенной системы (6)-(10) устойчиво по Ляпунову. Это значит, что решение $A(\theta)$

исходной системы (I) или (4), удовлетворяющее единственному условию (I2), является устойчивым. Более того, как следует из этого же критерия, решение $A(\theta)$ -экспоненциально устойчиво по Ляпунову /I0/.

Обсудим физические следствия и применимость полученных строгих результатов. Устойчивость решения $A(\theta)$, которое произвольно (за исключением условия (I2)), физически означает, что не существует начальных условий, в частности, такого начального числа инвертированных атомов $K_{thr}$, при которых режим излучения безрезонаторной системы, описываемой уравнениями (I), изменялся бы скачком. Следовательно, в данной системе переход из режима спонтанного излучения к сверхизлучению происходит непрерывным образом. Экспоненциальная устойчивость решения $A(\theta)$ означает, что за время, сравнимое с $max(\tau, T_2, T_0, T_{noh})$, в эволюции переменных $R$, $F$, $S$, $K$ наступает стадия их экспоненциального стремления к нулевым значениям. Следовательно, уравнения (I) адекватно описывают диссипативный характер излучения безрезонаторной системы двухуровневых атомов.

Достаточное условие (I2), с точки зрения математика, является очень сильным. Однако физик не может не требовать выполнения этого условия, поскольку оно эквивалентно условию конечности энергии в системе "Излучатели + поле". В заключение заметим, что исходные переменные $R$, $F$, $S$, $K$ не позволяют воспользоваться прямо энергетическим способом построения функции Ляпунова для исследования решений уравнений (I) на устойчивость, поскольку энергия системы линейна по этим переменным /II/.

Автор признателен П.Е.Жидкову за неоднократные и полезные обсуждения.

Литература

I. Sargent M. III, Scully M.O., Lamb W.E., Jr., Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

2. Haken H., in Encyclopedia of Physics, vol. XXУ/2c: Laser Theory, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1970.

3. Haken H., Synergetics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1978.

4. Bonifacio R., Schwendimann P., Haake F., Phys.Rev., 1971, vol. 4A, No. 1, 302-313.

5. Arecchi F.T., Courtens E. Phys.Rev., 1970, vol. 2A, No.5, 1730-1737.

6. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А., УФН, I980, т.I3I, вып. 4, 653-694.

7. Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., Гостехиздат, I950.



8. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, М.: Наука, I966.

9. Рапопорт И.М., О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев: ИАН УССР, I954.

I0. Красовский Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М: Физматгиз, I959.

II. Лефшец С., Ла-Салль Ж., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М.: Мир, I964.

Рукопись поступила в издательский отдел
I0 мая I987 года.

Бакасов А.А. P17-87-238

Об устойчивости некоторых решений эволюционных уравнений для открытой системы двухуровневых излучателей

Строгими методами теории устойчивости исследованы решения уравнений, описывающих излучение иглообразной безрезонаторной системы двухуровневых атомов. Показано, что в такой системе переход из одного режима излучения в другой происходит непрерывным образом. Это, в частности, означает, что не существует пороговой начальной инверсии системы атомов, при превышении которой происходит внезапная смена спонтанного излучения кооперативным. Используемое в работе достаточное условие устойчивости исследуемых решений физически эквивалентно условию конечности энергии системы "Атомы + поле".

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.



Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской.



Bakasov A.A. P17-87-238

On Stability of Some Solutions of Evolution Equations for an Open System of Two-Level Emitters

Rigorous methods of the stability theory are used to study the solutions of equations describing the radiation of pencilshaped resonator-free system of two-level atoms. It is shown that in such a system the transition from one regine of radiation into another proceeds continuously. Particularly there is no threshold initial inversion the excess of which causes a sudden change of a spontaneous radiation by a cooperative one. A sufficient condition for the stability of considered solutions is equivalent to the finiteness of energy of an "Atoms + field" system.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.



Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987