сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-87-129

Н.Н.Боголюбов (мл.), П.А.Поляков, М.А.Тасев

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ В СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

1987

Важнейшей характеристикой плазменных систем является диэлектрическая проницаемость $\epsilon(k,\omega)$, которая связывает фурье-компоненты векторов электрической индукции $\vec{D}(k,\omega)$ и электрической напряженности $\vec{E}(k,\omega)$ при малых возмущениях электромагнитных полей в плазменной среде [1]. Эта функция впервые была вычислена А.А.Власовым для электронного газа с максвелловским законом распределения электронов по скоростям в случае, когда средняя тепловая энергия электронов $3k_Б T/2$ /$k_Б$ - постоянная Больцмана, T - температура/ много меньше их энергии покоя mc^2 [2]. В настоящее время большой интерес вызывают высокотемпературные электронные и плазменные системы с температурой частиц, близкой к энергии покоя электронов. Этот интерес, кроме общенаучного значения, обусловлен потребностями экспериментальной физики плазмы и сильноточной плазменной электроники, так как в лабораторных установках уже созданы плазменные системы с релятивистской электронной компонентой [3] и сильноточные пучки с релятивистским тепловым разбросом [4]. Исследования релятивистской плазмы необходимы в астрофизике, например для понимания радиоизлучения пульсаров [5], и важны для понимания процессов в будущих термоядерных реакторах, температура плазмы в которых будет близка к релятивистской [6].

Рассмотрим продольную диэлектрическую проницаемость релятивистской плазмы, которую несложно получить, исходя из линеаризованного кинетического уравнения Власова и системы уравнений Максвелла /см., например, [7]/:

$$\epsilon^{l}(k,\omega) = 1 + \Sigma \frac{m\omega_p^2}{k^2\theta} \int_0^\infty \left(1 + \frac{k_o u^o}{2ku} \ln \frac{k_o u^o - ku}{k_o u^o + ku}\right) f_o \, d\Omega, \qquad /1/$$

где $\theta = k_Б T$; $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n/m$ - плазменная частота, u^o и u - временная и пространственная компоненты 4-вектора скорости, k_o и k - временная и пространственная компоненты 4-волнового вектора ($k_o = \omega/c$), $d\Omega = 4\pi u^2 \cdot du$. Суммирование предполагается по сортам частиц/электронам и ионам/. В выражении /1/ в качестве равновесной функции распределения частиц по скоростям выбран релятивистский закон Максвелла [8] /распределения Юттнера-Синга [8]/:

$$f_0 = \alpha \exp(-\alpha u_0)/4\pi K_2(\alpha), \qquad /2/$$

где $\alpha = mc^2/\theta$.

Функция /1/ в общем случае не выражается через известные специальные функции, поэтому ее аналитическое исследование возможно только при тех или иных асимптотических разложениях по малым параметрам. Так, если рассмотреть нерелятивистский предел $1/\alpha \to 0$, то выражение /1/ перейдет в известное представление, найденное Власовым [2]. Недавно было показано, что в обратном предельном случае $\alpha \to 0$ /ультрарелятивистский предел/ функцию /1/ аналогично нерелятивистскому приближению можно выразить через известную специальную функцию [9]. В ряде работ исследованы разложения функции /1/ в какой-либо узкой спектральной области, где возможно асимптотическое разложение по малым параметрам: $|kc/\omega| \ll 1$ или $|kc/\omega - 1| \ll 1$ [10].

В данной работе будет показано, что диэлектрическую проницаемость $\epsilon^\ell(k,\omega)$ можно представить во всей спектральной области значений ω и k в виде ряда по малому параметру $1/\alpha$, где элементы ряда составляют $\sim (1/\alpha)^n$ и выражаются через известную специальную функцию - интеграл вероятности от мнимого аргумента $W(z)$ [11]. Подставляя /2/ в /1/ и переходя к новой переменной интегрирования β по формуле

$$u = \beta(1-\beta^2)^{-1/2},$$

получим

$$\epsilon^\ell(k,\omega) = 1 + \Sigma \frac{\alpha\omega_p^2}{k^2c^2} \frac{\alpha}{4\pi K_2(\alpha)} \int_0^1 \left[1 + \frac{\omega}{kc\beta} \ln \frac{\omega - kc\beta}{\omega + kc\beta}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\alpha}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right] \frac{4\pi\beta^2 d\beta}{(1-\beta^2)^{5/2}}. \qquad /3/$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе ($c \to \infty$)

$$\left[-\frac{\alpha}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right] \longrightarrow -\alpha\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right). \qquad /4/$$

Тогда с учетом /4/ из исходной функции получим

$$\exp\left[-\frac{\alpha}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right]\cdot(1-\beta^2)^{-5/2} = \exp\left[-\alpha\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)\right]\cdot y(\alpha,\beta^2), \qquad /5/$$

где

$$y(\alpha,\beta^2) = \exp\left\{-\alpha\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)\right]\right\}\cdot(1-\beta^2)^{-5/2}. \qquad /6/$$

Функция /6/ в нерелятивистском приближении ($c \to \infty$) стремится к единице, в точке $\beta^2 = 0$ она дифференцируема произвольное число раз, поэтому ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$y(\alpha,\beta^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot y^{(n)}\Big|_{\beta^2=0} \cdot \beta^{2n}, \qquad /7/$$

где $y^{(n)}$ - производная n-го порядка по аргументу β^2. Далее, используя разложение /7/, находим

$$y(\alpha,\beta^2)\cdot\exp\left[-\frac{\alpha\beta^2}{2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n y^{(n)}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} \exp\left[-\frac{\alpha\beta^2}{2}\right]. \qquad /8/$$

Подставляя /8/ в /3/, имеем

$$\epsilon^\ell(k,\omega) = 1 + \Sigma \frac{\alpha\omega_p^2}{k^2c^2} \cdot \left\{\frac{\alpha e^{-\alpha}}{4\pi K_2(\alpha)}\right. \times$$

$$\cdot\left.\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} y^{(n)}\Big|_{\beta=0} \cdot \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\cdot\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{3/2}\right)\right\} \times \qquad /9/$$

$$\cdot\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} \int_0^1 \left[1 + \frac{\omega}{2kc\beta} \ln\frac{\omega - kc\beta}{\omega + kc\beta}\right] \exp\left[-\frac{\alpha\beta^2}{2}\right] 4\pi\beta^2 d\beta.$$

При нерелятивистском пределе $c \to \infty$ операторное выражение в фигурных скобках стремится к единице, следовательно, последняя строка выражения /9/ представляет собой дисперсионную функцию нерелятивистской плазмы, которая выражается через специальную функцию $W(z)$, то есть /см. [11]/

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} \int_0^1 \left[1 + \frac{\omega}{2kc\beta} \ln\frac{\omega - kc\beta}{\omega + kc\beta}\right] \exp\left[-\frac{\alpha\beta^2}{2}\right] 4\pi\beta^2 d\beta \longrightarrow$$

$$\to 1 + i\sqrt{\pi}\cdot z\cdot W(z)\,,\qquad c\to\infty, \qquad /10/$$

где

$$z = \frac{\omega}{k}\left(\frac{m}{2\theta}\right)^{1/2} = \frac{\omega}{kc}\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}. \qquad /11/$$

Учитывая предельное равенство /10/, находим следующее представление дисперсионной функции $\epsilon^{\ell}(k,\omega)$ в виде ряда по параметру $1/a$:

$$\epsilon^{\ell}(k,\omega) = 1 + \Sigma\frac{a\omega_p^2}{k^2c^2}\cdot\frac{a\ell^{-a}}{4\pi K_2(a)}\cdot\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}y^{(n)}\Big|_{\beta=o}\times$$

$$\times\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{3/2}[1+i\sqrt{\pi}\cdot z\cdot W(z)]. \qquad /12/$$

Следует отметить, что представление /12/ получено с точностью до экспоненциальных членов $\sim\exp(-a)$, так как согласно /10/ предполагается нерелятивистский предел /другими словами, была расширена область значений скоростей частиц $v=\beta c$ от $[0,c)$ до $[0,\infty)$/.

Формула /12/ представляет собой диэлектрическую проницаемость $\epsilon^{\ell}(k,\omega)$ в виде ряда относительного параметра $1/a$ во всей спектральной области. Вычислим первый член этого ряда, то есть найдем функцию $\epsilon^{\ell}(k,\omega)$ в слаборелятивистском приближении /линейном относительно параметра $1/a$/. Для этого заметим, что члены одного порядка относительно $1/a$ содержатся в двух слагаемых ряда /12/. Непосредственное дифференцирование функции /6/ дает

$$y^{(1)}\Big|_{\beta=o} = \frac{5}{2};\quad y^{(2)}\Big|_{\beta=o} = \frac{35}{4} - \frac{3}{4}a. \qquad /13/$$

Подставляя /13/ в /12/ и удерживая линейные относительно параметра $1/a$ члены, находим

$$\epsilon^{\ell}(k,\omega) = 1 + \Sigma\frac{a\omega_p^2}{k^2c^2}\,\frac{a\ell^{-a}}{4\pi K_2(a)}\times$$

$$\times\left(1 - 5\frac{\partial}{\partial a} - \frac{3}{4}a\frac{\partial^2}{\partial a^2}\right)\left[\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{3/2}(1+\sqrt{\pi}\,zW(z))\right]. \qquad /14/$$

Далее, учитывая, что в рассматриваемом приближении $a\gg 1$, воспользуемся асимптотическим разложением для функции Макдональда при больших значениях аргумента [11]:

$$K_{\nu}(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,e^{-a}\cdot\left(1+\frac{4\nu^2-1}{8a}+\dots\right). \qquad /15/$$

Кроме того, заметим, что для функции $W(z)$ справедливо соотношение /11/:

$$1+i\sqrt{\pi}\cdot z\cdot W(z) = -i\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{dW(z)}{dz}. \qquad /16/$$

Тогда из /14/ несложно получить продольную диэлектрическую проницаемость плазмы в слаборелятивистском приближении:

$$\epsilon^{\ell}(k,\omega) = 1 + \Sigma\frac{a\omega_p^2}{k^2c^2}\left(1-\frac{15}{8a}\right)\cdot\{1+i\sqrt{\pi}\cdot z\cdot W(z) +$$

$$+\frac{5}{2a}[1+2(1+z^2)(1+i\sqrt{\pi}\,zW(z))] + \frac{15}{8a}[1+2(1+z^2)(1+i\sqrt{\pi}\,zW(z))] - \qquad /17/$$

$$-\frac{3}{8a}[2(1+z^2(1-z^2))(1+i\sqrt{\pi}\,zW(z)) - 2(1+z^2)]\},$$

где $z=\frac{\omega}{kc}(a/2)^{1/2} = \omega/(\sqrt{2}\,kV_T)$, $V_T = (\theta/m)^{1/2}$ - тепловая скорость. Из формулы /17/ несложно получить известные ранее слаборелятивистские выражения функции $\epsilon^{\ell}(k,\omega)$ для плазменных волн с фазовыми скоростями ω/k, много большими тепловой скорости V_T, $(|z|\gg 1)$. Для этого, используя асимптотические формулы для функции $W(z)$ [11]:

$$1+i\sqrt{\pi}\,zW(z) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{2z^4} + i\sqrt{\pi}\,z\,e^{-z}, \qquad /18/$$

на основе /14/ находим

$$\epsilon^{\ell}(k,\omega) = 1 - \Sigma(\omega_p^2/\omega^2)\{1-\frac{5}{2a} + 3(k^2V_T^2/\omega^2)\left(1-\frac{8}{a}\right) + \qquad /19/$$

$$+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{kV_T}\left[1+\frac{1}{a}\left(2+\frac{\omega^2}{k^2V_T^2}-\frac{3\omega^4}{8k^4V_T^4}\right)\right]\exp\left[-\frac{\omega^2}{2k^2V_T^2}\right]\}.$$

Выражение /19/ при $k=0$ получено в [12], а при $k\neq 0$ - в [13].

В противоположном пределе, когда фазовые скорости плазменных волн много меньше тепловой скорости частиц $V_т$ $(|z| \ll 1)$, учитывая разложение $W(z)$ при малых значениях аргумента [11]:

$$1 + i\sqrt{\pi}\, z W(z) = 1 + i\left(\frac{\pi m}{2\theta}\right)^{1/2} \frac{\omega}{k}, \qquad /20/$$

из /14/ находим

$$\epsilon^{\ell}(k,\omega) = 1 + \sum \frac{\omega_p^2 m}{k^2 \theta}\left[1 - i\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{m}{\theta}\right)^{1/2} \frac{\omega}{k}\left(1 + \frac{1}{8\alpha}\right)\right]. \qquad /21/$$

Отметим, что выражение /21/ отличается от аналогичного нерелятивистского выражения только мнимым слагаемым, а действительные части совпадают [1].

Приравнивая диэлектрическую проницаемость к нулю:

$$\epsilon^{\ell}(k,\omega) = 0, \qquad /22/$$

получаем дисперсионное уравнение для линейных плазменных волн. В частности, в приближении /19/ для дисперсии $\omega' = \mathrm{Re}\,\omega$ и декремента бесстолкновительного затухания $\gamma = \mathrm{Im}\,\omega$ имеем

$$\omega^2 = \omega_p^2\left(1 - \frac{5}{2\alpha}\right) + \frac{3k^2\theta}{m}\left(1 - \frac{11}{2\alpha}\right); \qquad /23/$$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_p^2}{k V_т}\left[1 - \frac{2}{\alpha} - \frac{3}{8\alpha}\,\frac{\omega_p^4}{k^4 V_т^4}\right]\exp\left[-\frac{3}{2} - \frac{\omega}{2k^2 V_т^2}\right]. \qquad /24/$$

Заметим, что релятивистские температурные эффекты приводят к уменьшению частоты колебаний /23/ и декремента затухания ленгмюровских волн, при этом наиболее сильное влияние релятивизм оказывает на дисперсию /23/. Этот факт отмечался в работе [13], хотя там допущена неточность в определении численного коэффициента. В частности, изменение дисперсии /23/ достигает 10% уже при температуре ~ 10 кэВ и, следовательно, может быть измерено в современных экспериментальных установках.

В неизотермической плазме с температурой электронов θ_ℓ, много большей температуры θ_i, а также с массой ионов m_i, много большей массы электронов m_ℓ, дисперсионное уравнение /22/ имеет еще одно решение с малой мнимой частью /ионно-звуковые колебания/ [1]. Исследуем влияние релятивистских температурных эффектов на эту плазменную моду. Для этого, аналогично [1], будем полагать, что вклад в диэлектрическую проницаемость электронной компоненты имеет вид /21/, а ионной - /19/. Тогда при выполнении неравенств

$$\theta_\ell \gg \theta_i; \quad k^2\theta_\ell \ll \omega_{p\ell}\, m_\ell; \quad m_i \gg m_\ell \qquad /25/$$

из уравнения /22/ для частоты колебаний и декремента затухания ионно-звуковых волн в слаборелятивистской плазме найдем

$$\omega'^2 = \frac{\theta_\ell k^2}{m_i}\left(1 - \frac{5}{2\alpha_i} - \frac{\theta_\ell k^2}{m_\ell \omega_{p\ell}^2} - \frac{3\theta_i k}{m_i}\right), \qquad /26/$$

$$\gamma = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8\alpha_\ell}\right)\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{k^2\theta_\ell}{m_i}\,\frac{m_\ell}{m_i}\right)^{1/2}, \qquad /27/$$

где индекс ℓ нумерует параметры электронной компоненты плазмы, а i - ионной.

Отметим, что на частоту ионно-звуковых волн /26/ большое влияние оказывают релятивистские температурные эффекты ионной компоненты плазмы /в первом порядке относительно температуры/, причем они приводят к уменьшению частоты. С другой стороны, на декремент затухания /27/ основное влияние оказывают релятивистские температурные эффекты, обусловленные электронной компонентой плазмы, которая, в отличие от ленгмюровских волн, приводит к увеличению декремента затухания /27/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
2. Власов А.А. - ЖЭТФ, 1938, 8, с.291.
3. Закатов Л.П. и др. - Письма в ЖЭТФ, 1972, 15, с.16.
4. Sprangle P., Smith R.A. - Phys.Rev., 1980, A21, p.293.
5. Михайловский А.Б. - Письма в астрономический журнал, 1979, 5, с.604.
6. Кларк Д.Ф. - Физика плазмы, 1980, 6, с.1407.
7. Кузьменков Л.С.,Поляков П.А. - ЖЭТФ, 1982, 82, с.139.
8. де Гроот С., ван Леувен В., ван Верт Х. Релятивистская кинетическая теория. М.: Мир, 1983.
9. Поляков П.А. - ЖЭТФ, 1983, 19, с.815.
10. Godfrey B.B., Newberger B.S., Taggart K.A. - IEEE, 1975, Ps-3, p.60.

11. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
12. Clemmow P.C., Willson A.J. - Proc.Roy.Soc., 1956, A237, p.117.
13. Кузьменков Л.С., Поляков П.А. - Вестник Московского университета, серия: физика, астрономия, 1978, 19, с.95.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1987 года.

Боголюбов Н.Н. /мл./, Поляков П.А., Тасев М.А. Р17-87-129

Диэлектрическая проницаемость однородной и изотропной плазмы в слаборелятивистском приближении

Исследована диэлектрическая проницаемость плазмы при высоких температурах в слаборелятивистском приближении. Получено представление функции диэлектрического отклика в виде ряда относительно безразмерного параметра, равного отношению температуры частиц к их массе покоя, с элементами ряда, выражающимися через известные специальные функции во всей спектральной области. Проанализировано влияние слаборелятивистских температурных эффектов на дисперсию и затухание ленгмюровских и ионно-звуковых волн.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Bogoliubov N.N.(jr.), Polyakov P.A., Tassev M.A. P17-87-129

Dielectric Permittivity of Homogeneous and Isotropic Plasma in Sligtly Relativistic Approximation

A behavior of permittivity of plasma at high temperatures is investigated. The expression of dielectric response is expanded into a series in powers of (α^{-i}) where (α^{-i}) is a nondimensional parameter being equal to the ratio of particle temperature to their rest energy. An influence of slightly relativistic temperature effects on dispersion and attenuation of Langmuir and ion-acoustic waves is analysed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987