

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P17-87-121

В.В.Нитц

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ
ПРИ ОРИЕНТАЦИОННОМ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ
В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ**

Направлено в журнал "Физика твердого тела"

1987

Введение

В длинноволновом приближении волновые возбуждения в антиферромагнетике вблизи ориентационного фазового перехода второго рода и фазового перехода первого рода, близкого к переходу второго рода, описываются уравнением (без учета диссипации энергии) ^{/1/}:

$$\Delta \ell - \ddot{\ell} = U'(\ell). \quad (1)$$

Здесь

$$U(\ell) = \frac{A}{2} \ell^2 + \frac{B}{4} \ell^4 + \frac{C}{6} \ell^6 \quad (2)$$

- термодинамический потенциал, выраженный через $\ell(\vec{r}, t)$ - плотность проекции вектора антиферромагнетизма на ось анизотропии, обращавшуюся в одном из двух фазовых состояний в нуль. Коэффициент A в наибольшей степени зависит от внешнего поля или температуры, изменяя знак при фазовом переходе.

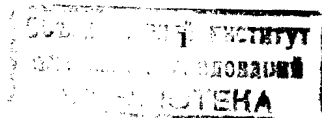
При переходе первого рода $B < 0, C > 0$. В этом случае при квазиодномерном рассмотрении решениями уравнения являются плоские солитоны динамического типа, описываемые известными выражениями (см., например, /1,2,3/). Вероятность образования таких солитонов аномально возрастает при приближении к точкам лабильности фазовых состояний.

В случае фазового перехода второго рода $B > 0$. При этом в самой точке перехода $A = 0$.

Очевидно, нелинейность процессов около точек фазового перехода не ограничивается появлением солитонов. В данной работе обсуждаются в квазиодномерном рассмотрении периодические решения уравнения (1). Часть этих решений является обобщением гармонических волн, получавшихся при линеаризации уравнения (1) и поэтому удовлетворительно описывавших систему вдали от точек фазового перехода. Другие решения являются специфическими для нелинейного уравнения (1). В предельных случаях они переходят в выражения, описывавшие одиночные, солитонные волны возбуждения.

В первой части рассмотрен случай фазового перехода первого рода с симметричным потенциалом (2). Во второй части приведено аналогичное рассмотрение для несимметричного потенциала

$$U(\ell) = D\ell + \frac{A}{2} \ell^2 + \frac{B}{4} \ell^4 \quad (3)$$



($A < 0, B > 0$), описывающего взаимодействия в ряде практических случаев фазовых переходов. Третья часть посвящена ориентационным фазовым переходам второго рода. В четвертой части результаты анализа магнитных ориентационных фазовых переходов в антиферромагнетиках распространены на структурные фазовые переходы.

I. Фазовый переход первого рода в антиферромагнетике с симметричным потенциалом

Представляя зависимость ℓ от координаты и времени в виде $\ell(\vartheta) = \ell(kx - \omega t)$ и интегрируя (I) для случая $\Delta\ell = \ell_{xx}$ (x - вообще говоря, в произвольном направлении), получаем эквивалентное уравнение:

$$\left[\ell_{\vartheta} - \sqrt{\frac{2}{k^2 - \omega^2}} (U - U_0) \right] \left[\ell_{\vartheta} + \sqrt{\frac{2}{k^2 - \omega^2}} (U - U_0) \right] = 0 \quad (4)$$

(U_0 - константа, являющаяся интегралом уравнения). Если фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k} > 1$, то $U(\ell) \leq U_0$; в случае $v < 1$ $U(\ell) \geq U_0$. Границы изменения ℓ определяются решениями уравнения:

$$\rho^3 + \frac{3B}{2C}\rho^2 + \frac{3A}{C}\rho - \frac{6U_0}{C} = 0 \quad (5)$$

($\rho = \ell^2$), которые обозначим: ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Равновесным фазовым состояниям соответствуют минимумы потенциала $U(\ell)$: $\ell = \ell_I = 0$ и $\ell = \pm \ell_{II} = \pm \left[\frac{-B}{C} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}} \right) \right]^{1/2}$, а максимумам потенциала - значения $\ell = \pm \ell_0$ ($\ell_0^2 = -\frac{B}{C} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}} \right)$). Рассмотрим ряд случаев:

I. $-\sqrt{\rho_1} \leq \ell \leq \sqrt{\rho_1}$, где ρ_1 - наименьший по величине корень уравнения (5).

а) $0 \leq A \leq 3B^2/16C, 0 < U_0 \leq U(\ell_0)$ (рис. Ia)

б) $3B^2/16C \leq A \leq B^2/4C, U(\ell_{II}) \leq U_0 \leq U(\ell_0)$ (рис. Ib).

Значение $A = 3B^2/16C$ соответствует равенству энергий двух равновесных фазовых состояний, а $A = B^2/4C$ - точке лабильности состояния II. В этих случаях все корни уравнения (5) действительны и положительны ($\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$). При этом решением уравнения (4) является периодическая волна

$$\ell = \sqrt{\rho_1} \operatorname{sn} \left[\frac{2K}{\pi} \vartheta, \sqrt{\frac{\rho_1(\rho_3 - \rho_2)}{\rho_2(\rho_3 - \rho_1)}} \right] \left\{ 1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \operatorname{cn}^2 \left[\frac{2K}{\pi} \vartheta, \sqrt{\frac{\rho_1(\rho_3 - \rho_2)}{\rho_2(\rho_3 - \rho_1)}} \right] \right\}^{-1/2} \quad (6)$$

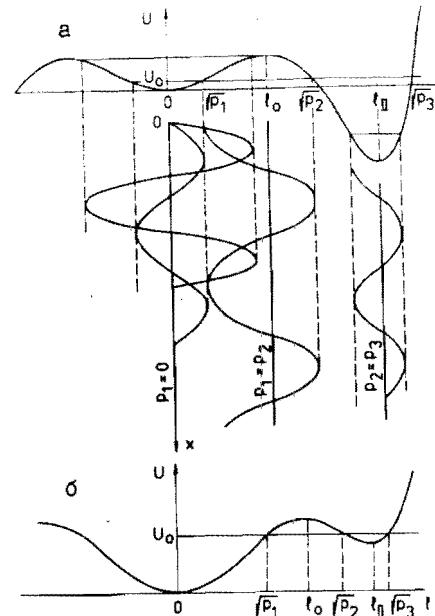


Рис. 1. Эффективный потенциал $U(\ell)$ и конфигурация волновых возбуждений: а) $0 \leq A \leq 3B^2/16C$; б) $3B^2/16C \leq A \leq B^2/4C$.

(Здесь $K(x)$ - полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $x = \sqrt{\frac{\rho_1(\rho_3 - \rho_2)}{\rho_2(\rho_3 - \rho_1)}}$). Соответствующее дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{12K^2} C \rho_1 (\rho_3 - \rho_1) + \kappa^2 \quad (7)$$

в) $3B^2/16C \leq A \leq B^2/4C,$

$$0 < U_0 \leq U(\ell_{II}) \quad (\text{рис. Ib}).$$

В этом случае $\rho_2, \rho_3 = \rho' \pm i\rho''$ - комплексно-сопряженные корни.

$$\ell = \pm \sqrt{\frac{\rho_1 s \left[(1 - \operatorname{cn}(u, x))^2 + s \operatorname{sn}^2(u, x) \right]}{4s + (1 - s)^2 \operatorname{sn}^2(u, x)}}, \quad (8)$$

где $u = \frac{4K}{\pi} \vartheta, \frac{1}{s} = \sqrt{1 - \rho_1 \frac{2\rho' - \rho_1}{\rho_2^2 + \rho_1'^2}}$,

$$x^2 = \frac{\rho_1^2 - \left[\sqrt{\rho_1'^2 + \rho_1''^2} - \sqrt{(\rho' - \rho_1)^2 + \rho_1''^2} \right]^2}{4 \left[\rho_1'^2 + \rho_1''^2 \right] \left[(\rho' - \rho_1)^2 + \rho_1''^2 \right]}$$

(Знак (+) - при $\pi 2n \leq \vartheta \leq \pi(2n+1)$, знак (-) - при $\pi(2n-1) \leq \vartheta \leq \pi 2n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Соответственно

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{12K^2} C \sqrt{(\rho_1'^2 + \rho_1''^2) \left[(\rho' - \rho_1)^2 + \rho_1''^2 \right]} + \kappa^2 \quad (9)$$

В случаях Ia и Ib при $U_0 \ll U(\ell_0)$ и $U_0 \ll U(\ell_{II})$ соответственно, когда корень ρ_1 близок к нулю, как и следовало ожидать, волны (6) и (8) приобретают вид синусоидальной волны возбуждения состояния I:

$$\ell = \sqrt{\rho_1} \sin(kx - \omega t), \quad \omega^2 = A + \kappa^2 \quad (10)$$

В случаях Ia и Ib при $U_0 \rightarrow U(\ell_0)$ ($\rho_1 \rightarrow \rho_2$) волна имеет характер периодической доменной структуры с амплитудой, близкой

к l_0 , движущейся со скоростью $v > 1$. При $p_1 = p_2 = l_0^2$ период такой структуры обращается в бесконечность, а конфигурация доменной стенки описывается выражением

$$l = \pm l_0 \operatorname{sh} \left[\frac{\sqrt{C(p_3 - l_0^2)}}{3\sqrt{v^2 - 1}} l_0 (x - vt) \right] \left\{ \operatorname{ch}^2 \left[\frac{\sqrt{C(p_3 - l_0^2)}}{3\sqrt{v^2 - 1}} l_0 (x - vt) \right] - \frac{l_0^2}{p_3} \right\}^{-1/2}. \quad (II)$$

Приведенные здесь волновые решения (6) и (8) и все рассмотренные дальше периодические волны являются двухпараметрическими. Для заданных значений констант A , B и C , определяющих вид потенциала, два из трех корней уравнения (5), а также частота ω полностью определяются значениями третьего корня, характеризующего амплитуду волны (в рассмотренных случаях p_1) и волновым числом

$$\kappa = 2\pi/L, \quad \text{где } L - \text{длина волны} \left(p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3B}{2C}, p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{3A}{C p_1 p_2 p_3} \right).$$

$$2. \sqrt{p_2} \leq l \leq \sqrt{p_3}$$

$$a) 0 \leq A \leq 3B^2/16C, U(l_{II}) \leq U_0 \leq 0 \quad (\text{рис. 1a}).$$

В этом случае $p_1 < 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$.

$$l = \sqrt{p_2} \left\{ 1 - \frac{p_3 - p_2}{p_3} \operatorname{sn}^2 \left[\frac{K}{\pi} \vartheta, \sqrt{\frac{-p_1(p_3 - p_2)}{p_3(p_2 - p_1)}} \right] \right\}^{-1/2}, \quad (I2)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{3K^2} C p_3 (p_2 - p_1) + \kappa^2; \quad (I3)$$

$$b) 0 \leq A \leq 3B^2/16C, 0 \leq U_0 \leq U(l_0) \quad (\text{рис. 1a});$$

$$в) 3B^2/16C \leq A \leq B^2/4C, U(l_{II}) < U_0 \leq U(l_0) \quad (\text{рис. 1б}).$$

В случаях 2а и 2в (при этом $p_1 > 0$):

$$l = \sqrt{p_3} \left\{ 1 + \frac{p_3 - p_2}{p_2} \operatorname{sn}^2 \left[\frac{K}{\pi} \vartheta, \sqrt{\frac{p_1(p_3 - p_2)}{p_2(p_3 - p_1)}} \right] \right\}^{-1/2}, \quad (I4)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{3K^2} C p_2 (p_3 - p_1) + \kappa^2. \quad (I5)$$

В случаях 2а и 2в при $U_0 \rightarrow U(l_{II})$ (т.е. $p_3 \rightarrow p_2$) получается гармоническая волна возбуждения фазового состояния II:

$$l = l_{II} - \frac{1}{2} (\sqrt{p_3} - \sqrt{p_2}) \cos(\kappa x - \omega t). \quad (I6)$$

$$3. U_0 > U(l_0).$$

В этом случае $p_1, p_2 = p_1 \pm i p''$ - комплексно-сопряженные корни, $p_3 > 0$. Периодическое волновое возбуждение описывается выражениями, приведенными в случае 1в с заменой p_1 на p_3 .

$$4. \sqrt{p_1} \leq l \leq \sqrt{p_2}.$$

Рассматривается случай, когда все корни уравнения (5) действительны и положительны. Это возможно при выполнении одного из следующих условий:

$$a) 0 < A \leq 3B^2/16C, 0 \leq U_0 \leq U(l_0) \quad (\text{рис. 1a}) \text{ или}$$

$$b) 3B^2/16C \leq A \leq B^2/4C, U(l_{II}) \leq U_0 \leq U(l_0) \quad (\text{рис. 1б}).$$

При этом решение уравнения (4) - периодическая волна

$$l = \sqrt{p_1} \left\{ 1 - \frac{p_2 - p_1}{p_2} \operatorname{sn}^2 \left[\frac{K}{\pi} \vartheta, \sqrt{\frac{p_3(p_2 - p_1)}{p_2(p_3 - p_1)}} \right] \right\}^{-1/2}, \quad (I7)$$

$$\omega^2 = -\frac{\pi^2}{3K^2} C p_2 (p_3 - p_1) + \kappa^2 \quad (0 \leq v < 1). \quad (I8)$$

В случае 4а при $U_0 = 0$ (при этом $p_1 = 0$) длина волны стремится к ∞ и получается последовательность бесконечно удаленных друг от друга солитонов, описываемых известным выражением [1,2,3]

$$l = 2 \sqrt{\frac{A}{-B}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{16AC}{3B^2}} \operatorname{ch} 2 \sqrt{\frac{A}{1-v^2}} (x - vt) \right]^{-1/2}, \quad (I9)$$

на фоне равновесного состояния I ($B < 0$).

В случае 4б при $U_0 = U(l_{II})$, когда $p_2 = p_3 = l_{II}^2$, а длина волны стремится к ∞ , аналогично получаются солитоны [1]

$$l = \sqrt{p_1} \left[1 - \frac{l_{II}^2 - p_1}{l_{II}^2} \operatorname{th}^2 \left[\frac{C(l_{II}^2 - p_1)}{3(1-v^2)} l_{II} (x - vt) \right] \right]^{-1/2} \quad (20)$$

на фоне равновесного состояния II (при этом p_1 определяется из условия $U(l_{II}) = U(\sqrt{p_1})$).

При $U_0 = U(l_0)$ амплитуда модуляций в волне (I7) обращается в нуль и получается однородное возбужденное состояние, в котором $l = l_0$.

При фазовом равновесии, т.е. при $A = 3B^2/16C$, движущаяся с постоянной скоростью ($0 \leq v < 1$) доменная стенка (между равновес-

ными состояниями I и II) описывается выражением

$$l^2 = \frac{-3B}{4C} \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{B}{2} \sqrt{\frac{3}{C(1-v^2)}} (x-vt) \right] \right\}^{-1}. \quad (21)$$

В отличие от периодических решений (6), (8), (12), (14), являющихся нелинейным обобщением гармонических колебаний, волны типа (17) специфичны для фазового перехода первого рода. Особенность таких волн в том, что величина l модулируется относительно однородного состояния, соответствующего не минимуму энергии системы, а ее максимуму. При этом энергия волны с увеличением модуляции не увеличивается, как в обычных случаях, а уменьшается.

Возникает вопрос, насколько физически реальны такие волновые возбуждения. В данной работе не анализируются эти возбуждения на устойчивость, хотя проведение такого анализа является актуальным. Представляется очевидным, что однородное возбужденное состояние $l = l_0$ неустойчиво, т.е. существующее в начальный момент какое-либо возмущение его растет со временем. Уменьшающаяся при этом потенциальная энергия компенсируется увеличением кинетической энергии системы. Нет оснований ожидать какого-либо принципиального отличия в отношении неустойчивости периодической волны (17) от характера неустойчивости однородного возбужденного состояния.

Конечно, неустойчивость волновых возбуждений (17) не означает их отсутствия. В связи с этим было бы правильно ставить вопрос о "времени жизни" таких возбуждений. Среда с волновым возбуждением (17) находится в состоянии неустойчивого равновесия. Поэтому такие состояния обладают аномально большим "временем жизни" относительно других возбужденных состояний, характеризующихся нестационарным профилем. Следовательно, следует придавать таким состояниям особую роль в термодинамике магнитной системы. Необходимо отличать собственное "время жизни" возбуждений, обусловленное их неустойчивостью, от "времени жизни" относительно взаимодействий между собой и с другими видами возбуждений системы (спиновыми волнами, упругими колебаниями, неоднородностями среды), которые связаны с диссипацией энергии.

Физическую актуальность рассматриваемых здесь возбуждений можно продемонстрировать на простых моделях. Пусть частица с массой m движется в одномерном потенциале $U(x) = \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{4}x^4$ ($A > 0$, $B > 0$). Соответствующее уравнение:

$$\ddot{x} = -\frac{A}{m}x + \frac{B}{m}x^3. \quad (22)$$

Периодическое решение его:

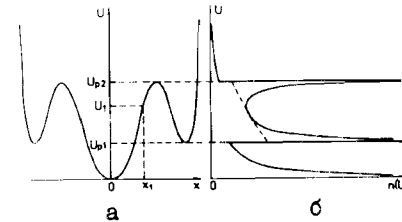
$$x = a \cdot \text{sn} \left(\sqrt{\frac{B}{2m}} b t, \frac{a}{b} \right), \quad (23)$$

где

$$a^2, b^2 = \frac{A}{B} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4mBU_m}{A^2}} \right)$$

(U_m — полная энергия частицы, являющаяся интегралом движения). При $a^2 \rightarrow b^2$ конфигурация решения (23) становится близкой к прямоугольной форме, в полной аналогии с поведением возбуждения (6) в среде в зависимости от $\varphi = (kx - \omega t)$ (при $C \rightarrow 0$). Таким образом, при большой амплитуде колебаний частица значительную часть времени находится в области максимума потенциала (при $x \approx x_p = \sqrt{A/B}$). Поэтому максимум потенциала можно рассматривать как уровень возбуждения с энергией $A^2/4B$, "время жизни" частицы на котором аномально большое.

А теперь рассмотрим финитное одномерное движение классического идеального газа N частиц, находящихся в статистическом равновесии, в потенциальной яме $U(x)$, содержащей максимумы (рис. 2а). Зависимость числа частиц от координаты определяется распределением Больцмана:



определяется распределением Больцмана:

$$n(x) = N \exp \left(\frac{U(x)}{k_B T} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{U(x)}{k_B T} \right) dx \right]^{-1}.$$

Отсюда получается функция распределения частиц по значениям потенциала:

Рис. 2. Конфигурация потенциальной ямы $U(x)$ и соответствующее распределение частиц $n(U)$.

$$n(U) = N \sum_V \frac{1}{U'_V} \exp \left(-\frac{U}{k_B T} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{U(x)}{k_B T} \right) dx \right]^{-1}, \quad (24)$$

где U'_V — градиент потенциала, выраженный через U . Суммирование производится по всем точкам, в которых потенциал принимает данное значение U .

В точках экстремумов, где $U'(x) = 0$, соответствующие члены в сумме (24) имеют резонансный характер. Потенциал вблизи каждого такого экстремального значения U_p можно представить в виде:

$$U \approx U_p + U_p'' (x - x_p)^2 / 2. \quad (25)$$

Поэтому

$$U' \approx \sqrt{2U_p''(U - U_p)}.$$

Следовательно, "резонансные" члены в функции распределения (24) имеют вид

$$n_p(U) = \frac{N}{\sqrt{2U_p''(U-U_p)}} \exp\left(\frac{-U}{k_B T}\right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-U(x)}{k_B T}\right) dx \right]^{-1}. \quad (26)$$

Таким образом, вблизи экстремума потенциала $n(U)$ обратно пропорциональна величине $\sqrt{\pm(U_p-U)}$ (знак (+) - в случае максимума, (-) - в случае минимума потенциала). На рис. 2б показан вид функции распределения, соответствующей рис. 2а.

Аномальное поведение функции распределения $n(U)$ в области максимума потенциала U_p обусловлено тем, что среди N частиц есть также, полная энергия (потенциальная плюс кинетическая) которых незначительно больше, чем U_p , и они проходят область максимума потенциала с очень малой скоростью.

При анализе поведения системы в области фазового перехода почти неподвижной частице, задерживающейся в максимуме потенциала в рассмотренной модели, соответствует, прежде всего, однородное возбужденное состояние в среде при $\ell = \ell_0$. Координатная зависимость величины ℓ приводит к существованию целого спектра периодических волновых возбуждений (17), являющихся в определенном смысле обобщением однородного возбужденного состояния. Такие возбуждения, в отличие от волн, представляющих собой колебания около равновесных состояний и распространяющихся со скоростями $v > 1$, имеют скорости: $0 \leq v < 1$.

По-видимому, также волновые возбуждения принципиально возможны в любом случае, когда существуют термодинамические минимумы, разделенные потенциальным барьером конечной высоты. Но практическая реализация их возможна только при относительно малой высоте барьера, в частности, вблизи точек лабильности при фазовых переходах первого рода.

Наряду с рассмотренными квазиодномерными активационными волновыми возбуждениями (17), можно предположить о возможности трехмерных возбуждений, являющихся решениями уравнения (1) и образующих пространственно-периодическую структуру. Частными случаями таких возбуждений являются однородное возбуждение при $\ell = \ell_0$ и солитон сферической или цилиндрической формы.

II. Фазовый переход первого рода в антиферромагнетике с несимметричным потенциалом (3)

Одним из примеров такого фазового перехода является поворот вектора антиферромагнетизма $\vec{\ell}$ от ромбоэдрической оси (z) к базисной плоскости в гематите под действием магнитного поля H_x , направленного по оси второго порядка. Гамильтониан в этом случае имеет вид [4]:

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{G}{2} m^2 - \frac{K_1}{2} \ell_z^2 - \frac{K_2}{4} \ell_z^4 + K_3 \ell_y^2 \ell_z - \beta m_x \ell_y + \frac{\alpha}{2} (\nabla \vec{\ell})^2 - m_x H_x \right] d\vec{z}. \quad (27)$$

Уравнение Ландау-Лифшица при малых значениях ℓ_x приводится к уравнению (1) (в котором $\ell = \ell_x$) с потенциалом (3), где

$$D = \frac{K_3}{\alpha}, A = -\left(K_1 - \frac{\beta^2}{G} - \frac{\beta H_x}{G}\right) / \alpha, B = \left(K_1 - \frac{\beta^2}{G} - 2K_2\right) / 2\alpha. \quad (28)$$

Потенциал имеет вид, показанный на рис. 3, при температуре, меньшей, чем температура трикритической точки в поле H_y (при $T < T_{TP}$, $B > 0$), если она существует. Два термодинамических минимума соответствуют двум типам доменов, один из которых находится в метастабильном состоянии (состоянии II). В квазиодномерном случае первое

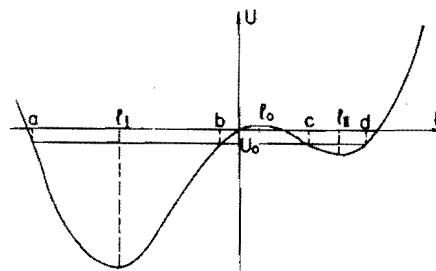


Рис. 3. Конфигурация несимметричного эффективного потенциала.

интегрирование уравнения (1) также дает уравнение (4). Последующее интегрирование (4) через эллиптические интегралы и преобразование решений через эллиптические функции Якоби дает конфигурацию спиновой волны, представляющей собой колебания ℓ около равновесного значения ℓ_{II} :

$$l(\vartheta) = \left[d + b \frac{d-c}{c-b} \operatorname{cn}^2(u, x) \right] \left[1 + \frac{d-c}{c-b} \operatorname{cn}^2(u, x) \right]^{-1}, \quad (29)$$

где $u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B(d-b)(c-a)}{2(\omega^2 - \kappa^2)}} \vartheta$, $x = \sqrt{\frac{(d-c)(b-a)}{(d-b)(c-a)}}$

(a, b, c, d - корни уравнения $U - U_0 = 0$ при условии: $U(l_{II}) < U_0 < U(l_c)$; см. рис.3). Скорость этого волнового возбуждения $v > 1$ ($\omega^2 > \kappa^2$), причем $c \leq l \leq d$.

Периодическое волновое возбуждение, в котором l изменяется в пределах $b \leq l \leq c$, может быть записано в виде

$$l(\vartheta) = \left[d + a \frac{d-b}{b-a} \operatorname{dn}^2(u, x) \right] \left[1 + \frac{d-b}{b-a} \operatorname{dn}^2(u, x) \right]^{-1}, \quad (30)$$

где $u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B(d-b)(c-a)}{2(\kappa^2 - \omega^2)}} \vartheta$, $x = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(d-b)(c-a)}}$.

В частном случае, когда $c = d = l_{II}$, получаем выражение для солитона, представляющего собой локализованное возбуждение метастабильного состояния II:

$$l = \left[a + l_{II} \frac{b-a}{l_{II}-b} \operatorname{ch}^2 u \right] \left[1 + \frac{b-a}{l_{II}-b} \operatorname{ch}^2 u \right]^{-1}. \quad (31)$$

Здесь $u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B(l_{II}-b)(l_{II}-a)}{2(1-v^2)}} (x-vt)$, а величина $(l_{II}-b)$ представляет собой амплитуду солитона. При изменении магнитного поля изменяется амплитуда солитона, и она обращается в нуль в точке лабильности состояния II, когда коэффициент A принимает значение $A_1 = -3\sqrt{BD}/4$. Соответствующее значение магнитного поля:

$$H_1 = \frac{G}{\beta} \left[K_1 - \frac{\beta^2}{G} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K_2^2}{2} \left(K_1 - \frac{\beta^2}{G} - 2K_2 \right)} \right]. \quad (32)$$

В случае $B < 0$ (при $T > T_{TP}$) следует в потенциале (3) учитывать следующий член разложения $C l^6/6$, где $C = (K_1 - \frac{\beta^2}{G} + 4K_2)/8\alpha$. В результате аналогичным образом получаются периодические решения и решение для солитонной волны.

III. Фазовый переход второго рода ($B > 0$)

При этом без потери качественных особенностей решений можно в (2) положить $C = 0$. Тогда границы изменения l определяются действительными решениями биквадратного уравнения $U(l) = U_0$:

$$a, b = \left[-\frac{A}{B} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4BU_0}{A^2}} \right) \right]^{1/2}. \quad (33)$$

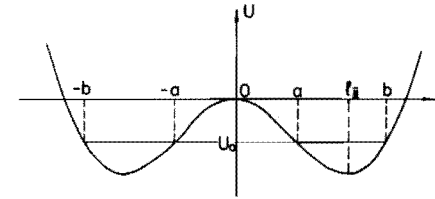
Рассмотрим ряд случаев.

I. $A < 0$.

При этом устойчивым является фазовое состояние II, в котором

$$l_{II} = \sqrt{-A/B}.$$

а) $0 \geq U_0 > U(l_{II})$, $a = \sqrt{-2A/B - b^2} \leq l \leq b$. (рис. 4).



Решением является периодическая волна $l = b \operatorname{dn} \left[\frac{K}{\pi} (\kappa x - \omega t), \frac{\sqrt{2(b^2 + A/B)}}{b} \right]$, (34) возбуждения состояния II:

Рис. 4. Эффективный потенциал при фазовом переходе второго рода. где $\omega^2 = \frac{\pi^2}{2\kappa^2} B b^2 + \kappa^2 (v = \frac{\omega}{\kappa} > 1)$.

Малым амплитудам колебаний ($b - l_{II} \ll l_{II}$) отвечает гармоническая волна

$$l = l_{II} + (b - l_{II}) \cos(\kappa x - \omega t), \quad \omega^2 = -2A + \kappa^2 (v > 1). \quad (35)$$

б) $U_0 \geq 0$, $-b \leq l \leq b$ (в этом случае $b \geq -2A/B$),

$$l = b \operatorname{cn} \left[\frac{2K}{\pi} (\kappa x - \omega t), \frac{b}{\sqrt{2(b^2 + A/B)}} \right], \quad \omega^2 = \frac{\pi^2}{4\kappa^2} (B b^2 + A) + \kappa^2 (v > 1). \quad (36)$$

При $b^2 = -2A/B (U_0 = 0)$ в случаях Iа и Iб длина волны обращается в ∞ и получается солитонообразная волна

$$l = \sqrt{-2A/B} \operatorname{sech} \sqrt{-A/(v^2 - 1)} (x - vt), \quad (37)$$

движущаяся со скоростью $v > 1$, в отличие от случая фазового перехода первого рода (ее энергия относительно устойчивого однородного состояния Π бесконечна).

$$в) U(l_{\bar{\Pi}}) \leq U_0 \leq 0, -a \leq l \leq a,$$

$$l = a \cdot \text{sn} \left[\frac{2K}{\pi}(kx - \omega t), \frac{a}{\sqrt{2A/B - a^2}} \right], \omega^2 = \frac{\pi^2}{4K^2} \left(A + \frac{Ba^2}{2} \right) + \kappa^2 \quad (0 \leq v < 1) \quad (38)$$

- периодическая волна возбуждения, специфическая для фазового перехода второго рода.

При $U_0 \approx 0$ амплитуда a мала и волна имеет гармонический характер:

$$l = a \sin(kx - \omega t), \omega^2 = A + \kappa^2 \quad (0 \leq v < 1). \quad (39)$$

При значениях U_0 , близких к $U(l_{\bar{\Pi}})$, величина a становится близкой к $l_{\bar{\Pi}}$, длина волны аномально увеличивается и волна приобретает характер движущейся периодической доменной структуры. В предельном случае $U_0 = U(l_{\bar{\Pi}})$ из (38) получаем выражение для стенки между двумя доменами фазового состояния $\Pi (a_1, a_2 = \pm \sqrt{A/B})$:

$$l = \pm \sqrt{A/B} \operatorname{th} \left[\sqrt{A/2(1-v^2)}(kx - \omega t) \right]. \quad (40)$$

2. $A > 0$.

Этому случаю соответствует основное фазовое состояние I, в котором $l = 0$. При этом $U_0 \geq 0$. Волна возбуждения имеет вид

$$l = b \sqrt{\frac{(2A+Bb^2)}{2(A+Bb^2)}} \operatorname{sd} \left[\frac{2K}{\pi}(kx - \omega t), \sqrt{\frac{Bb^2}{2(A+Bb^2)}} \right], \omega^2 = \frac{\pi^2}{4K^2} (A+Bb^2) + \kappa^2 (v > 1). \quad (41)$$

3. $A = 0$ (точка фазового перехода второго рода). Волна (41) приобретает вид

$$l = \frac{b}{\sqrt{2}} \operatorname{sd} \left[1, 18(kx - \omega t), \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \omega^2 = 0,72 B b^2 + \kappa^2 \quad (v > 1). \quad (42)$$

4. $A = B = 0, C > 0$ (трикритическая точка).

$$l = b \left\{ 1 + \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{cn} [2(kx - \omega t); 0,26]}{1 - \operatorname{cn} [2(kx - \omega t); 0,26]} \right\}^{-1}, \omega^2 = 0,56 C b^4 + \kappa^2. \quad (43)$$

5. Двухкомпонентное решение уравнения $l'' - \bar{l} = Al + B\bar{l}^3$.
Решение, подобное простой гармонической волне $a e^{i(kx - \omega t)}$, являющейся решением линейной части этого уравнения, имеет вид

$$l = a e^{i(kx - \omega t)} \left[1 - \frac{B}{8A} a^2 e^{2i(kx - \omega t)} \right]^{-1}. \quad (44)$$

В отличие от всех рассмотренных случаев, частота не зависит от амплитуды волны:

$$\omega^2 = A + \kappa^2. \quad (45)$$

Решение (44) - комплексно (поэтому оно не имеет непосредственного отношения к рассматриваемым фазовым переходам), т.е. может рассматриваться как связанное состояние двух волновых процессов ($l = l_1 + i l_2$).

IV. Структурные фазовые переходы смещения

Результаты анализа возбуждений в антиферромагнетике можно непосредственно перенести на структурные фазовые переходы смещения, когда величина смещения ионов существенно меньше параметров кристаллической решетки. Имеются в виду случаи, когда гамильтониан может быть представлен в виде ^{16/}:

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{A}{2} u_i^2 + \frac{B}{4} u_i^4 + \frac{C}{6} u_i^6 + \frac{m_i}{2} \dot{u}_i^2 \right) + \sum_{ij} \frac{C_{ij}}{2} (u_i - u_j)^2 \quad (46)$$

(u_i - смещение подвижного иона относительно некоторого тяжелого иона или относительно основной кристаллической решетки, m_i - масса этого иона).

Имея в виду квазиодномерные волновые возбуждения, в длинноволновом приближении, когда величины u_i мало изменяются на расстоянии периода кристаллической решетки d_0 в заданном направлении, гамильтониан (46) можно записать в виде:

$$\mathcal{H} = \int \frac{dx}{d_0} \left[\frac{\rho(x)}{2m} + \frac{A}{2} u^2(x) + \frac{B}{4} u^4(x) + \frac{C}{6} u^6(x) + \frac{m C_0^2}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] \quad (47)$$

(полагаем, что фазовый переход связан со смещениями ионов одного вида; C_0 - скорость маломплитудных звуковых волн). Уравнение для $u(x)$, соответствующее (47), имеет вид

$$u_{xx} - \frac{1}{c_0^2} u_{tt} = \frac{1}{m c_0^2} (A u + B u^3 + C u^5), \quad (48)$$

т.е. полностью аналогично уравнению (I).

Заключение

Таким образом, анализ эффективного уравнения (I), описывающего динамическое поведение антиферромагнетика вблизи точки ориентационного фазового перехода, позволяет получить конфигурации целого набора периодических квазиодномерных волновых возбуждений. Часть этих возбуждений является естественным обобщением простых спиновых волн, удовлетворяющих линейным уравнениям. В случае фазового перехода первого рода при предельных значениях амплитуды (близких к величине, соответствующей максимуму эффективного потенциала) такие возбуждения приобретают вид периодической доменной структуры, движущейся со скоростью $v > 1$. В симметричной волне (6) соседние домены различаются лишь знаком при ℓ , а в несимметричной (I4) — одинаковые по форме и полярности домены разделены относительно узкими областями, в которых ℓ существенно больше по абсолютной величине.

Наряду с этим оказываются возможными волновые периодические возбуждения (см. (I7), (30), (38)) активационного характера, специфические для фазового перехода — в том смысле, что их энергия с увеличением амплитуды изменения ℓ в волне уменьшается, а скорость v удовлетворяет условию $0 \leq v < 1$. При фазовом переходе первого рода частным, предельным случаем такой волны является солитон динамического типа, представляющий собой возбуждение метастабильного фазового состояния. Сама периодическая волна (I7) может рассматриваться как последовательность расположенных на конечном расстоянии друг от друга солитонов. При определенном минимальном расстоянии между солитонами они полностью "сливаются" и получается однородное возбужденное состояние. Аналогична ситуация в случае фазового перехода второго рода (см. (38)). Только вместо солитонов здесь выступают периодически чередующиеся по знаку ℓ возбужденные домены несимметричного фазового состояния ($\ell \neq 0$). Увеличение энергии такой волны (при неизменной скорости) сопровождается увеличением отношения ширины доменной стенки к ширине каждого домена, а скорость удовлетворяет условию $0 \leq v < 1$. При энергии, близкой к максимально возможной, возбуждение приобретает вид синусоидальной волны (39) на "фоне" однородного возбужденного состояния, в котором $\ell = 0$.

Все рассмотренные волновые возбуждения представляют собой точные решения нелинейного уравнения в широком диапазоне значений пара-

метров. Но экспериментальное наблюдение их особенностей представляется возможным лишь в непосредственной близости к точке фазового перехода второго рода или к точкам лабильности при фазовом переходе первого рода, когда энергия волны аномально уменьшается. В особенности это относится к волнам активационного характера. Простая динамическая модель движения частиц в негармоническом потенциале свидетельствует о реальности возникновения таких волн (периодических и солитонных).

Актуальным является вопрос об эффективном "времени жизни" рассмотренных волновых возбуждений и о термодинамике антиферромагнетика с учетом этих возбуждений.

Литература

1. В.В.Нитц. ОИЯИ, Р17-87-28, Дубна, 1987.
2. В.Г.Картавенко. ЯФ, 40, в. 2(8), 377, 1984.
3. I.V.Varashenkov, V.G.Makhankov, JINR, E2-84-173, Dubna, 1984.
4. И.Е.Дзялошинский. ЖЭТФ, 32, 1547, 1957.
5. Ю.С.Сикорский. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, М.-Л., ОНТИ, 1936, с.21.
6. Y.Ishibashi, Y.Takagi. J. Phys. Soc. Japan, 33, 1, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.
Д3,4,17-86-747	Труды У Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р. 50 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Нитц В.В.
Эллиптические волны при ориентационном фазовом переходе в антиферромагнетике

P17-87-121

Рассмотрены квазиодномерные периодические волновые решения нелинейных уравнений в частных производных, описывающих динамические процессы вблизи точки ориентационного фазового перехода в антиферромагнетике. Наряду с нелинейными волнами, являющимися обобщением простых спиновых волн, проанализированы волновые возбуждения активационного характера, специфические для фазовых переходов. Частными случаями этих возбуждений являются динамические солитоны в случае перехода первого рода и периодические доменные структуры при фазовом переходе второго рода. Результаты анализа применимы к структурным фазовым переходам смещения.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Nietz V.V.
Elliptic Waves at Orientational Phase Transition
in Antiferromagnets

P17-87-121

One-dimensional periodical wave solutions of nonlinear equations with partial derivatives describing dynamical processes near the point of the orientational phase transitions in antiferromagnets are considered. Along with the nonlinear waves being the generalization of the usual spin waves the wave excitations of activation character specific for phase transitions are analysed. Particular cases of these excitations are dynamical solitons in the case of first order transition and periodical domain structures in the second order transitions. The analysis results are applicable to structural phase transitions of the displacement.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987