сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-87-12

Р.Гелерак

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГАУССОВСКИХ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Случай сильной связи

1987

§1. ВВЕДЕНИЕ

Существует обширный класс решеточных спиновых систем, для которых богатая информация относительно фазовой диаграммы может быть получена вне рамок низкотемпературных разложений. В предыдущих работах [1] мы показали, что методы работ [2,3] могут быть применены для исследования фазовой диаграммы некоторого класса непрерывных классических газов в большом каноническом ансамбле Гиббса.

Взаимодействие частиц определяется положительно определенным парным потенциалом. Используя некоторые корреляционные неравенства типа неравенств Жинибра, в [1] мы сформулировали новый критерий независимости предельного гиббсовского состояния от граничных условий. Однако эффективное использование результата [1] предполагает преодоление серьезных технических проблем. Одна из них — это задача о независимости свободной энергии от достаточно широкого класса граничных условий. В случае сверхустойчивых взаимодействий она решена в наиболее общей формулировке в [4]. Однако предположение о нейтральности системы в целом, необходимое в [1], влечет за собой нарушение свойства сверхустойчивости в общем случае. Отметим также, что существуют даже одномерные системы, где независимость свободной энергии от граничных условий не имеет места. Это влечет за собой, в свою очередь, появление кристаллического упорядочения в системе. Подобные вопросы обсуждаются в [5].

Основная техника, использованная в [1] для исследования фазовых диаграмм нейтральных классических газов, — это так называемое преобразование синус-Гордона. Первоначально такой метод был использован в работе Зигерта [6]; впоследствии эта техника была значительно усовершенствована в работах [7].

На основе разультатов работ [1,7] ожидается, что для произвольного равновесного состояния Гиббса, описывающего систему в термодинамическом пределе, должна существовать некоторая негауссовская мера на функциональном пространстве обобщенных функций. Такая точка зрения является основной мотивировкой данной работы.

В этой работе мы исследуем фазовую диаграмму модели, соответствующей тригонометрическому возмущению гауссовской меры, определенной на пространстве обобщенных функций умеренного роста. При использовании некоторых корреляционных неравенств типа неравенств Жинибра оказывается, что эта функциональная проблема гораздо проще, чем оригинальная задача в [1]. Мы доказываем общую версию теоремы Ван Хова, а потом, используя то обстоятельство, что технические оценки на условные корреляционные функции, которые необходимо получить в оригинальной задаче из /1/, здесь не нужны, быстро получаем теорему о единственности предельной гиббсовской функциональной меры.

§2. ВВОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Обозначим через $S'(R^d)$ пространство обобщенных функций умеренного роста, а через $\beta(S'(R^d))$— его алгебру борелевских множеств. Подчеркнем, что пара $\{S'(R^d), \beta(S'(R^d))\}$ является стандартным измеримым пространством, поэтому здесь можно использовать все конвенциональные средства теории вероятности.

Пусть V означает непрерывное, трансляционно-инвариантное и положительно определенное ядро на пространстве $S(R^d)$. Тогда, используя теорему Минлоса, получаем, что функционал

$$S(R^d) \ni f \to \Gamma(f) = \exp - \frac{1}{2} V(f, f) , \tag{2.1}$$

где

$$V(f, f) = \int dxdy\, f(x)\, V(x - y)\, f(y) , \tag{2.2}$$

определяет единственным образом некоторую вероятностную борелевскую меру Гаусса μ_V°, такую, что верно

$$\Gamma(f) = \int_{S'(R^d)} e^{i\phi(f)} \quad \mu_V^\circ(d\phi) \equiv \mu_V^\circ(e^{i\phi(f)}) . \tag{2.3}$$

Будем предполагать на протяжении этой работы, что $0 < \hat{V}(k) = (2\pi)^{-d/2} \times \times \int e^{-ikx} V(x)dx$ принадлежит к пространству $L_1(R^d)$. Это эквивалентно предположению о том, что $V(0) < \infty$. Определим линейный оператор

$$V^{1/2} : S(R^d) \to L\ (R^d) \tag{2.4}$$

формулой

$$V^{1/2} f \equiv (\hat{V}(k)^{1/2} \hat{f})^{\vee}. \tag{2.5}$$

Используя $V^{1/2}$, определим скалярное произведение $(. ,.)_V$ на пространстве $S(R^d)$:

$$(f, g)_V \equiv (V^{1/2} f,\ V^{1/2} g) . \tag{2.6}$$

Метрическое пополнения пары $(S(R^d), (.,.)_V)$ обозначим через $\mathcal{H}(V)$. Для произвольной открытой области $\Lambda \subset R^d$ определим пространство $\mathcal{H}_\Lambda(V)$ как подпространство из $\mathcal{H}(V)$, состоящее из тех элементов $\phi \in \mathcal{H}(V)$, которые имеют компактные носители в области Λ.

Тогда из предположения $V(0) < \infty$ и теоремы о мажорированной сходимости легко следует, что пространство $C_0^\infty(\Lambda)$ плотно в $\mathcal{H}_\Lambda(V)$. Через $\mathcal{H}(\mu_V^\circ)$ обозначим метрическое пополнение (в норме $L^2(\mu_V^\circ)$ линейной оболочки случайных элементов вида $\{\phi(f), f \in S(R^d)\}$. Отображение $f \to \mathcal{H}(\mu_V^\circ)$ является изометрическим, и его можно продолжить до унитарного изоморфизма между $\mathcal{H}(V)$ и $\mathcal{H}(\mu_V^\circ)$. Для заданного $f \in \mathcal{H}(V)$ будем обозначать через $\phi(f)$ тот элемент в $\mathcal{H}(\mu_V^\circ)$, который соответствует элементу f этого изоморфизма. Для произвольного множества $F \neq S \subset R^d$ обозначим через $\Sigma(S)$ (соответственно $\hat{\Sigma}(S)$) минимальную σ-алгебру, генерируемую семейством случайных элементов $\{\phi(f) \mid f \in S(R^d),\ \mathrm{supp} f \subset S\}$ (соответственно, $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}(V)$, $\mathrm{supp}\, f \subset S\}$. Очевидно включение $\Sigma(S) \subset \hat{\Sigma}(S)$.

В случае, когда множество S является открытым, а $f \in \mathcal{H}(V)$ такое, что $\mathrm{supp} \subset S$, существует последовательность $\{f_n\}_1^\infty \subset C_0^\infty(R^d)$, для которой $\|\phi(f_n) - \phi(f)\|_{L^2(\mu_V^\circ)} = \|f_n - f\|_V \to 0$ для $n \to \infty$. Это значит, что имеется равенство $\Sigma(S) = \hat{\Sigma}(S)$ для открытых множеств $S \subset R^d$. Для замкнутого $S \subset R^d$ определим

$$\Sigma(S) = \bigcap_{\epsilon > 0} \Sigma(S^\epsilon) , \tag{2.7}$$

где

$$S^\epsilon = \{x \in R^d \mid \mathrm{dist}(x, S) < \epsilon\}.$$

Тогда имеем

$$\Sigma(S) \equiv \bigcap_{\epsilon > 0} \Sigma(S^\epsilon) = \bigcap_{\epsilon > 0} \hat{\Sigma}(S^\epsilon) \equiv \hat{\Sigma}(S) . \tag{2.8}$$

Хорошо известен следующий результат из общей теории гауссовских процессов /8-10/

Лемма 2.1

Пусть $\Lambda \subset R^d$Ж открытая область. Тогда существует борелевское множество $R(\Lambda) \subset S'(R^d)$ полной μ_V° меры, такое, что для произвольного $\eta \in R(\Lambda)$ условное математическое ожидание случайного функционала $F(\phi)$ относительно σ-алгебры $\Sigma(\Lambda^c)$ и меры μ_V° задаются формулой

$$E_{\mu_V^\circ} \{F(\phi) \mid \Sigma(\Lambda\ )\}(\eta) = \mu^\circ_{S_{\Lambda^c}} (F(\phi' + \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta))) , \tag{2.9}$$

где, по определению, Π_{Λ^c} — ортогональный проектор в пространстве $\mathcal{H}(V)$ на замкнутое подпространство $\mathcal{H}_{\Lambda^c}(V)$, ϕ' — гауссовское случайное поле с ковариацией

$$S_{\Lambda^c}(x, y) \equiv ((1 - \Pi_{\Lambda^c}) \circ V)(x,y) , \tag{2.10}$$

$\Pi^*_{\Lambda^c} : R(\Lambda) \to S(R^d)$ — дуальное отображение операции Π_{Λ^c}. Обозначим (в смысле обобщенных функций)

$$K_{\Lambda^c}(x, y) = (V - S_{\Lambda^c})(x, y) . \tag{2.11}$$

Тогда разложение

$$\phi = \phi' + \Pi^*_{\Lambda^c}(\phi) - \tag{2.12}$$

это ортогональное разложение процесса ϕ относительно σ-алгебры $\Sigma(\Lambda^c)$. Отметим также следующие формулы:

$$\begin{gathered} \mu^\circ_V(\phi'(x)\,\phi'(y)) = S_{\Lambda^c}(x, y) , \\ \mu^\circ_V(\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi)(x)\,\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi)(y)) = K_{\Lambda^c}(x, y) . \end{gathered} \tag{2.13}$$

Произвольную вероятностную меру Бореля на пространстве $S'(R^d)$, для которой верна оценка

$$\underset{0 < c \in R}{\exists} \quad \mu(\phi^2(f)) \le cV(f, f) , \tag{2.14}$$

будем называть V-регулярной. Множество V-регулярных мер обозначим через $R(V)$. Возьмем произвольную меру $\mu \in R(V)$ и обозначим через ϕ_μ случайный процесс, индексированный пространством $\mathcal{H}(V)$, который каноническим образом связан с мерой μ. Определим новый обобщенный процесс $\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi_\mu)$ формулой:

$$(\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi_\mu), f) = (\phi_\mu , \Pi_{\Lambda^c}(f)) . \tag{2.15}$$

Тогда из оценки (2.2) получим:

$$\int (\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi_\mu), f)^2\, \mu(d\phi_\mu) \le cK_{\Lambda^c}(f, f) . \tag{2.15'}$$

Из этой оценки следует, что обобщенный процесс $\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)$ определен хорошо и является $\Sigma_\mu(\Lambda^c)$ измеримым $L^2(\mu)$ процессом. Из наших предположений относительно V следует существование последовательности $(\chi_n) \subset C^\infty_0(R^d)$, сходящейся к $\mathcal{H}(V)$ мере для $n \to \infty$ в топологии пространства $\mathcal{H}(V)$:

$$\lim_{n\to\infty} V(\chi_n, \chi_n) = V(x, x) = V(0) < \infty .$$

Будем говорить, что область $\Lambda \subset R^d$ есть V-регулярная, когда ядро $K_{\Lambda^c}(x, x)$ является непрерывной функцией аргумента $x \in \mathrm{Int}\,\Lambda$. Из оценок (2.14) и (2.15) и общих рассуждений следует, что в случае V-регулярного Λ можно определить измеримую версию элемента $\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi)(x)$ для произвольного $x \in \mathrm{Int}\,\Lambda$.

Определение

Пусть $V(0) < \infty$. Произвольную вероятностную меру μ на измеримом пространстве $\{S'(R^d), \beta(S'(R^d))\}$ назовем гиббсовской мерой, соответствующей взаимодействию

$$(X_\Lambda(\phi))_\Lambda = (\exp z \int_\Lambda :\cos a\phi:_V(x)\,dx)_\Lambda$$

тогда и только тогда, когда для произвольной ограниченной области $\Lambda \subset R^d$ условные математические ожидания относительно меры μ и σ-алгебры $\Sigma_\mu(\Lambda^c)$ задаются формулами:

$$E_\mu\{F \mid \Sigma_\mu(\Lambda^c)\}(\cdot) = E_{\mu_\Lambda}\{F \mid \Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot) , \tag{2,16}$$

где

$$\mu_\Lambda(d\phi) = (Z_\Lambda(z))^{-1} X_\Lambda(\phi)\,\mu^\circ_V(d\phi) , \tag{2.17}$$

$$Z_\Lambda(z) = \int_{S'(R^d)} X_\Lambda(\phi)\,\mu^\circ_V(d\phi) . \tag{2.18}$$

Множества всех мер Гиббса, соответствующие взаимодействию $(X_\Lambda(\phi))_\Lambda$, обозначим через $\mathcal{G}(z)$. Множество $\mathcal{G}(z) \cap R(V)$ обозначим через $\mathcal{G}_r(z)$, и его элементы назовем регулярными мерами Гиббса. Хорошо известно, что целое множество $\mathcal{G}_r(z)$ можно получить, беря соответствующие выпуклые комбинации термодинамических пределов $E_{\mu_\Lambda} \times \times \{-|\Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot)$. Используя обратное утверждение о мартингалах, получаем результат о существовании единственного предела $\lim\limits_{\Lambda} E_{\mu_\Lambda}\{F(\phi)|\Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot)$ для почти всех значений $(\cdot)$ при предположении, что $F \in L^1(\mu)$, а $\{\Lambda\}$ является счетно-генерируемым фильтром ограниченных подмножеств R^d.

Отметим, что прямые вычисления дают формулу

$$E_{\mu_\Lambda}\{F(\phi)|\Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot) = \frac{E_{\mu^\circ_V}\{F(\phi)X_\Lambda|\Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot)}{E_{\mu^\circ_V}\{X_\Lambda|\Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot)} \equiv \tag{2.19}$$

$$\equiv (Z^{(\cdot)}_\Lambda(z))^{-1} E_{\mu^\circ_V}\{F \cdot X_\Lambda|\Sigma(\Lambda^c)\}(\cdot).$$

Будем говорить, что счетно-генерируемый фильтр $\{\Lambda\}$, состоящий из ограниченных открытых областей, является V-допустимым, в случае, когда существует некоторый другой счетно-генерируемый фильтр $\{\Lambda'\}$, состоящий из V-регулярных, кругового типа множеств (см. определения в начале параграфа 4), который можно вписать в фильтр $\{\Lambda\}$.

Множество мер Гиббса, которое получаем, беря выпуклые оболочки термодинамических пределов величин $E_{\mu_\Lambda}\{-|\Sigma(\Lambda^c)\}$, когда $\{\Lambda\}$ пробегает совокупность всех счетно-генерируемых, V-допустимых фильтров, обозначим через $'\mathcal{G}_{(r)}(z)$.

Величина

$$p_\Lambda(z) = -\frac{1}{|\Lambda|}\ln Z_\Lambda(z) \tag{2.20}$$

называется свободной энергией в конечной области, а ее термодинамический предел (см. ниже)

$$p_\infty(z) = \lim_{\{\Lambda\}} p_\Lambda(z)$$

назовем свободной энергией в бесконечном объеме. Значение z_o, для которого $p_\infty(z)$ является дифференцируемой функцией аргумента z, назовем регулярным. Сформулируем теперь основной результат этой работы и наметим его доказательство.

Теорема 2.1

Предположим, что $V(0) < \infty$ и что V является регулярной ковариацией в смысле определения 4.1.

Тогда для произвольного регулярного значения химической активности $z_o > 0$, множество регулярных мер Гиббса $'\mathcal{G}_r(z_o)$, которые имеют трансляционно-инвариантный первый момент, состоит только из одного элемента $\mu_\infty(z_o)$. Мера Гиббса $\mu_\infty(z_o)$ получается как предел $\lim\limits_{\Lambda_n} \mu_{\Lambda_n}(z)$, где (Λ_n) — произвольная последовательность ограниченных множеств, монотонно сходящаяся к R^d.

Набросок доказательства на основе результатов § 3 и § 4

Предположим, что $\{\Lambda_n\}$ — произвольная, монотонная последовательность ограниченных областей в R^d, сходящаяся к R^d. Существование единственного термодинамического предела $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n}$ доказано в /7/. Там же доказано существование единственного предела $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\Lambda_n}(z) = p_\infty(z)$, а также его независимость от последовательности $\{\Lambda_n\}$. Самое простое доказательство существования единственного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n}(d\phi) = \mu_\infty(z)$ следует сразу из корреляционных неравенств (3.1) и (3.2), которые верны также в случае, когда вместо гауссовой меры $\mu^\circ_{S\,\Lambda^c}$ берется мера μ°_V. В частности, из неравенства (3.2) получаем следствие, что мера $\mu_\infty(z)$ V-регулярна. Неравенство (3.4) верно для гауссовской части, равной μ°_V, из чего следует экстремальность меры $\mu\ (z)$ (для всех $z \geq 0$). Мера $\mu_\infty(z)$ соответствует так называемым пустым граничным условиям.

Определим условные свободные энергии:

$$p^\eta_\Lambda(z) = -\frac{1}{|\Lambda|}\ln Z^\eta_\Lambda(z), \tag{2.24}$$

где, по определению,

$$Z^\eta_\Lambda(z) = \int \mu^\circ_{S\,\Lambda^c}(d\phi)\exp\Big(z\int_\Lambda :\cos\alpha(\phi(x) + \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)):_V dx\Big), \tag{2.22}$$

а $\eta \in S'(R^d)$ выбрано случайным образом.

В параграфе 4 этой работы доказывается, что существует единственный предел

$$\lim_{n\to\infty} p^\eta_{\Lambda_n}(z) = \lim_{n\to\infty} p^{\eta=0}_{\Lambda_n}(z) = p^\circ_\infty(z), \tag{2.23}$$

который равен $p^{\circ}_{\infty}(z)$ в случае, когда $\{\Lambda_n\}$wsV -регулярная, кругового типа последовательность ограниченных областей вR^d.

Предполагая дополнительно, что $\{\Lambda_n\}$ — это sV-регулярная последовательность с такими же свойствами, доказываем в определении 4.2 равенство $p^{\eta=0}_{\infty}(z) = p_{\infty}(z)$.

Предположим теперь, что $\{\Lambda\}$ — произвольный счетно-генерируемый wV-допустимый фильтр, такой, что wV — регулярная кругового типа последовательность $\{Y_n\}$ может быть вписана в него. Тогда из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} p^{\eta}_{Y_n}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} p^{\eta=0}_{Y_n}(z)$ и известных свойств вогнутых функций, а также из предположения о трансляционной инвариантности следует равенство.

$$\lim_{n\to\infty} \langle :\cos\alpha(\phi(x) + \Pi^*_{Y_n^c}(\eta)(x)):_V\rangle^{\eta}_{Y_n}(z) = \\ = \lim_{n\to\infty} \langle :\cos\alpha\,\phi(x):_V\rangle^{\eta=0}_{Y_n}(z). \tag{2.24}$$

Используя утверждение о мартингальной сходимости, получаем равенство:

$$\lim_{\{\Lambda\}} \langle :\cos\alpha(\phi(x) + \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)):_V\rangle^{\eta}_{\Lambda}(z) = \\ = \lim_{n\to\infty} \langle :\cos\alpha\,\phi(0):\rangle^{\eta=0}_{Y_n}(z),$$

верное для μ — почти всех $\eta\in S'(R^d)$ в случае, когда $\mu\in R(V)$. Применяя теперь закон бутстрапа, сформулированный в следствии 3.1., получаем, что все пределы типа

$$\lim_{\{\Lambda\}} \langle \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(x_i) + \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x_i):_V \prod_{j=1}^{m} :\sin\alpha(\phi(y_j) + \\ + \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(y_j)):_V\rangle^{\eta}_{\Lambda}$$

сходятся к их значению с $\eta=0$. Это имеет место для μ — почти всех $\eta\in S'(R^d)$ и для всех z -регулярных.

Предполагая дополнительно, что $\{\Lambda\}$ — произвольный sV-допустимый фильтр и используя подобные аргументы, доказываем равенство состояний $\mu_{\infty}(z)$ и $\mu^{\eta=0}_{\infty}(z)$.

§ 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И РЕЗУКЦИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Перечислим некоторые корреляционные неравенства типа неравенств Жинибра /3;7-11/, которые играют существенную роль при доказательстве теоремы 2.1, а также перечислим некоторые их следствия.

Утверждение 3

Пусть $\mu\in R(V)$, $z>0$, где Λ — заданная ограниченная область. Тогда для μ почти всех $\eta\in S'(R^d)$ верны следующие неравенства:

$$\langle \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi(x_i):_V \,;\, \prod_{j=1}^{m} :\cos\alpha\phi(y_j):_V\rangle^{T,\eta=0}_{\Lambda}(z) \geq 0 \tag{3.1}$$

$$\forall_{t\in R_1} \quad \langle e^{t\phi(f)} \,;\, \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi(x_i):_V\rangle^{T,\eta=0}_{\Lambda}(z) \leq 0, \tag{3.2}$$

для произвольного числа δ имеем

$$0 \leq \langle (\prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(x_i) + a(x_i):_V - \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi'(x_i):_V) \times \\ \times \exp(\pm\,\delta :\cos\alpha(\phi(x) + \beta(x)):_V :\cos\alpha\phi'(x):_V\rangle^{(\eta=0,\eta)}_{\Lambda}(z), \tag{3.3}$$

где $a(x)$, $\beta(x)$ — произвольные ограниченные функции, определенные на множестве Λ, а $\langle - \rangle^{\eta,\eta}_{\Lambda}(z)$ обозначает тензорное произведение мер. Для произвольной функции a, определенной на множестве Λ, имеет место оценка:

$$|\langle \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(x_i) + a(x_i)):_V\rangle^{\eta}_{\Lambda}(z)| \leq \langle \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi(x_i):_V\rangle^{\eta=0}_{\Lambda}(z). \tag{3.4}$$

Доказательство

Доказательства всех таких неравенств однотипны и используют известный метод удвоения переменных, инвариантность гауссовых мер относительно ортогональных преобразований и элементарную тригонометрию. Неравенства (3.1) и (3.2), по существу, доказаны в работах /1,3/, а неравенства (3.3) и (3.4) проверены в работах /7/.

Следствие 3.1 (закон будстрапа)

Предположим, что (Λ_n) — некоторая последовательность ограниченных и V-регулярных областей в R^d, которая сходится монотонно к R^d.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} <:\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x})):_V>^{\eta}_{\Lambda_n}(z) = \tag{3.5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} <:\cos\alpha(\phi(\mathbf{x})):_V>^{\eta=0}_{\Lambda_n}(z) \equiv <:\cos\alpha\phi(0):_V>^{0}_{\infty}(z) > 0 .$$

Тогда для всех $n \geq 1$ и $k \geq 0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}_i) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i)):_V \prod_{j=1}^{k} :\sin\alpha(\phi(\mathbf{x}_j) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_j)):_V>^{\eta}_{\Lambda_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}_i) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i)):_V \prod_{j=1}^{k} :\sin\alpha(\phi(y_j) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(y_j)>_{\Lambda_n} . \tag{3.6}$$

Доказательство

Существование пределов, стоящих слева в формулах (3.5) и (3.6), следует из применения мартингальной теоремы.

Применимы корреляционные неравенства (3.3) для $\alpha_L = \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i)$, $L = 1,\dots,n$; $\beta(\mathbf{x}) = \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x})$. Разлагая экспоненту, содержащую параметр δ в степени δ, получим:

$$0 \leq \; < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}_i) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i)::>^{\eta}_{\Lambda_n} - < \prod_{L=1}^{n} :\cos\alpha\phi(\mathbf{x}_i):_V>^{\eta}_{\Lambda_n} \pm$$

$$\pm\; \delta[< \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}_i) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i):_V :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}):_V>^{\eta}_{\Lambda} \times$$

$$\times <:\cos\alpha\,\phi(\mathbf{x}):_V>^{\eta=0}_{\Lambda} -$$

$$- < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\,\phi(\mathbf{x}_i):_V :\cos\alpha\phi(\mathbf{x}):_V>^{\eta=0}_{\Lambda} \times$$

$$\times <:\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x})):_V>^{\eta}_{\Lambda}] + O_{\Lambda}(\delta^2).$$

Перейдем теперь к термодинамическому пределу, используя индуктивные предположения (3.5) и (3.6), откуда получим:

$$\lim_{n\to\infty} < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}_i) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i)):_V :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x})):_V>^{\eta}_{\Lambda} =$$

$$= < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi(\mathbf{x}_i):_V :\cos\alpha\phi(\mathbf{x}):_V>^{\eta=0}_{\infty} .$$

Применение закона индукции завершает доказательство в случае $k = 0$. Возьмем теперь $\alpha \in [0,\pi/2)$. Из неравенства (3.4) получим:

$$< \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi:_V(\mathbf{x}_i) \sin\alpha(\phi(y) + \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(y)):_V>^{\eta}_{\Lambda} \leq$$

$$\leq\; < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi:_V(\mathbf{x}_i) : \cos\alpha\phi(y):_V>^{\eta=0}_{\Lambda} ,$$

откуда сразу следует

$$< \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi(\mathbf{x}_i):_V : \sin\alpha\phi(y):_V>^{\eta}_{\infty} = 0.$$

Элементарный расчет тогда дает

$$\lim_{n\to\infty} < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha(\phi(\mathbf{x}_i) + \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(\mathbf{x}_i)):_V \prod_{j=1}^{k} :\sin\alpha(\phi(y_j) +$$

$$+ \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(y_j)):_V>^{\eta}_{\Lambda_n} = < \prod_{i=1}^{n} :\cos\alpha\phi(\mathbf{x}_i):_V \prod_{j=1}^{k} :\sin\alpha\phi(y_j):_V>^{\eta=0}_{\infty} .$$

Следствие 3.2

1. Предположим, что V — такое, где норма оператора $V^{1/2}$ из пространства $L^1(R^d)$ в пространстве $L^2(R^d)$ конечна. Тогда множество

$\mathcal{G}_r(z)$ регулярных мер Гиббса для произвольного $z>0$ является компактным в топологии слабой сходимости.

2. Пусть $z>0$. Тогда мера $<\ >^{\circ}_{\infty}(z)$ является экстремальной фазой в множестве $\mathcal{G}^T_r(z)$.

Доказательство

1. Для характеристического функционала меры $<\ >^{\eta}_{\Lambda}(z)$ имеем следующее представление:

$$<e^{\zeta\phi(f)}>^{\eta}_{\Lambda}(z) =$$

$$= e^{\frac{\zeta^2}{2}S_{\Lambda^c}(f,f)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda^{\otimes n}} d(x)_n \prod_{i=1}^{n} [e^{i\zeta\alpha_i(f*S_{\Lambda^c})(x_i)} \times$$

$$\times <\prod_{i=1}^{n} : e^{i\alpha_i\alpha\phi(x_i)}:_V e^{i\alpha\alpha_i \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x_i)}>^{\eta}_{\Lambda}(z),$$

откуда следует, с использованием неравенства (3.4), оценка (однородная в η):

$$|<e^{\zeta\xi(f)}>^{\eta}_{\Lambda}| \le$$

$$\le e^{\frac{(\mathrm{Re}\zeta)^2}{2}V(f,f)} \cdot \exp(z\int_{R^d} d(x)[|e^{i\,\mathrm{Re}\zeta(f*S_{\Lambda^c})(x)}-1|]\exp\frac{\alpha^2}{2}V(0)). \tag{3.7}$$

Используя прямые выкладки оценки (3.7), можно их расширить до оценки, однородной по Λ: для вещественных $\xi=t$ имеем

$$<e^{t\phi(f)}>^{\eta}_{\Lambda} \le e^{\frac{t^2}{2}V(f,f)} \exp(|t|z(e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}) \cdot \int|V*f|(x)\,dx).$$

Из этой оценки следует, что множество является прекомпактным. Используя оценку:

$$\|Vf\|_{L_1} \le |||V^{1/2}|||_{1,2} \cdot \|V^{1/2}f\|_{L_2} = |||V^{1/2}|||_{1,2} \cdot V(f,f),$$

получаем

$$|<e^{\zeta\phi(f)}>^{\eta}_{\Lambda}| \le e^{\frac{(\mathrm{Re}\zeta)^2}{2}V(f,f)} e^{|\mathrm{Re}\,\zeta|c'\cdot V(f,f)},$$

откуда сразу следует

$$|<\phi^2(f)>^{\eta}_{\Lambda}| \le \mathrm{const}\,V(f,f).$$

Поэтому множество $\mathcal{G}_r(z)$ компактно.

2. Обозначим через $\partial\mathcal{G}(z)$ множество Мартина-Дынкина $\mathcal{G}_r(z)$. Тогда из общей теории (см., например, работы [12,13]) следует, что для всякого $\mu\in\mathcal{G}_r(z)$ существует единственная вероятностная мера ρ_μ с носителем на $\partial\mathcal{G}_r(z)$ такая, что верно следующее интегральное представление:

$$\mu = \int_{\partial\mathcal{G}_r(z)} \lambda\, d\rho_\mu(\lambda).$$

Целое множество $\partial\mathcal{G}_r(z)$ можно получить, беря слабые пределы $\omega-\lim\mu^{\eta}_{\Lambda}$, выбирая соответствующим способом $\eta\in S'(R^d)$. Из представления (3.8) тогда следует, что

$$\mu(\prod_{i=1}^{n}:\cos\alpha\phi(x_i):_V) = \int_{\partial\mathcal{G}_r(z)} \lambda(\prod_{i=1}^{n}\cos\alpha\phi(x_i):_V)\,d\rho_\mu(\lambda).$$

Из этого представления, предыдущего замечания и корреляционного неравенства (3.4) следует, что мера $\rho_{\mu^{\circ}_{\infty}}$ должна иметь носитель на одноточечном элементе множества $\partial\mathcal{G}_r(z)$.

Следствие 3.3

Для произвольного $z\ge 0$ мера $\mu_{\infty}(z)$ является экстремальной фазой во множестве $\mathcal{G}_r(z)$.

Доказательство

Корреляционные неравенства (3.3)-(3.4) верны также в случае, когда гауссовская часть заменена μ°_{V}. Поэтому можно применить аргументы, использованные для доказательства следствия 3.2.

§ 4. НЕЗАВИСИМОСТЬ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В этом параграфе мы докажем независимость термодинамического предела свободной энергии от типичных граничных условий в классе V-регулярных мер.

Начнем с точного определения класса ковариаций, для которых можно провести такое доказательство.

Определение 4.1

Будем говорить, что ковариация V регулярна в случае, когда существует достаточно богатый набор так называемых строго V-регулярных областей $\Lambda \subset R^d$, которые определяются следующими условиями:

Существуют две функции $F:(0,\infty)\to[0,\infty)$, $G:[0,\infty)\to[0,\infty)$, непрерывно и монотонно убывающие, так что верны оценки

$$\forall_{x,y\in \mathrm{Int}\Lambda} \quad |K_{\Lambda^c}(x,y)| \le F^{1/2}(\mathrm{dist}(x,\Lambda^c))\,F^{1/2}(\mathrm{dist}(y,\Lambda^c))\,G(\mathrm{dist}(x,y)). \tag{4.1}$$

Дополнительно предполагаем, что функция $F(r)$ имеет интегрируемую асимптотику вида $r^{-d+\epsilon}$, $\epsilon>0$, когда $r\downarrow 0$, и такую же асимптотику, когда $r\uparrow 0$. Функция G ограничена в нуле и интегрируема на бесконечности. Набор множеств обладает следующим свойством:

$$\exists_{0\le\epsilon_3<1} : \sup_{\Lambda}\Big\{\frac{1}{|\partial\Lambda|^{1+\epsilon_3}}\int_\Lambda dx\,F(\mathrm{dist}(x,\Lambda^c))\Big\}<\infty. \tag{4.2}$$

Термин "Достаточно богатый набор" означает, что для произвольного фильтра $\{\Lambda'\}$, сходящегося к R^d разумным образом, существует монотонная последовательность строго V-регулярных областей (Λ_n), которую можно вписать в фильтр $\{\Lambda'\}$.

Из условия (4.1) следует, что внутри каждого строго V-регулярного множества (sV-регулярного)

$$K_{\Lambda^c}(x,x) = \lim_{x\to y} K_{\Lambda^c}(x,y)$$

является непрерывной функцией. Тогда из оценки (4.2) следует, что $K_{\Lambda^c}(x,x)$ имеет по крайней мере интегрируемые особенности на границах $\partial\Lambda$.

Большинство результатов этого параграфа доказывается при более слабых условиях регулярности V. Только теорема 4.1 предполагает сильную регулярность V в смысле определения 4.1.

Определение 4.2

Ковариацию V будем называть слабо регулярной в случае, когда существует достаточно богатый набор так называемых слабо регулярных (wV-регулярных) областей $\{\Lambda\}$, которые определяются, в свою очередь, следующим свойством: в регулярной области Λ ядро $K_{\Lambda^c}(x,x)$

является непрерывным и существует непрерывная, монотонно убывающая функция $F:(0,\infty)\to[0,\infty)$ с асимптотиками как в опр. 4.1. и такая, что верна оценка

$$\forall_{x\in \mathrm{Int}\Lambda} \quad K_{\Lambda^c}(x,x) \le F(\mathrm{dist}(x,\Lambda^c)). \tag{4.3}$$

Кроме того, имеет место неравенство:

$$\sup_{0\le\epsilon'<1}\Big\{|\partial\Lambda|^{-1-\epsilon'}\int_\Lambda F(\mathrm{dist}(x,\Lambda^c))\,dx\Big\}<\infty. \tag{4.4}$$

Начнем с некоторых полезных оценок функционалов от полей $\Pi^*(\eta)$, которые могут найти применение в подобных исследованиях. Будем говорить, что последовательность (Λ_n) ограниченных областей wV — допустима (соответственно sV-допустима) только тогда, когда все Λ_n являются wV-регулярными (соответственно sV-регулярными) и Λ_n R^d монотонно. Область $\Lambda\subset R^d$ называется областью кругового типа, когда для всех $0\le\rho\le\frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Lambda)$ имеем оценку

$$|\Lambda_\rho \equiv \{x\in \mathrm{Int}\,\Lambda \,|\, \mathrm{dist}(x,\partial\Lambda)\ge\rho\}| \sim (\mathrm{diam}(\Lambda)-\rho)^{d-1}.$$

Оценка (4.1)

Пусть (Λ_n) и (Y_n) — две wV-допустимые последовательности, такие, что $\mathrm{dist}(Y_n,\partial\Lambda_n)\to\infty$, когда $n\to\infty$. Возьмем $\mu\in R(V)$.
Тогда существует функция

$$C_1 : S'(R^d)\to[0,\infty],$$

конечная μ — почти везде, такая, что для произвольного единичного куба $\Delta\subset R^d$ верна оценка

$$\int_\Delta \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)^2(x)\,dx \le C_1(\eta)\,F(\mathrm{dist}(\Delta,\partial\Lambda_n))^\beta,$$

которая имеет место для всех β и $\{Y_n\}$ таких, что

$\Delta \subset Y_{n_o}$; $n > n_o$:

$$\sum_n F(\mathrm{dist}(Y_n, \partial\Lambda_n))^{1-\beta} \cdot |Y_n| < \infty .$$

Доказательство

Используя неравенство Чебышева и регулярность μ, имеем

$$\mu\{\eta \in S'(R\ )| \sum_n \sum_{\Delta \subset c(Y_n)} \int_\Delta \Pi^*\ (\eta)\ (x)\,dx \geq \frac{1}{\epsilon} F(\mathrm{dist}(\Delta, \partial\Lambda\ )\ ]\ \leq$$

$$\leq \epsilon \sum_n \sum_{\Delta \in c(Y_n)} \frac{\int_\Delta dx\, \mu(\Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)^2(x))}{[F(\mathrm{dist}(\Delta, \partial\Lambda_n)]^\beta} \leq$$

$$\leq \epsilon' \cdot c \sum_n \sum_{\Delta \in c(Y_n)} [F(\mathrm{dist}(\Delta, \partial\Lambda_n))]^{1-\beta} \leq$$

$$\leq \epsilon \cdot c'' \sum_n |Y_n| [F(\mathrm{dist}(Y_n, \partial\Lambda_n))]^{1-\beta} .$$

Оценка следует из того, что ϵ может быть произвольным числом.

Оценка (4.2)

Пусть $\mu \in R(V)$ и пусть Λ w–V-регулярно. Тогда существует функция:

$$C_2(\Lambda, \cdot): S'(R^d) \to [0, \infty]$$

конечная и μ почти везде такая, что для произвольного единичного куба $\Delta \subset \Lambda$ верна оценка

$$\int_\Delta \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)^2(x)\,dx \leq C_2(\Lambda, \eta)\, F(\mathrm{dist}(\Delta, \Lambda^c))^\beta$$

для произвольного $1 < \beta < 0$.

Доказательство

Используем снова неравенство Чебышева и V-регулярности, получая оценки:

$$\mu\{\eta \in S'(R^d)| \sum_{\Delta \subset \Lambda} \int_\Delta \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)^2(x)\,dx > \frac{1}{\epsilon} F(\mathrm{dist}(\Delta, \Lambda^c)\}^\beta \leq$$

$$\leq \epsilon' \sum_{\Delta \subset \Lambda} \int_\Delta F(\mathrm{dist}(x, \partial\Lambda))^{1-\beta} < \infty$$

для $|\Lambda| < \infty$ $\beta < 1$.

Неприятной чертой оценки (4.2) является априорная зависимость константы C_2 от объема Λ. Некоторая полезная информация относительно этой зависимости получена в следующих двух оценках:

Оценка (4.3)

Пусть $\mu \in R(V)$ и пусть $\{Y_n\}$ и $\{\Lambda_n\}$ — две V-допустимые последовательности, такие, что для некоторого $\delta > 0$

$$\sum_n |\Lambda_n - Y_n| |\partial\Lambda_n|^{-\delta} < \infty$$

и

$$\lim_{n\ \infty} \mathrm{dist}(Y_n, \Lambda_n^c) \to \infty .$$

Тогда существует функция

$$G: S'(R^d) \to [0, \infty),$$

конечная μ — почти везде, такая, что для произвольного единичного куба $\Delta_n \subset \Lambda_n - Y_n$ верна оценка

$$\int_{\Delta_n} \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)^2(x)\,dx \leq G(\eta) \left(\int_{\Delta_n} F(\mathrm{dist}(x, \Lambda_n^c))\,dx\right)^{1+\delta} .$$

Оценка (4.4)

Пусть $\mu \in R(V)$ и пусть $(\Lambda_n), (Y_n)$ — две w–V допустимые, кругового типа, последовательности, такие, что $Y_n \subset \Lambda_n$, $\mathrm{dist}(Y_n, \Lambda_n^c) \to \infty$ для $n \to \infty$ и пусть $\beta > 1$, такое, что $\sum_n |\partial\Lambda_n|^{1-\beta} < \infty$. Тогда существует конечная μ почти везде функция $\mathfrak{D}$.

$$\mathfrak{D}: S'(R^d) \to [0, \infty]$$

такая, что верна оценка:

$$\int_{\Lambda_n - Y_n} |\Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(x)|\,dx \le \mathfrak{L}(\eta)\Big[\int_{\Lambda_n - Y_n} K_{\Lambda_n^c}(x,x)\,dx\Big]^{\beta} .$$

Доказательство

Определим $c_0(\Lambda_n - Y_n)$ как объединение таких единичных кубов, которые целиком содержатся в множестве Int Λ_n и примыкают к границам множества Λ_n. Тогда $k+1$ генерацию $c_{k+1}(\Lambda_n - Y_n)$ определим как соединение кубов, которые целиком содержатся в множестве $(\Lambda_n - Y_n) - c_k(\Lambda_n - Y_n)$ и примыкают к кубам k-той генерации.

Имеем элементарную оценку

$$\int_{\Lambda_n - Y_n} dx\, K_{\Lambda_n^c}(x,x) \ge \sum_{k=0} \sum_{\Delta \in c_k(\Lambda_n - Y_n)} \int_{\Delta} dx\, K_{\Lambda_n^c}(x,x) \ge$$

$$\ge \sum_{\Delta \in c_0(\Lambda_n - Y_n)} \int dx\, K_{\Lambda_n^c}(x,x) = c\,|\partial\Lambda_n| .$$

Теперь используем неравенство Чебышева и регулярность μ и Λ:

$$\mu\{\eta \in S'(R^d)\,|_{n} : \int_{\Lambda_n - Y_n} |\Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(x)|\,dx > \frac{1}{\epsilon}\Big[\int_{\Lambda_n - Y_n} K_{\Lambda_n^c}(x,x)\Big]^{\beta}\} \le$$

$$\le \epsilon \cdot \sum_n \frac{\int_{\Lambda_n - Y_n} \mu(|\Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(x)|)\,dx}{\Big[\int_{\Lambda_n - Y_n} K_{\Lambda_n^c}(x,x)\,dx\Big]^{\beta}} \le$$

$$\le \epsilon \cdot c \cdot \sum_n \Big[\int_{\Lambda_n - Y_n} dx\, K_{\Lambda_n^c}(x,x)\Big]\,|\partial\Lambda_n|^{-\beta} \le$$

$$< \epsilon \cdot c' \sum_n |\partial\Lambda_n|^{1-\beta} < \infty .$$

Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа. Используем неравенство Иенсена:

$$Z^{\eta}_{\Lambda}(z) = Z^{\eta=0}_{\Lambda}(z)\cdot\frac{Z^{\eta}_{\Lambda}(z)}{Z^{\eta=0}_{\Lambda}(z)} \ge$$

$$\ge Z^{\eta=0}_{\Lambda}(z)\,\mu^{\eta=0}_{\Lambda}\Big(e^{\,z\int_{\Lambda} d(x)\,:e^{i\alpha\phi}:_{V}(x)\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)}-1)}\Big) \ge$$

$$\ge Z^{\eta=0}_{\Lambda}(z)\,\exp\Big(z\int_{\Lambda} d(\underline{x})\, e^{\frac{\alpha^2}{2}K_{\Lambda^c}(x,x)}\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)}-1)\,\mu^{\circ}_{\Lambda}(:e^{i\alpha\phi}:_{S_{\Lambda^c}}(x))\Big),$$

откуда следует

$$p^{\eta}_{\Lambda}(z) = \ln(Z^{\eta}_{\Lambda}(z))^{-1/|\Lambda|} \le$$

$$\le -p^{\circ}_{\Lambda}(z) - \frac{z}{|\Lambda|}\int_{\Lambda} d(\underline{x})\, e^{\frac{\alpha^2}{2}K_{\Lambda^c}(x,x)}\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)}-1)\,\langle :e^{i\alpha\phi(x)}:_{S_{\Lambda^c}}(x)\rangle^{\circ}_{\Lambda}.$$

Применяя снова неравенство Иенсена, получим

$$Z^{\eta=0}_{\Lambda}(z) = Z^{\eta}_{\Lambda}(z)\cdot\frac{Z^{\eta=0}_{\Lambda}(z)}{Z^{\eta}_{\Lambda}(z)} \ge$$

$$\ge Z^{\eta}_{\Lambda}(z)\,\exp\Big(-z\int_{\Lambda} d(\underline{x})\, e^{\frac{\alpha^2}{2}K_{\Lambda^c}(x,x)}\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)}-1)\,\mu^{\eta}_{\Lambda}(:e^{i\alpha\phi(x)}:_{S_{\Lambda^c}})\Big),$$

откуда имеем

$$p^{\eta=0}_{\Lambda}(z) \le p^{\eta}_{\Lambda}(z) + z\int_{\Lambda} d(\underline{x})\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)}-1)\,\mu^{\eta}_{\Lambda}(:e^{i\alpha\phi}:_{V}(x)) .$$

Таким образом, мы нашли следующие оценки:

$$-z\int_{\Lambda} d(\underline{x})\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)}-1)\,\mu^{\eta}_{\Lambda}(:e^{i\alpha\phi}:_V(x))\le$$

$$\le p^{\eta}_{\Lambda}(z)-p^{\eta=0}_{\Lambda}(z)\le \tag{4.5}$$

$$\le-\frac{z}{|\Lambda|}\int_{\Lambda} d(\underline{x})\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)}-1)\,\mu^{\circ}_{\Lambda}(:e^{i\alpha\phi}:_V(x)).$$

Теперь отметим, что из оценок (4,1), (3.3) и (4.4) следует, что для произвольной wV-допустимой последовательности (Λ_n) кругового типа имеем

$$\lim_{n\to\infty}(p^{\eta}_{\Lambda_n}(z)-p^{\circ}_{\Lambda_n}(z))=0$$

для почти всех $\eta\in S'(R^d)$, когда $\mu\in R(V)$. Чтобы доказать это, возьмем произвольную wV-допустимую последовательность кругового типа (Λ_n). Сначала предположим, что функция F из оценки (4.3) имеет экспоненциально быстрое убывание на бесконечности. Возьмем wV-регулярную последовательность (Y_n) такую, что $Y_n\subset\Lambda_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dist}(\Lambda_n,\partial\Lambda_n)=\infty$.

Рассмотрим верхнюю оценку на разность свободных энергий из формулы (4.5):

$$|p^{\eta}_{\Lambda_n}(z)-p^{\circ}_{\Lambda_n}(z)|\le$$

$$\le\frac{z}{|\Lambda_n|}\int_{\Lambda_n} d(\underline{x})\,(e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}-1)\,|\,\mu^{\eta=0}_{\Lambda_n}(:e^{i\alpha\phi}:_V(x))\le$$

$$\le\frac{z}{|\Lambda_n|}e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\int_{Y_n} d(\underline{x})\,|e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}-1|\;+$$

$$+\frac{z}{|\Lambda_n|}e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\int_{\Lambda_n-Y_n} d(\underline{x})\,|e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}-1|\le$$

$$\le e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\cdot\frac{|Y_n|}{|\Lambda_n|}\cdot C_1(\eta)\;+$$

$$+\frac{1}{|\Lambda_n|}e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\Big[\int_{\Lambda_n-Y_n} dx\,K_{\Lambda^c_n}(x,x)\Big]^{\beta}\cdot\mathfrak{D}(\eta)\le \tag{4.6}$$

$$\le e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\frac{|Y_n|}{|\Lambda_n|}\cdot C_1(\eta)\;+$$

$$+e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\frac{1}{|\Lambda_n|}\Big[\sum_{k=0}^{\operatorname{dist}(Y_n,\Lambda^c_n)}\sum_{\Delta\in c_k(\Lambda_n-Y_n)} e^{-\delta\operatorname{dist}(\Delta,\Lambda^c_n)}\Big]^{\beta}\mathfrak{D}(\eta)\le$$

$$\le e^{\frac{\alpha^2}{2}V(0)}\frac{|Y_n|}{|\Lambda_n|}\cdot C_1(\eta)\;+$$

$$+c'\cdot\mathfrak{D}(\eta)\,|\Lambda_n|^{-1}[\operatorname{diam}(\Lambda_n)]^{\beta(d-1)}\Big[\frac{1-e^{-\delta\operatorname{dist}(\Delta,\Lambda^c_n)}}{1-e^{-\delta}}\Big]^{\beta}.$$

Отсюда вытекает следующий факт. Если предположить, что Y имеет свойство

$$\lim_{n\to\infty}|\Lambda_n|^{-1}\,|\partial\Lambda_n|^{\beta}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|Y_n|}{|\Lambda_n|}=0,$$

то, используя оценки (4.3), оценку (4.4) формулу (4.6), получим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|p^{\eta}_{\Lambda_n}(z)-p^{\circ}_{\Lambda_n}(z)|=0.$$

Применяя аналогичные выкладки к нижней оценке (4.4), получаем

$$\lim_{n\to\infty} | p^{\eta}_{\Lambda_n}(z) - p^{\circ}_{\Lambda_n}(z) | = 0.$$

Теорема 4.1

Пусть V будет w-регулярным потенциалом, (Λ_n) — произвольная ω-V-допустимая последовательность кругового типа. Возьмем $\mu \in R(V)$. Тогда для почти всех $\eta \in S'(R^d)$

$$\lim_{n\to\infty} p^{\eta}_{\Lambda_n}(z) = p^{\eta}_{\infty}(z)$$

существует и равен $p^{\circ}_{\infty}(z)$ для всех $z \in R^1$.

Доказательство

В сущности, мы доказали эту теорему в рассуждениях, приведенных непосредственно перед ее формулировкой. В случае, когда F имеет только степенное убывание, используем следующий простой аргумент

$$c \sum_{k=0}^{\mathrm{dist}(Y_n, \Lambda_n^c)} \mathrm{diam}(\Lambda_n - k)^{d-1}\, F(\mathrm{dist}(\Delta, \Lambda_n^c))^{\beta} \le$$

$$\le c' \sum_{k=0}^{\mathrm{dist}(Y_n, \partial\Lambda_n)} F(k))^{\beta} \cdot (\mathrm{diam}(\Lambda_n))^{d-1} \le$$

$$\le c'' |\partial\Lambda_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} F(k)\right)^{\beta}$$

вместе с утверждением Мак Лорена. Теперь наметим доказательство равенства $p^{\eta=0}_{\infty}(z) = p_{\infty}(z)$, которое на языке статистической механики означает, что свободная энергия с половинным условием типа условия Дирихле равна свободной энергии системы с пустым граничным условием.

Предложение 4.1

Предположим, что V является s-регулярным потенциалом. Пусть $\mu \in R(V)$ и пусть (Λ_n) — произвольная $(\Lambda_n)\, sV$ — допустимая последовательность. Тогда верно равенство

$$p^{\circ}_{\infty}(z) = \lim_{n\to\infty} p^{\eta}_{\Lambda_n}(z) = \lim_{n\to\infty} p_{\Lambda_n}(z) = p_{\infty}(z)$$

для μ почти всех η и всех $z \in R^1$.

Доказательство

Для параметра $t \in [0,1]$ определим новую ковариацию:

$$V_{\Lambda}(t)(x, y) = tV(x, y) + (1 - t)\, S_{\Lambda^c}(x, y).$$

Тогда имеем равенство

$$p^{\circ}_{\Lambda_n}(z) - p_{\Lambda_n}(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} p^{t}_{\Lambda_n}(z),$$

где, по определению,

$$p^{t}_{\Lambda_n}(z) = -\frac{1}{|\Lambda_n|} \ln(\mu^{\circ}_{V_{\Lambda_n}(t)}(\exp z \int_{\Lambda} :\cos\alpha\phi:_{V}(x)\,dx).$$

Дифференцирование дает равенство

$$p^{\circ}_{\Lambda_n}(z) - p_{\Lambda_n}(z) = \frac{z}{|\Lambda_n|} \int_{\Lambda_n} dx\, K_{\Lambda_n^c}(x, x)\, \mu^{t}_{\Lambda_n}(:\cos\alpha\phi(x):_{V}) -$$

$$-\frac{z^2}{|\Lambda|} \int_{\Lambda_n} dx dy\, K_{\Lambda_n^c}(x,y)\, \mu^{t}_{\Lambda_n}(:\sin\alpha\phi(x):_{V} :\sin\alpha\phi(y):_{V}).$$

Используя элементарные оценки

$$|\mu^{t}_{\Lambda}(:\cos\alpha\phi:_{V}(x))| \le \exp\left(\frac{\alpha^2}{2} V(0)\right),$$

$|\mu_\Lambda^t(:\sin\alpha\phi:_V(x):\sin\alpha\phi:_V(y))| \le \exp(\alpha^2 V(0))$

вместе с оценками (4.1) и (4.3), а также свойства функций F и G из определения 4.1., легко доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(p^\circ_{\Lambda_n}(z) - p_{\Lambda_n}(z)) = 0.$$

§ 5. ПРИМЕРЫ И КОММЕНТАРИИ

1. Марковские поля [8-10, 14-17]

Конструктивное описание проекторов Π_{Λ^c} в пространствах мер $\mathcal{H}(V)$ известно автору только в случае, когда преобразование Фурье $\tilde V(k)$ потенциала обратно пропорционально строго положительному полиному: $\tilde V(k) = [P(k)]^{-1}$. Тогда ковариация задается основной функцией Грина положительного гиперэллиптического оператора $P(-i\nabla)$ с постоянными коэффициентами. В этом случае пространство $\mathcal{H}(V)$ — классическое пространство Соболева, соответствующее оператору $P(-i\nabla)$. Для оператора $P(-i\nabla)$ вида $P(-i\nabla) = \prod_{i=1}^{n}(-\Delta + \alpha_i)$, $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots$ можно определить Π_{Λ^c}, а также $\Pi^*_{\Lambda^c}$ следующим образом.

Предположим, что область Λ имеет границу кусочного класса C^∞. Сначала возьмем $f \in C_0^\infty(R^d)$. Тогда проекция $\Pi_{\Lambda^c}(f)$ элемента f определяется как решение следующей гиперэллиптической граничной задачи:

$$P(-i\nabla)\,\Pi_{\Lambda^c}(f)(x) = 0, \qquad x \in \operatorname{Int}\Lambda,$$

$$\partial_n^\ell\,(\Pi_{\Lambda^c}(f))(x) = (\partial_n^\ell f)(x), \quad x \in \operatorname{Fr}\Lambda = \partial\Lambda, \quad \ell = 0,\ldots,n-1, \tag{5.1}$$

где ∂_n^ℓ обозначает нормальную производную порядка ℓ на границе $\partial\Lambda$. Для произвольного $f \in \mathcal{H}(V)$ его проекция $\Pi^*_{\Lambda^c}(f)$ определяется как слабое решение граничной задачи типа (5.1). В предположении о выполнении некоторых конических свойств для границы $\partial\Lambda$ доказывается единственность слабого решения задачи (5.1). Отметим это из гиперэллиптичности задачи, откуда следует также, что слабое решение является аналитической функцией внутри Λ [18].

Эти классические результаты были расширены в работах [9,10, 14-17]. Там же доказывается (при некоторых технических условиях геометрического типа, наложенных на $\partial\Lambda$), что для μ_V° почти всех $\mu \in S'(R^d)$ слабая задача (5.1) хорошо поставлена и имеет единственное слабое решение, которое внутри области Λ является аналитической функцией. Это определяет $\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi)$ как аналитическую функцию внутри Λ для μ_V° — почти всех ϕ. В случае S_{Λ^c} определяется как функция Грина расширения Фридрихса оператора $P(-i\nabla)$, заданного на $C_0^\infty(\Lambda)$. Прямые выкладки дают, что для $P(-i\nabla) = \prod_{i=1}^{n}(-\Delta+\alpha_i)$ и что в случае $\alpha_1 > 0$, S_{Λ^c} экспоненциально быстро убывает. Прямой счет доказывает в этом случае, что оценка (4.1) верна, и что F и G экспоненциально убывают. В случае $n < d$, $V(0) = \infty$, и тогда надо использовать ϵ-регуляризацию (см., например, работы [19, 20]). Итак, мы видим, что марковские ковариации представляют собой богатое множество примеров, для которых работает предложенная нами техника.

Отметим еще работы [21, 22], где при использовании методов эвклидовой квантовой теории доказана теорема 1 для случая $d = 2$, $n = 1$, $\alpha_1 > 0$.

2. Возможность спонтанного нарушения трансляционной симметрии.

Рассмотрим уравнения Д-Л-Р для случая гауссовской меры

$$\mu \circ E_{\mu_V^\circ}\{-|\Sigma(\Lambda^c)\} = \mu(-). \tag{5.2}$$

Если существует нетривиальное решение в пространстве $S'(R^d)$ уравнения

$$\rho_V^{-1}(-i\nabla)\,f(x) = 0, \tag{5.3}$$

где ρ_V — спектральная плотность ковариации V, то формальные выкладки прямо доказывают, что все экстремальные решения уравнения Д-Л-Р исчерпываются всеми мерами Гаусса $\mu^\circ_{V,f}$ с ковариацией V и математическим ожиданием f и их выпуклыми комбинациями. В случае марковских ковариаций этот факт доказан строго в работе [23]. Однако методы этой работы существенным образом используют марковское свойство, так что неясно, как перенести этот результат на общий случай. Доказательство того, что произвольное решение уравнения (5.3) определяет некоторое экстремальное решение уравнений Д-Л-Р, можно получить в общем случае, однако вопрос о полном описании границы Мартина-Дынкина множества решений остается открытым. Мы видим, что уже на уровне гауссовских мер может иметь место свойство спонтанного нарушения трансляционной инвариантности. На основании этого и некоторых формальных выкладок можно ожидать, что даже для $z \ne 0$ существование нетривиальных решений уравнения (5.3) должно приводить к появлению трансляционно-неинвариантных решений соответствующих уравнений Д-Л-Р.

3. Дополнительные замечания

а) Не существует никаких сомнений в том, что результат теоремы 2.1 верен для целого множества $\mathcal{G}_r(z)$, а не только для $'\mathcal{G}_r(z)$. По-видимому, только примитивизм техники, использованной при ее доказательстве, не разрешает нам получить более сильный результат.

б) Подчеркнем, что на сегодняшний день не существует и эффективной в применениях формулировки общей теоремы Добрушина о единственности для функциональных мер Гиббса.

в) Интересной задачей является вопрос о глобальном марковском свойстве меры μ_∞ в случае исходной марковской ковариации V.

г) Интересно отметить, что из экстремальности для всех $z \geq 0$ меры $\mu_\infty(z)$ следует ее кластерное свойство. Это дает пример ситуации, когда в отсутствие ферромагнетизма из кластерного свойства двухточечной функции $\mu_\infty(\phi(x)\,\phi(y))$ следует кластерное свойство меры. По этому вопросу см. работу /20/.

Я хочу поблагодарить проф. Р.Л.Добрушина за интерес к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гелерак Р. Препринты ОИЯИ Р17-85-770, Р17-85-771, Дубна, 1985.
2. Pfister Ch.-E. – Comm. Mat. Phys., 1982, 86, p.375.
3. Fröhlich J., Pfister Ch.-E. – Comm. Mat. Phys., 1983, 89, p.303.
4. Gielerak R. JINR Preprint E4-85-969, Dubna, 1985, and submitted to "Physica".
5. Albeverio S., Merlini S., Dürr D. – J. Stat. Phys., 1983, 31, p. 389; Kunz H. – Leipzig Ann. Phys., 1974, 85, p.303; Aizenmann M., Fröhlich J. – J. Stat. Phys., 1981, 26, p.389.
6. Siegert A.J.F. – Physica, 1960, p.30.
7. Fröhlich J., Park Y.M. – Commun. Math. Phys., 1978, 59, p.235; Frohlich J., Park Y.M. Journ. of Stat. Phys., 1980, 23, 701.
8. Розанов Ю. Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981.
9. Добрушин Р.Л. Минлос Р. – В кн.: Проблемы механики и математической физики. М.: Мир, 1976.
10. Denfatto G., Gallavotti G., Nicolo F. – J. Funct. Anal., 1980, 36, p.343.
11. Ginibre J. – Comm. Math. Phys., 1970, 16, p.310.
12. Fölmer H. Seminaire de Probabilities IX, Universite de Strasbourg, Lect. Notes in Math., 465, Stringer-Verlag, New York, 1975.
13. Winkler G. Hab.-Ph.G., Münich, 1983.
14. Albeverio S., Hoegh-Kröhn R. – In: Stochastic Analysis and Applications, ed. Pinsky M. Dekker, New York, 1985.
15. Albeverio S., Hoegh-Kröhn R. – Comm. Math. Phys., 1979, 68, p.68.
16. Albeverio S., Hoegh-Kröhn R. – Rept. Math. Phys., 1983.
17. Röcker M. – Math. Ann., 1983, 264, p.211.
18. Röckner M. Bielefeld Project, No.2, preprint No.58, Universitat Bielefeld, 1984.
19. Gielerak R., Zegarlinski B. – Fortschr. der Physik, 1984, 1, p.1.

20. Гелерак Р. Сообщение ОИЯИ Р17-87-11, Дубна, 1987.
21. Гелерак Р. Сообщения ОИЯИ Е5-85-898, Е5-85-899, Дубна, 1985.
22. Gielerak R. – Fortschr. der Physik, 1986, 34, p.295.
23. Holley R., Strook D. – Z. Wanreinsheinlicht verw. Gebiete, 1980, 53, p.293.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1987 года.

Гелерак Р. P17-87-12

Тригонометрические возмущения гауссовских обобщенных полей. Случай сильной связи

Исследуются функциональные уравнения Д-Л-Р, описывающие классические нейтральные системы частиц, взаимодействующих с помощью парного, положительно-определенного потенциала. С использованием некоторых корреляционных неравенств типа неравенств Жинибра доказывается единственность трансляционно-инвариантного, гиббсовского функционального состояния большого канонического ансамбля. Единственность имеет место для регулярных значений химических активностей и достаточно регулярных потенциалов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Gielerak R. P17-87-12

Trigonometric Perturbations of Generalized Gaussian Random Fields. The Case of Strong Coupling

Functional DLR's equations describing the classical systems of uncharged particles interacting via positively defined, two particle potential,are considered. Using some correlation inequalities of the type of Ginibre inequalties the uniqueness of translationally invariant state of a great canonical ensemble is proved. The uniqueness of solution takes place for regular chemical activities and for regular enough potentials.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987