сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-87-113

И.Г.Гочев

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВО ВРЕМЕНИ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

1987

Считается, что феноменологическое нелинейное уравнение движения магнитного момента /уравнение Ландау-Лифшица/ можно получить путем усреднения квантовых уравнений движения по выбранным подходящим образом состояниям $|\chi>$ [1, 2]. В этих состояниях среднее от произведения двух спиновых операторов /в гейзенберговском представлении/ должно факторизоваться и, кроме того, вектор $\vec{M}_m \equiv (\overline{S}^x_m, \overline{S}^y_m, \overline{S}^z_m)$ в любом узле решетки m должен иметь длину s. В общем случае из-за сложности спектра квантовых систем пока не удается найти состояний $|\chi>$ с указанными выше свойствами. Оправданным поэтому является поиск $|\chi>$ в конкретных системах. На первых порах можно также ограничиться рассмотрением лишь типичных решений уравнения Ландау-Лифшица.

В работах [3, 4] построено состояние, являющееся полным квантовым аналогом доменной стенки в анизотропной спиновой цепочке. Это состояние оказалось спиновым когерентным состоянием /СКС/, в другой форме его можно представить как пакет тяжелых спиновых комплексов [4]. Позже [5] было показано, что СКС описывают и прецессионные солитоны с достаточно большой амплитудой в слабоанизотропной цепочке. Этот результат получен в [5] с учетом основного члена в разложении квантовомеханических величин по степеням малого параметра σ /σ - константа анизотропии/, что фактически соответствует рассмотрению лишь начального этапа эволюции квантовомеханического состояния / $t \lesssim t_o \sim \omega^{-1}$, ω - частота прецессии спинов в бионе/. Для определения области применимости феноменологического описания динамики и уточнения возможности представления солитонов как СКС необходимо изучить эволюцию квантовомеханических величин при $t > t_o$.

В настоящей работе проведено такое рассмотрение и показано, что

а/ феноменологическое описание эволюции средних $\overline{S^{\alpha}_m(t)}$ справедливо при $t \lesssim \tilde{t}_1$, где $t_o \ll \tilde{t}_1 \ll t_o/\sqrt{\sigma}$;

б/ когерентность состояния квантовой системы сохраняется только на интервале $(0, t_o)$.

Из этих результатов следует, что когерентность не является необходимым свойством квантового солитона.

1. Выпишем в компактном виде те результаты работы [5], которые нам понадобятся здесь. Гамильтониан анизотропной гейзенберговской цепочки имеет вид

$$H = -\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}\sigma}(S_m^x S_{m+1}^x + S_m^y S_{m+1}^y) + S_m^z S_{m+1}^z\right], \quad \sigma > 0, \quad s = \frac{1}{2}. \qquad /1/$$

Состояние $|\Phi(t)>$, являющееся аналогом прецессионного биона при $t \leq t_o$, можно представить как пакет спиновых комплексов $|\Psi_n>$ или как прямое произведение известных [6] спиновых когерентных состояний $|\theta_m, \phi_m> = e^{-i\theta_m(\sin\phi_m \hat{S}_m^x + \cos\phi_m \hat{S}_m^y)}|0>$:

$$|\Phi(t)> = e^{-i\epsilon_N t}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{-i\nu\omega t}|\Psi_{N+\nu}> = e^{-i(\epsilon_N - N\omega)t}\prod_{m=1}^{\infty}|\theta_m, \omega t>;$$

$$C_\nu = A\exp\left[-\frac{\sigma\nu^2}{2}f_2(a)\right]; \quad f_2(a) = (\mathrm{cth}\, a)/(1 + 2a/\mathrm{sh}\, 2a); \qquad /2/$$

$$A = \left(\frac{\sigma f_2}{\pi}\right)^{1/4}; \quad \theta_m = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{sh}\, a}{\mathrm{ch}(\sigma m\, \mathrm{th}\, a)}; \quad \omega = \frac{\sigma^2}{2\,\mathrm{ch}^2 a};$$

$a = \sigma N \geq 1$, $\sigma \ll 1$, N – среднее число перевернутых спинов в состоянии $|\Phi>$.

Среднее значение энергии $\overline{H}$ и компонент спина $\overline{S_m^\alpha}$ в состоянии /2/ описывается односолитонным решением уравнения Ландау-Лифшица, найденным в [7]:

$$\overline{S_m^x} = \frac{1}{2}\sin\theta_m \cos\omega t; \quad \overline{S_m^z} = \frac{1}{2}\cos\theta_m;$$

$$\overline{S_m^y} = -\frac{1}{2}\sin\theta_m \sin\omega t; \quad W = \overline{H} = \frac{1}{2}\sigma\, \mathrm{th}\, a. \qquad /3/$$

Это очевидно, поскольку из /2/ имеем

$$<\Phi(t)|\hat{S}_{m_1}^\alpha \hat{S}_{m_1+1}^\beta|\Phi(t)> = \overline{S_{m_1}^\alpha}\,\overline{S_{m_1+1}^\beta},$$

$$\sum_{\alpha=x,y,z}(\overline{S_m^\alpha})^2 = \frac{1}{4} \qquad /4/$$

и усреднение операторных уравнений движения

$$\dot{\hat{S}}_m^\alpha = i[\hat{H}, \hat{S}_m^\alpha] \qquad /5/$$

по состоянию $|\Phi>$ приводит к феноменологическому уравнению:

$$\frac{\partial \vec{M}_m}{\partial t} = \left[\frac{\delta W}{\delta \vec{M}_m} \times \vec{M}_m\right]; \quad |\vec{M}_m| = |\overline{\vec{S}_m}| = \frac{1}{2}; \quad W = \overline{H}. \qquad /6/$$

Выражения /2/ и /3/ выведены в [5] с учетом главного по степеням σ члена в разложении квантовых величин. В этом приближении спектр спиновых комплексов квазиэквидистантен в том смысле, что $\epsilon_{N+\nu} \simeq \epsilon_N + \nu\omega$ для $\nu \leq \sigma^{-1/2}$. В следующих порядках по σ эквидистантность нарушается, и это может привести к более сложной эволюции состояния квантовой системы и к иной, чем выписанной в /3/, зависимости от t средних $\overline{S_m^\alpha}$ при $t > t_o$.

2. Изучим сначала общие свойства состояния $|\chi> = e^{-iHt} \times |\Phi(0)>$, которое с учетом определения /2/ начального вектора $|\Phi(0)>$ имеет вид

$$|\chi(t)> = \sum_\nu C_\nu e^{-i\epsilon_{N+\nu}t}|\Psi_{N+\nu}>. \qquad /7/$$

Это состояние является произведением СКС до тех пор, пока квадрат величины $R(t) = <\chi(t)|\Phi(t)>$ с $|\Phi(t)>$ из /2/ мало отличается от единицы. Используя /2/ и /7/, запишем $R(t)$ в явном виде:

$$R(t) = \sum_\nu C_\nu^2 \exp[i(\epsilon_{N+\nu} - \epsilon_N - \nu\omega)t]. \qquad /8/$$

Энергия ϵ_n n-частичного спинового комплекса в системе /1/ найдена в [8] при произвольном σ:

$$\epsilon_n = \frac{1}{2}\mathrm{th}\,\sigma \cdot \mathrm{th}\, n\sigma.$$

При малых σ и $N\sigma \geq 1$ разложим $\epsilon_{N+\nu}$ в ряд:

$$\epsilon_{N+\nu} = \frac{\sigma}{2}\mathrm{th}\, a + \nu\omega - f_3(a)\nu^2\sigma^3 + O(\nu^3\sigma^4, \sigma^3),$$

$$f_3 = \mathrm{th}\, a/2\,\mathrm{ch}^2 a. \qquad /9/$$

Поскольку характерные ν в /8/ имеют порядок $\sigma^{-1/2}$ /см. C_ν в /2//, отброшенные в /9/ члены несущественны при вычислении

R для $t < t_0/\sqrt{\sigma}$. При таком условии интеграл /8/ вычисляется точно, и для $|R|^2$ получаем

$$|R(t)|^2 = \frac{f_2(a)}{\sqrt{f_2^2(a) + f_3^2(a)\sigma^4 t^2}}.$$

В области $a \geq 1$, которая нас интересует, $f_2(a) \sim 1$, $f_3(a) \sim \mathrm{ch}^{-2} a$ и, следовательно, при $t \gg t_0 \sim \omega^{-1}$ имеем $|R|^2 \ll 1$. Характерное время, при котором $|\chi>$ перестает быть СКС, имеет порядок времени прецессии спинов в бионе $t_0 \sim \omega^{-1}$. Этот результат, как видно из расчета, является прямым следствием наличия члена с $\nu^2\sigma^3$ в разложении /9/.

3. Рассмотрим теперь, как неэквидистантность спектра спиновых комплексов влияет на временную зависимость средних $\overline{S_m^\alpha}$. Для $\overline{S_m^z}$ имеем

$$<\chi(t)|\hat{S}_m^z|\chi(t)> = \sum_\nu C_\nu^2 <\Psi_{N+\nu}|\hat{S}_m^z|\Psi_{N+\nu}> = \overline{S_m^z}(0) = \frac{1}{2}\cos\theta_m, \quad /10/$$

то есть среднее $\overline{S_m^z}$ не зависит от t. Этот результат легко понять, учитывая, что $<\Psi_\nu|S_m^z|\Psi_{\nu'}> \sim \delta_{\nu\nu'}$ и что в пакете $\sum C_\nu|\Psi_{N+\nu}>$ имеется одно состояние с n перевернутыми спинами.

Временная эволюция поперечных компонент зависит от конкретного вида спектра, что видно из следующего выражения:

$$\overline{S_m^x} = \sum_\nu C_\nu C_{\nu-1} <\Psi_{N+\nu}|S_m^-|\Psi_{N+\nu-1}> \times \cos[(\epsilon_{N+\nu} - \epsilon_{N+\nu-1})t] =$$
$$= \sum_\nu C_\nu^2 <\Psi_{N+\nu}|S_m^-|\Psi_{N+\nu-1}> \cos[\omega t - 2f_3\nu\sigma^3 t + O(\nu^2\sigma^4, \sigma^3)] + O(\sigma^{1/2}). \quad /11/$$

Здесь использовалось разложение $\epsilon_{N+\nu} - \epsilon_{N+\nu-1} = \omega - 2f_3\nu\sigma^3 + O(\nu^2\sigma^4, \sigma^3)$, следующее из /9/.

Характерные ν в сумме /11/ не превосходят* $\nu_0 \sim \sigma^{-1/2}$. При $t \ll t_1 \sim t_0/\sqrt{\sigma}$ в аргументе косинуса в /11/ остается лишь член с ωt, и для таких времен имеем

$$\overline{S_m^x(t)} = \overline{S_m^x}(0)\cos\omega t = \frac{1}{2}\sin\theta_m \cos\omega t.$$

---

*В этом можно убедиться, учитывая выражение /2/ для C_ν, а также тот факт, что средние $\overline{S_m^\alpha}$ ограничены по величине значением s.

Аналогичный расчет для $\overline{S_m^y(t)}$ приводит к результату $\overline{S_m^y} = -\frac{1}{2}\sin\theta_m \sin\omega t$. Таким образом, средние $\overline{S_m^\alpha(t)}$ описываются выражениями /3/ при всех $t \ll t_1 \sim t_0/\sqrt{\sigma}$, включая область $t_0 \ll t \ll t_1$, в которой $|\chi(t)>$ отличается от СКС /2/.

4. В этом разделе изучим средние от произведения спиновых операторов в состоянии $|\chi(t)>$. Нас прежде всего интересуют условия, при которых среднее от произведения двух операторов $\hat{S}_{m_1}^\alpha \hat{S}_{m_1+1}^\beta$ - равно произведению средних. Поскольку в данной работе изучается возможность усреднения квантовомеханических уравнений /5/ для системы /1/, достаточно рассмотреть расщепление двух типов средних:

$$<\chi(t)|\hat{S}_m^z\hat{S}_{m+1}^x|\chi(t)> \text{ и } <\chi(t)|\hat{S}_m^x\hat{S}_{m+1}^y|\chi(t)>.$$

Для $\overline{S_m^z S_{m+1}^x}$ имеем выражение, аналогичное /11/:

$$\overline{S_m^z S_{m+1}^x} = \sum_\nu C_\nu C_{\nu-1} <\Psi_{N+\nu}|S_m^z S_{m+1}^-|\Psi_{N+\nu-1}> \times$$
$$\times \cos[(\epsilon_{N+\nu} - \epsilon_{N+\nu-1})t].$$

Дальнейший расчет совпадает с расчетом $\overline{S_m^x}$ в предыдущем разделе, и в результате при $t \ll t_1$ имеем

$$\overline{S_m^z S_{m+1}^x} = \overline{S_m^z}\ \overline{S_{m+1}^x}.$$

Такой же результат легко получается и для второго типа* среднего $S_m^x S_{m+1}^y$.

При усреднении гамильтониана по $|\chi(t)>$ средние $\overline{S_m^\alpha S_{m+1}^\alpha}$ с $\alpha = x, y$ в силу полученных здесь результатов при $t \ll t_1$ также факторизуются. Среднее $\overline{S_m^z S_{m+1}^z}$ не зависит от t и распадается на произведение средних во всех порядках по σ.

---

*В состоянии $|\chi(t)>$ при $t > t_0$ не будут факторизоваться средние от произведения типа $S_{m_1}^{\beta_1} S_{m_2}^{\beta_2} \ldots S_{m_k}^{\beta_k}$, $\beta_i = x, y$ с $k \geq \sigma^{-1/2}$. В этом проявляется отличие $|\chi(t)>$ от $|\Phi(t)>$ /в последнем факторизуются средние от произвольного числа операторов/.

Таким образом, показано, что при $t \ll t_1$ ($t_1 \gg t_0$) усреднение H по $|\chi(t)>$ приводит к феноменологическому функционалу энергии W, а усреднение операторных уравнений движения - к уравнению Ландау-Лифшица. На интервале $t_0 \ll t \ll t_1$ состояние $|\chi(t)>$ отличается от СКС /2/ и, тем не менее, полностью описывает прецессионный солитон. Отсюда вытекает, что когерентность в общем случае не является необходимым свойством квантового солитона. По-видимому, солитон следует представлять прежде всего как пакет спиновых комплексов /все изученные до сих пор солитоны в квантовых спиновых системах, включая рассмотренное здесь состояние $|\chi(t)>$, являются такими пакетами/. Изучение свойств спиновых комплексов в пределе $\sigma \to 0$, $n \to \infty$, $\sigma n \to$ $\to$ const может показать, насколько правильно такое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967.
2. Цукерник В.М. - ФТТ, 1968, 10, с.1006.
3. Покровский В.Л., Хохлачев С.Б. - Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с.371.
4. Гочев И.Г. - ЖЭТФ, 1983, 85, с.199.
5. Гочев И.Г. - ЖЭТФ, 1985, 89, с.147.
6. Переломов А.М. - УФН, 1977, 123, с.23.
7. Гочев И.Г. - ФНТ, 1984, 10, с.615.
8. Гочев И.Г. - Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, с.136.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 февраля 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Гочев И.Г. P17-87-113

Об эволюции во времени состояний квантовой спиновой цепочки

Изучена эволюция во времени состояний квантовой спиновой цепочки и показано, что когерентность не является необходимым свойством солитона.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Gochev I.G. P17-87-113

On the Time Evolution of the States of a Quantum Spin Chain

The time evolution of states of a quantum spin chain is investigated. It is shown that the coherency is not a necessary feature of the soliton.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987