сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-87-11

Р.Гелерак

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГАУССОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛЕЙ

Случай слабой связи

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных аксиом аксиоматической схемы конструктивной теории поля, предложенной Нельсоном [1], является глобальное марковское свойство соответствующих случайных полей.

Применение эвклидовых /стохастических/ методов в конструктивной теории поля явилось источником мощного развития в теории сверхперенормируемых взаимодействий. Почти все сверхперенормируемые взаимодействия были сконструированы на строгом математическом уровне /для введения в круг этих вопросов можно рекомендовать книги [2,3]; построения трехмерных моделей Янга-Миллса содержатся в работе [4]/. Однако кроме некоторых экзотических моделей [5-8], аксиомы Нельсона не были проверены полностью даже в случае простейших $\mathcal{P}(\phi)_2$ моделей.

Проблемы, возникающие при попытке проверки глобального марковского свойства высокотемпературных моделей типа $\mathcal{P}(\phi)_2$, носят, по-видимому, технический характер. Поэтому появились работы, посвященные данному вопросу для решеточных $\mathcal{P}(\phi)_d$ моделей [9,10]. Техника этих работ базируется на тонких ферромагнитных свойствах соответствующих локальных спецификаций, поэтому не сразу ясно, как применять ее в непрерывном случае.

Настоящая работа намечает новую стратегию решения этой задачи без ссылок на ферромагнетизм и кажется перспективной для взаимодействий вида $\phi^4_{2,3}$. Хорошо известно, что, применяя некоторые граничные процедуры, можно получить теорию ϕ^4_2 [11,12] из модели типа $\cos a\phi_2$. Наш метод базируется на этой возможности. Отправной точкой служит теория типа $\cos a\,\phi_d$, регуляризованная с помощью метода Паули - Виларса. Для таких теорий глобальное марковское свойство проверяется быстро и просто. Эта проверка является темой данной работы. В последующих публикациях мы собираемся проверить глобальное марковское свойство для регуляризованных теорий типа ϕ^4_d, а в последующем снять эту регуляризацию.

Другой, новый аспект предполагаемой работы, - это возможное применение ее основного результата к классической статистической механике. Из работы [13] хорошо известно, что большой канонический ансамбль Гиббса для газа классических взаимодействующих частиц, в котором взаимодействие задается положительно определенным парным потенциалом, можно описать через функциональные интегралы, которые соответствуют ситуации, исследованной нами в этой работе. Из глобального марковского свойства следует существование матрицы перехода в термодинамическом пределе, что обогащает результаты работ [14-16], посвященных этой задаче.

2. ВВОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $P: R^d \to R^1$ - положительный полином, а $A(P)$ - вещественный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Символ P задан так, что $A(P)f \equiv (P(k)\hat{f})^{\vee}$, где $\hat{}(\vee)$ означает преобразование Фурье /соотв. обратное/.

Будем предполагать, что $P^{-1}(k)$ не имеет существенной особенности в нуле. Более точно предположим, что

$$\int_{\{|k|<1\}} \frac{dk}{P(k)} < \infty .$$

Для заданного $A(P)$, как и выше, определим отображение $A^{1/2}$: $S(R^d) \to L_2(R^d)$ формулой

$$A^{1/2} f \equiv \left(\frac{1}{P(k)^{1/2}} \hat{f}\right)^{\vee}$$

и определим скалярное произведение на пространстве $S(R^d)$

$$(f, g)_A \equiv (A^{1/2} f, A^{1/2} g).$$

Метрическое пополнение пары $\{S(R^d), (\cdot,\cdot)_A\}$ обозначим через $\mathcal{H}(P)$. Очевидно, что пространство $\mathcal{H}(P)$ можно отождествить с подмножеством пространства обобщенных функций умеренного роста $S'(R^d)$:

$$\mathcal{H}(P) = \{\phi \in S'(R^d) \,|\, , \phi \in L^1_{LOC}(R^d), \int \frac{|\phi(k)|^2}{P(k)} dk < \infty \}.$$

Из предположений, сделанных выше относительно P , следует, что пространство $C_0^\infty(R)$ - плотное в $\mathcal{H}(P)$. Определим для произвольной открытой области $\Lambda \subset R^d$ подпространство $\mathcal{H}_\Lambda(P)$ как замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H}(\Lambda)$, состоящее из тех $\phi \in \mathcal{H}(P)$, носитель которых содержится в Λ . Легко проверяется, что пространство $C_0^\infty(\Lambda)$ - плотное в $\mathcal{H}_\Lambda(P)$. Для замкнутых $\Lambda \subset R^d$ определим $\mathcal{H}_\Lambda(P) = \bigcap_{\substack{\Lambda' \supset \Lambda \\ \Lambda' - \text{открытые}}} \mathcal{H}_{\Lambda'}(P)$. Билинейная форма $V(f,f) \equiv (A^{1/2} f, A^{1/2} f)$ является положительно определенной и непрерывной на пространстве $S(R^d)$. Тогда из теоремы Минлоса следует, что существует некоторая центрированная мера Гаусса μ_V^o на пространстве $S'(R^d)$, фурье-преобразование которой задается формулой:

$$\int_{S'(R^d)} \mu_V^o(d\phi) e^{i\phi(f)} = \exp -\frac{1}{2} V(f,f) = \exp -\frac{1}{2}(A^{1/2} f, A^{1/2} f).$$

Обозначим через $\mathcal{H}(\mu_V^o)$ метрическое пополнение /в норме $L^2_{\mu_V^o}$ / линейной оболочки случайных элементов вида $\phi(f)$, где $f \in S(R^d)$. Используя плотности $S(R^d)$ в пространстве $\mathcal{H}(P)$ и то, что отображение $f \to \phi(f)$ является изометрией, легко доказать, что пространство $\mathcal{H}(\mu_V^o)$ изометрично пространству $\mathcal{H}(P)$. Обозначим символом $\phi(f)$ случайный элемент из $\mathcal{H}(\mu_V^o)$, соответствующий заданному $f \in \mathcal{H}(P)$ этой изометрии.

Для произвольного непустого подмножества $\Lambda \subset R$ определим σ-алгебру $\Sigma(\Lambda)$ /соотв. $\hat{\Sigma}(\Lambda)$ / как минимальную /пополненную/ σ-алгебру, генерируемую системой случайных элементов $\{\phi(f) \,|\, f \in C_0^\infty(\Lambda)\}$ /соотв. $\{\phi(f) \,|\, f \in \mathcal{H}_\Lambda(P)\}$/. Очевидно, что $\Sigma(\Lambda) \subset \hat{\Sigma}(\Lambda)$. Для открытого множества $\Lambda \subset R^d$ можно легко доказать /используя плотность $C_0^\infty(\Lambda)$ в $\mathcal{H}_\Lambda(P)$/, что имеет место равенство $\Sigma(\Lambda) = \hat{\Sigma}(\Lambda)$ /μ_V^o - почти везде/. Для замкнутого $\Lambda \subset R^d$ определим σ-алгебру $\mathcal{F}(\Lambda)$ как $\mathcal{F}(\Lambda) = \bigcap_{\epsilon > 0} \Sigma(\Lambda_\epsilon)$, где $\Lambda_\epsilon = \{x \in R^d \,|\, \operatorname{dist}(x, \Lambda) < \epsilon\}$. Из предыдущих замечаний и этого определения получим:

$$\mathcal{F}(\Lambda) = \bigcap_{\epsilon > 0} \Sigma(\Lambda_\epsilon) = \bigcap_{\epsilon > 0} \hat{\Sigma}(\Lambda_\epsilon) = \hat{\mathcal{F}}(\Lambda).$$

Соберем теперь некоторые полезные для дальнейшего факты относительно обобщенных гауссовых полей, доказательство которых можно найти, например, в работах [18-20] .

Лемма 2.1

Пусть Λ - открытое /соотв. замкнутое/, ограниченное подмножество R^d и пусть Π_Λ - ортогональный проектор в пространстве $\mathcal{H}(P)$ на подпространство $\mathcal{H}_\Lambda(P)$.

1. Условные математические ожидания относительно меры μ_V^o и σ-алгебры $\mathcal{F}(\Lambda^c)$ /соотв. $\Sigma(\Lambda^c)$ / выражаются формулами

$$E_{\mu_V^o}\{e^{i\phi(f)} \,|\, \mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\eta) = e^{i\eta(\Pi_{\Lambda^c}(f))} \mu_{V_{\Lambda^c}}^o (e^{i\phi(f)}) = e^{i\eta(\Pi_{\Lambda^c}(f))} e^{-\frac{1}{2} V_{\Lambda^c}(f,f)} ,$$

где ковариация V_{Λ^c} определяется через

$$V_{\Lambda^c}(f,g) = ((1 - \Pi_{\Lambda^c})f, g)_A = V((1 - \Pi_{\Lambda^c})f, g). \qquad /2.1/$$

Формула /2.1/ верна для μ_V^o почти всех $\eta \in S'(R^d)$.

2. Разложение

$$\phi = (1 - \Pi_{\Lambda^c})^*(\phi) + \Pi^*_{\Lambda^c}(\phi).$$

/$\Pi^*_{\Lambda^c}$ обозначает дуальную операцию в $S'(R^d)$ Π_{Λ^c}, так что, например, $(1-\Pi^*_{\Lambda^c})(\phi)(f) = \phi((1-\Pi_{\Lambda^c})f)$/ определяет ортогональное разложение поля ϕ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}(\Lambda^c)$ /соотв. $\Sigma(\Lambda^c)$ /.

Следствие 2.2

Для ковариации V и для произвольной ограниченной открытой области $\Lambda \subset R^d$, процесс $\Pi^*_{\Lambda^c}(\phi)$ является $\mathcal{F}(\partial\Lambda)$ измеримым.

Это следствие выражает так называемое марковское свойство высшего порядка. Понятие было введено Мак Кином мл. /21/ и Питтом /22/, а потом анализировалось с различных точек зрения в работах /19, 20, 25/. В случае, когда оператор A есть оператор второго порядка, можно доказать, что $\mathcal{F}(\partial\Lambda) = \hat{\Sigma}(\partial\Lambda)$ для достаточно регулярных $\partial\Lambda$, и тогда это свойство совпадает со стандартным марковским свойством нулевого порядка.

Напомним определение локального марковского свойства. Пусть Λ - произвольная открытая область в R^d и пусть F и G - случайные величины, локализованные строго внутри областей Λ и Λ^c соответственно. Мера μ^o_V обладает локальным марковским свойством, когда имеет место равенство:

$$E_{\mu^o_V}\{F\cdot G|\mathcal{F}(\partial\Lambda)\} = E_{\mu^o_V}\{F|\mathcal{F}(\partial\Lambda)\}\, E_{\mu^o_V}\{G|\mathcal{F}(\partial\Lambda)\}. \qquad /2.2/$$

Будем говорить, что мера μ^o_V обладает глобальным марковским свойством в случае, когда равенство /2.2/ имеет место для произвольных, не обязательно ограниченных Λ.

На протяжении этой работы мы будем выбирать операторы A в следующем виде:

$$A = (-\Delta + a_1)\ldots(-\Delta + a_n), \quad 0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n. \qquad /2.3/$$

Для /2.3/ существует конструктивное описание проекторов Π_{Λ^c} в пространствах $\mathcal{H}(P)$ для достаточно регулярных областей Λ. Беря $9 \in C^\infty_0(R^d)$, можно несложными выкладками убедиться в том, что $\Pi_{\Lambda^c}(9)$ должно удовлетворять следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} A(\Pi_{\Lambda^c}(9))(x) = 0 & \text{для} \quad x \in \operatorname{Int}\Lambda \\ \partial^{k,int}_n(\Pi_{\Lambda^c}(9))(x) = (\partial^{k,int}_n 9)(x) & \text{для} \quad x \in \operatorname{Fr}\Lambda = \partial\Lambda,\ k=0,1,\ldots n-1, \end{cases} \qquad /2.4/$$

где $\partial^{k,int}_\Lambda$ - внутренняя, нормальная производная k-го порядка. В случае, когда Λ имеет границу $\partial\Lambda$ кусочно C^∞ гладкую и удовлетворяет так называемой конической регулярности /см. /24/ для справок/, доказывается, что $\Pi^*_{\Lambda^c}(f)$ задается слабым решением задачи /2.4/ в пространстве $S'(R^d)$. При условиях, наложенных на $\partial\Lambda$, как и выше доказывается, что для μ^o_V почти всех $\eta \in S'(R^d)$

задача /2.4/ корректно задана и имеет единственное слабое решение $\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)$. Это решение $\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)$ является вещественной аналитической функцией внутри Λ как решение однородного гиперэллиптического уравнения. Метод работы /24/ обобщает классические методы Винера /25/.

а/ Гиббсовские перестройки

Пусть μ^o_V - гауссова мера типа описанной выше. Произвольную случайную величину X_Λ, измеримую относительно $\Sigma(\Lambda)$, где Λ - ограниченная и открытая область, будем называть мультипликативным функционалом поля μ^o_V в случае, когда для произвольного открытого $\Lambda_1 \subset \Lambda$ имеет место разложение $X_\Lambda = X_{\Lambda_1}\cdot X_{\Lambda-\Lambda_1}$, где X_{Λ_1} является $\Sigma(\Lambda_1)$-измеримым, а $X_{\Lambda-\Lambda_1}$ - $\Sigma(\Lambda-\Lambda_1)$-измеримым. В этой работе мы возьмем мультипликативный функционал поля μ^o_V следующего вида:

$$X_\Lambda(\phi) = \exp z \iint :\cos\alpha\phi:_V(x)\,dx\,d\nu(\alpha) = \exp z \int_\Lambda^\Lambda d(\underline{x}) :e^{i\alpha\phi}:(x), \qquad /2.5/$$

где ν - произвольная, вещественная, ограниченная мера с компактным носителем на R^1,

$$z \in R^1,\ :\cos\alpha\phi:_V(x) = \exp\frac{\alpha^2}{2}V(0)\cos\alpha\phi(x),$$

$$:e^{i\alpha\phi}:_V(x) = \exp\frac{\alpha^2}{2}V(0)e^{i\alpha\phi(x)};\ d(\underline{x}) = dx\,dv(\alpha')\left(\frac{1}{2}\delta(\alpha'-\alpha)+\delta(\alpha'+\alpha)\right).$$

Будем предполагать, что $V(0) < \infty$ /см., однако, замечания параграфа /5/ работы /42/ /, что соответствует предположению о том, что $n > d$. С помощью такого же X_Λ определяется новая мера

$$\mu_\Lambda(z)(d\phi) = (Z_\Lambda(z))^{-1}\cdot X_\Lambda(\phi)\cdot\mu^o_V(d\phi)$$

$$Z_\Lambda(z) = \mu^o_V(X_\Lambda) \quad \int\mu^o_V(d\phi)X_\Lambda(\phi),$$

которая будет называться тригонометрическим возмущением меры μ^o_V в конечном объеме Λ. Особый интерес представляют термодинамические пределы мер μ_Λ. Простое применение анализа типа /28/ Кирквуда - Зальцбурга дает сразу

Лемма 2.3

Пусть $|z| < C(V)^{-1}\exp(-a_*^2 V(0) - 1)$

$$C(V) \quad \sup_\alpha \int |e^{-\alpha\beta V(x)} - 1|\,dx\,\nu(d\beta),$$

$$a_* = \sup\{|\alpha| : \alpha \in \operatorname{supp}\nu\}.$$

Тогда существует единственный термодинамический предел $\lim_\Lambda \mu_\Lambda(z) = \mu_\infty(z)$ в смысле слабой сходимости. Граничная мера $\mu_\infty(z)$

трансляционно-инвариантна и обладает кластерным свойством. Мера $\mu_\infty(z)$ имеет носитель на непрерывных функциях.

Доказательство

В работах [26, 27] доказывается существование и единственность $\mu_\infty(z)$. Применив алгебраический формализм, предложенный Рюэлем [28], получим кластерное /экспоненциально быстрое в случае $\alpha_1 > 0$ / свойство. Свойство носителя является следствием фундаментального критерия Колмогорова.

Из предыдущей работы [15] следует локальное марковское свойство меры $\mu_\infty(z)$.

Предложение 2.4

Для $|z| < C^{-1}(V)\exp - \alpha_*^2 V(0) - 1$ мера $\mu_\infty(z)$ обладает локальным марковским свойством.

Вопрос о глобальном марковском свойстве для меры $\mu_\infty(z)$ является более тонким. Апеллируя к детальному обсуждению, проведенному в [15], мы видим, что проверка глобального марковского свойства опирается на анализ некоторых уравнений типа Д-Л-Р. Введем некоторые определения.

Определение 2.1

Произвольную вероятностную борелевскую меру μ на пространстве $S'(R^d)$ будем называть V-регулярной мерой, когда существует положительное число c, такое, что

$$\mu(\phi^2(f)) \le cV(f, f).$$

Множество всех V-регулярных мер обозначим через $R(V)$.

Определение 2.2

Всякую вероятностную меру μ на $S'(R^d)$ будем называть гиббсовской мерой, соответствующей тригонометрическому /2.6/ возмущению гауссовой меры μ_V^o в случае, когда для произвольной ограниченной открытой области $\Lambda \subset R^d$ условные математические ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}(\Lambda^c)$ задаются мерой μ_Λ в следующем виде:

$$E_\mu \{ - | \mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\cdot) = E_{\mu_\Lambda} \{ - | \mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\cdot) \quad (\mu - \text{почти везде}) \qquad /2.6/$$

и, кроме того, мера μ локально непрерывна относительно меры μ_V^o. Множество всех гиббсовских мер, соответствующих тригонометрическому возмущению /2.5/, обозначим через $\mathcal{G}(z)$, и его пересечение с множеством $R(V)$ будем обозначать через $\mathcal{G}_r(z)$.

Замечание

Более детальное определение множества $\mathcal{G}_r(z)$ можно найти в работе [42]. Там же получены некоторые результаты относительно множества $\mathcal{G}_r(z)$ в случае больших положительных значений z.

На основе результатов работы [15] легко доказать

Лемму 2.5:

Для всех $|z| < C(V)^{-1}\exp(-\alpha_*^2 V(0) - 1)$ мера $\mu_\infty(z)$ принадлежит множеству $\mathcal{G}_r(z)$.

Обозначим $R_0 = \{(x_0, \bar{x}) \in R^d | x_0 = 0\}$. Возьмем произвольную меру $\mu \in \mathcal{G}_r(z)$. Анализ, проведенный Альбеверио и Хоег-Кроном [5], показывает, что проверка глобального марковского свойства меры относительно гиперплоскости R_0 сводится к проверке того, что для $\mu_\infty(z)$ - почти всех $\eta \in S'(R^d)$ уравнения Д-Л-Р, выписанные для заданного в гиперплоскости R_0 возмущения /см. уравнение /5.1//, имеют единственное решение. В этой работе мы будем следовать такой же стратегии проверки глобального марковского свойства меры $\mu_\infty(z)$. В параграфе 3 этой работы мы доказываем, что мера $\mu_\infty(z)$ является единственным V-регулярным решением уравнений Д-Л-Р /2.6/. В последующем параграфе мы расширим это доказательство для случая определенных в R_0 возмущений гауссовой меры μ_V^o.

б/. Технические предположения

Пусть ограниченная область $\Lambda \subset R^d$ удовлетворяет всем условиям, необходимым для существования и единственности решения μ_V^o - стохастической задачи типа /2.4/. Тогда для μ_V^o почти всех $\eta \in S'(R^d)$ решение /слабое/ задачи /2.4/ задает нам $\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)$.

В этом случае существует набор потенциалов $(b_0(\cdot,\cdot), \dots, b_{n-1}(\cdot,\cdot))$, так что каждый $b_i(y, x)$ является $\partial\Lambda \times R^d$ измеримой функцией аргументов $y \in \partial\Lambda$ и $x \in R^d$, и что для η достаточно гладких мы можем написать формулу

$$\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\partial\Lambda} b_i(y, x)(\partial_n^{i,\mathrm{int}} \eta)(y)\, d\sigma(y), \quad x \notin \partial\Lambda,$$

где $d\sigma(y)$ обозначает поверхностную меру на $\partial\Lambda$. Из этого равенства следует:

$$\mu_V^o(\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)^2(f)) = K_{\Lambda^c}(f, f) = \sum_{i,i'=0}^{n-1} \int_{\partial\Lambda} d\sigma(y') \int_{\partial\Lambda} d\sigma(y'') \int dx \int dy \,\times$$

$$\times\, b_i(y', x)\, b_{i'}(y'', y)\, f(x)\, f(y)\, (\partial_n^{i,\mathrm{int}}(y')\, \partial_n^{i',\mathrm{int}}(y'') V(y', y'')).$$

Легко показать, что для операторов A вида /2.3/ их ковариации V являются вещественно-аналитическими и экспоненциально быстро убывающими функциями аргумента $|x - y|$. Такое же убывание имеют их производные. Поэтому, беря Λ такое, что $K_{\Lambda^c}(x, y)$ является непрерывной функцией $x, y \in \mathrm{Int}\,\Lambda$, можно с помощью предельной процедуры определить случайный элемент $\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)$ /для μ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ в случае, когда $\mu \in R(V)$/ как L^2_μ - случайный элемент со следующей оценкой его нормы:

$$\mu(\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)^2(x)) \le cK_{\Lambda^c}(x,x).$$

Определение 2.3

Область $\Lambda \subset R^d$ будем называть строго V-регулярной / sV-регулярной/, когда существует непрерывная функция $F:(0,\infty)\to[0,\infty)$, которая монотонно убывает до нуля не медленнее, чем некоторая степень $\Gamma^{-d-\epsilon}$, $\epsilon > 0$ такая, что верна следующая оценка:

$$K_{\Lambda^c}(x,x) < F(\mathrm{dist}(x,\Lambda^c)).$$

Кроме того, в области Λ, μ^o_V стохастическая /2.4/ задача имеет единственное слабое решение.

Возьмем теперь произвольную sV-регулярную область $\Lambda \subset R^d$. Тогда элементарный расчет показывает

$$E_{\mu_\Lambda}\{F(\phi)|\mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\eta) = \frac{E_{\mu^o_V}\{F(\phi)|\ X_\Lambda|\mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\eta)}{E_{\mu^o_V}\{X_\Lambda|\mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\eta)} =$$

$$= \frac{\mu_{V_{\Lambda^c}}(F(\phi+\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta))X_\Lambda(\phi+\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta))}{\mu^o_{V_{\Lambda^c}}(X_\Lambda(\phi+\Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)))} = E_\mu\{F|\mathcal{F}\}(\eta). \qquad /2.7/$$

Из предыдущих рассуждений, локальной относительной непрерывности мер $\mu \in \mathcal{G}_r(z)$ и μ^o_V прямо следует, что формулу /2.7/ можно использовать для μ - почти всех $\eta \in S'(R^d)$ и sV-регулярного Λ.

Определение 2.4

Будем называть ковариацию регулярной в случае, когда существует sV-регулярное множество Λ, такое, что все его гомотетические образы $\Lambda_\rho = \{x = \rho y \mid y \in \Lambda\}$ являются sV-регулярными множествами.

Заметим, что во многих интересных случаях можно проверить выполнение условий определения 2.4 для операторов A вида /2.4/ на сферах. Эти же рассуждения дают тогда экспоненциальное убывание функции F из определения 2.3.

Определим σ-алгебру событий на бесконечности

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{\substack{\Lambda\subset R^d\\ \Lambda\text{ – ограниченное, открытое.}}} \mathcal{F}(\Lambda^c)$$

Тогда имеет место

Лемма 2.6

Мера $\mu \in \mathcal{G}_r(z)$ является чистой мерой Гиббса только тогда, когда σ-алгебра $\mathcal{G}_\infty$ является 0-1 σ-алгеброй для меры μ.

Лемма 2.7

Мера $\mu \in \mathcal{G}_r(z)$ является единственной мерой Гиббса только тогда, когда для μ - почти всех $\eta \in S'(R^d)$, произвольного случайного элемента $F \in L^1\mu$ и для произвольного счетно-генерируемого фильтра $\{\Lambda\}$, состоящего из открытых, ограниченных областей и сходящегося к R^d, имеет место равенство:

$$\lim_{\{\Lambda\}} E_{\mu_{\Lambda^c}}\{F(\phi)|\mathcal{F}(\Lambda^c)\}(\eta) = \mu(F(\phi)). \qquad /2.8/$$

Эти результаты хорошо известны. Из них непосредственно следует наша тактика проверки глобального марковского свойства меры $\mu_\infty(z)$. Пусть $\{\Lambda\}$ будет фильтром, как и выше, и пусть V - регулярная ковариация. Возьмем s-V регулярное множество Y, как и в определении 2.4. Используя мартингальное свойство условных математических ожиданий и теорему о мартингальной сходимости, заключаем, что вместо того, чтобы контролировать предел $\lim_\Lambda E_{\mu_\Lambda}\{-|\cdot\mathcal{F}(\Lambda^c)\}$, можем ограничиться контролем предела $\lim_{n\to\infty} E_{\mu_{Y_n}}\{-|\mathcal{F}(Y^c_n)\}$.

Определение 2.5

Произвольную последовательность множеств $\{Y_n\}$, как и выше, будем называть V-допустимой последовательностью.

Лемма 2.8

Пусть $\mu \in R(V)$ и пусть V- регулярная ковариация. Возьмем две допустимые последовательности (Y_n), (Λ_n) такие, что $\lim_{n\to\infty}(Y_n, \Lambda^c_n) = \infty$. Тогда существует функция $g: S'(R^d)\to[0,\infty]$, конечная μ - почти везде и такая, что, взяв произвольный единичный куб $\Lambda \in \boldsymbol{R}^d$, можно получить оценку

$$\int_\Lambda \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)^2(x)\,dx \le g(\eta)F(\mathrm{dist}(\Lambda,\Lambda^c_n))^\beta,$$

предполагая дополнительно, что β i $\{Y_n\}$ такое, что

$$\sum_n F(\mathrm{dist}(Y_n,\Lambda^c_n))^{1-\beta}\cdot|Y_n| < \infty.$$

Следствие 2.9

Пусть $\mu \in R(V)$, а V - регулярная ковариация. Возьмем любую V-допустимую последовательность (Λ_n). Тогда для произвольного единичного куба $\Lambda \subset R^d$ имеют место равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\|\Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)\|_{L^1(\Delta)} = \lim_{n\to\infty}\|\Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)\|_{L^2(\Delta)} = 0,$$

$$\cdot \{\Phi_{n-1}(x,\alpha)'_{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d(\underline{y})_m \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} [e^{-\alpha_1 \beta_j V_{\Lambda^c}(x_1 - y_j)} - 1]\, \Phi^{n+m-1}((x,\alpha)'_{n-1}, (y,\beta)_m)\},$$

$$(\hat{\mathbf{X}}_\Lambda \Phi)_n (x,\alpha)_n \equiv \prod_{i=1}^{n} \chi_\Lambda(x_i) \Phi_n(x,\alpha)_n = \hat{\chi}_\Lambda((x)_n) \Phi_n (x,\alpha)_n ,$$

а также вектор $\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{\alpha}_{(n)} = \delta_{n,1}$. Используя эти определения, уравнения /3.3/ можно переписать следующим образом:

$$\rho^\eta_\Lambda((\underline{x}_n)) = (z\, \hat{\chi}_\Lambda((x)_n) : e^{i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x_1)} :_{K_{\Lambda^c}})(\boldsymbol{\alpha}) +$$

$$+ z\, \hat{\chi}_\Lambda((x)_n) : e^{i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x_1)} :_{K_{\Lambda^c}} (\boldsymbol{K}_{\Lambda^c} \rho^\eta_\Lambda)_n (x,\alpha)_n . \qquad /3.4/$$

Ключевой шаг в доказательстве единственности меры $\mu_\infty(z)$ состоит в следующем предложении.

Предложение 3.1

Пусть $\{\Lambda_n\}$ - произвольная V-допустимая последовательность. Тогда для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$, произвольного компакта $\Xi \subset R^d$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x)_m \in \Xi} | \rho^\eta_{\Lambda_n}((\underline{x})_m) - \rho_\infty((\underline{x})_n)| = 0,$$

при предположении, что $|z| < C^{-1}(V)\exp(-\alpha_*^2 V(0) - 1)$.

Доказательство этого результата проводится в несколько этапов. Обозначим через $\tilde{\Pi}$ оператор перестановки в $\boldsymbol{B}_\xi$ /см. [28]/ и перепишем равенства /3.4/, вставляя $\tilde{\Pi}\boldsymbol{K}_{\Lambda^c}$ вместо $\boldsymbol{K}_{\Lambda^c}$ и следя за тем, чтобы перестановка $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(\Lambda^c)$ удовлетворяла соотношению

$$\sum_{j=2}^{m} \alpha_1 \alpha_j V_{\Lambda^c}(x_1 - x_j) \geq -\alpha_*^2 m V_{\Lambda^c}(0).$$

Лемма 3.2

1. Для $\xi = C^{-1}(V)$ и $|z| < C^{-1}(V)\exp(-\alpha_*^2 V(0) - 1)$ верна оценка

$$\| z e^{i\alpha \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)} \hat{\Pi} \boldsymbol{K}_{\Lambda^c} \| < 1,$$

однородная по η и Λ .

2. Для $|z| < C^{-1}(V)\exp(-\alpha_*^2 V(0) - 1)$ верна оценка:

$$\|\rho^\eta_\Lambda\|_\xi \leq \frac{zC(V)}{1 - zC(V)e^{\alpha_*^2 V(0) + 1}} e^{\alpha_*^2 V(0)} ,$$

однородная по η и Λ .

Доказательство

Возьмем $\Phi \in \boldsymbol{B}_\xi$ и заметим:

$$\xi^{-n} |(z e^{i\alpha \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x)} \tilde{\Pi} \boldsymbol{K}_{\Lambda^c})(\Phi)_n (\underline{x})_n|$$

$$\leq \xi^{-1}|z| \exp(\xi C(V_{\Lambda^c}))\exp(\alpha_*^2 V_{\Lambda^c}(0))\exp(\alpha_*^2 V_{\Lambda^c}(0)) \|\Phi\|_\xi \leq$$

$$\leq \xi^{-1}|z| \exp(\alpha^2 V(0)) \exp(\xi C(V)) \|\Phi\|_\xi ,$$

что доказывает первую часть. Чтобы доказать вторую часть, используем равенство /3.4/, получая:

$$\|\rho^\eta_\Lambda\|_\xi \leq \xi^{-1} \exp(\frac{\alpha^2}{2} * K_{\Lambda^c}(0)) +$$

$$+ \xi^{-1} |z| \exp(\frac{\alpha^2}{2} * V(0)) \exp(\xi C(V)) \cdot \|\rho^\eta_\Lambda\|_\xi ,$$

откуда и следует результат.

Пространство $\boldsymbol{B}_\xi$ является дуальным к пространству ${}^*\boldsymbol{B}_\xi$, которое состоит из всех возможных последовательностей $f = \{f_n(x,\alpha)_n\}_1^\infty$, для которых конечна следующая норма:

$${}^*\|f\|_\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \int d(\underline{x})_n |f_n(x,\alpha)_n| .$$

Из леммы 3.2./2/ следует, что для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ векторы $\{\rho^\eta_{\Lambda_n}\}_{\Lambda_n}$ составляют слабо прекомпактное подмножество пространства $\boldsymbol{B}_\xi$, наделенного топологией $*$-слабой сходимости. Используя теорему Банаха - Алоодлоу, заключаем, что существует подпоследовательность $(n') \subset (n)$ такая, что последовательность $\{\rho^\eta_{\Lambda_{n'}}\}_{n'}$ является сходящейся в этой топологии.

Лемма 3.4

1. Для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ и произвольной V-допустимой последовательности имеет место равенство:

$$* - w \lim_{n\to\infty} : e^{i\alpha \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)}(x) :_{K_{\Lambda^c_n}} = 1 .$$

2. Равенство $\lim_{n\to\infty} : e^{i\alpha \Pi_{\Lambda^c_n}(\eta)}(x) :_{K_{\Lambda^c_n}}$ выполняется равномерно по компактам.

Доказательство является прямым следствием леммы 2.8, предположенного убывания $K_{\Lambda^c_n}(x,x)$ и того, что внутри Λ_n, $\Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)$ является вещественно аналитическим.

Лемма 3.5

Для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$, для произвольной V-допустимой последовательности (Λ_n) имеют место равенства

$$:e^{i\alpha \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}:_{K_{\Lambda^c_n}} K_{\Lambda^c_n} \xrightarrow[*\to w]{n\to\infty} K_\infty \qquad /3.5/$$

$$:e^{i\alpha \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}:_{K_{\Lambda^c_n}} \hat{\Pi} K_{\Lambda^c_n} \xrightarrow[*\to w]{n\to\infty} K_\infty . \qquad /3.6/$$

Доказательство

Пределы /3.5/ и /3.6/ берутся относительно $*$-слабой топологии пространства B_ξ, что равносильно эквивалентности /3.5/, /3.6/ и следующим равенствам:

$$\forall_{\substack{f\in *B_\xi \\ \Phi \in B_\xi}} \quad \lim_{n\to\infty} < f, (K_{\Lambda^c_n} - K_\infty)\Phi > = 0 .$$

$$\lim_{n\to\infty} < f, (\hat{\Pi} K_{\Lambda^c_n} - \hat{\Pi} K_\infty)\Phi > = 0 .$$

Как хорошо известно, $*$-слабая сходимость K_{Λ^c} к K_∞ /соотв. $\hat{\Pi} K_{\Lambda^c}$ к $\hat{\Pi} K_\infty$/ вытекает из сильной сходимости дуальных операторов $*(K_{\Lambda^c}) \to *K_\infty$ /соотв. $*(\hat{\Pi} K_{\Lambda^c_*}) \to *(\hat{\Pi} K_\infty)$ /. Дуальные операторы $*(K_{\Lambda^c})$, $*(\hat{\Pi} K_{\Lambda^c})$, $*K_\infty$, $(\hat{\Pi} K_\infty)$ легко вычисляются /см. работу [30] / и задаются формулами

$$(*K_{\Lambda^c} f)_n (x,\alpha)_n = [*k \exp - \sum_{i=2}^{n} \alpha_1 \alpha_i V_{\Lambda^c}(x_1 - x_i) \hat{\chi}_\Lambda (f)]_n (x,\alpha)_n ;$$

$$(*K_\infty f)_n (x,\alpha)_n = [*k \exp - \sum_{i=2}^{n} \alpha_1 \alpha_i V_{\Lambda^c}(x_1 - x_i)(f)]_n (x,\alpha)_n ;$$

$$*\hat{\Pi}(\Lambda^c) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \nu_j , \quad *(\hat{\Pi} K_{\Lambda^c}) = *(K_{\Lambda^c}) \cdot *(\hat{\Pi}),$$

где оператор $*k$ определен формулой

$$(*k(\Lambda^c) f)_n (x,\alpha)_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d(\underline{y})_m \prod_{j=1}^{m} [e^{-\alpha_1 \beta_j V_{\Lambda^c}(x_1 - y_j)} - 1] \cdot$$

$$\cdot f^{n+m-1}((\underline{y})_m, ((\underline{x})_n - (\underline{x})_1))\Theta_{n+m-1} ,$$

а операторы π_j, ν_j определены, например, в работе [30] формулы /3.4/ и /3.4"/.

На основе этих явных выражений и предположенной нами быстрой сходимости V_{Λ^c} к V, нетрудно получить доказательство сходимостей в /3.5/ и /3.6/.

Из леммы 3.4 и леммы 3.5 сразу получаем

Следствие 3.6

Пусть $|z| < C^{-1}(V)\exp(-\alpha^2_* V(0) - 1)$ и пусть (Λ_n), V-допустимая последовательность. Тогда для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ имеет место равенство

$$* - w \lim_{n\to\infty} \{\rho^\eta_{\Lambda_n}((\underline{x})_m)\} = \{\rho_\infty((\underline{x})_m)\}.$$

Доказательство

Следующие равенства для резольвент

$$R_z(*[:e^{i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x_1)}:_{K_{\Lambda^c}} \hat{\Pi} K_{\Lambda^c}]) = *R_z([:e^{-i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c}(\eta)(x_1)}:_{K_{\Lambda^c}} \hat{\Pi} K_{\Lambda^c}])$$

$$R_z(*(\hat{\Pi} K_\infty)) = *R_z(\hat{\Pi} K_\infty)$$

и соответствующая их сходимость являются известной теоремой Филипса [31]. На основании леммы 3.2/1/, леммы 3.5/1/, леммы /3.4/ и того, что во всякой дуальной паре пространств $(*B_\xi, (B_\xi))$ сходимость $f_n \xrightarrow{*\|\ \|} f_\infty$ и $\Phi_n \xrightarrow{*-w} \Phi_\infty$ влечет за собой сходимость $< f_n, \Phi_n > \longrightarrow < f_\infty, \Phi_\infty >$, получаем несложным путем то, что для произвольного $f \in *B_\xi$ в $|z| < C^{-1}(V)\exp[-\alpha^2_* V(0) - 1]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} < f, \rho^\eta_{\Lambda_n} - \rho_\infty > = \lim_{n\to\infty} < f, R_z(:e^{-i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)}:_{K_{\Lambda^c_n}} \hat{\Pi} K_{\Lambda^c_n}) \times$$

$$\times (\chi_\Lambda :e^{i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)}:_{K_{\Lambda^c_n}} \alpha) - R_z(\hat{\Pi} K_\infty)\alpha > =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{ < (*R_z(:e^{-i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x_1)}:_{K_{\Lambda^c_n}} \hat{\Pi} K_{\Lambda^c_n}) - *R_z(\hat{\Pi} K_\infty)) f,$$

$$(\chi_\Lambda :e^{i\alpha_1 \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}:_{K_{\Lambda^c_n}} - 1)\alpha > +$$

$$+ < (*R_z(:e^{-i\alpha \Pi^*_{\Lambda^c_n}(\eta)(x)}:_{K_{\Lambda^c_n}} \hat{\Pi} K_{\Lambda^c_n}) - *R_z(\Pi K_\infty))\alpha > = 0 .$$

Теперь наметим доказательство Предложения 3.1. Пусть $|z| < C^{-1}(V)\exp(-\alpha_*^2 V(0) - 1)$ и пусть (Λ_n) будет произвольной V-допустимой последовательностью. Интегрируя по частям все экспоненты в формуле /3.2/, получим следующие равенства:

$$\rho^{\eta}_{\Lambda_n}((\underline{x})_m) = z^m \hat{\chi}_{\Lambda}(x)_m \prod_{i=1}^{m} :e^{i\alpha_i \Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)(x_i)}:_{K_{\Lambda_n^c}} \times$$

$$\times \exp - \sum_{i<j}^{m} \alpha_i \alpha_j V_{\Lambda^c}(x_i - x_j) \times$$

$$\times \mu^{\eta}_{\Lambda_n}\Big(\exp\big(z\int_{\Lambda_n} d(\underline{x}) :e^{i\alpha\phi}:_V\big)\, e^{i\alpha\Pi^*_{\Lambda_n^c}(\eta)} \Big(\prod_{i=1}^{m} e^{-\alpha\alpha_L V_{\Lambda_n^c}(x_i - x)} - 1\Big)\Big),$$

представляющие собой не что иное, как уравнения Майера - Монтролла. Похожим уравнениям удовлетворяют также ρ_∞. Сравнение этих двух серий тождеств и предположение о быстрой сходимости $V_{\Lambda^c} \to V$ сразу дает доказательство предложения 3.1 /сравним также с /30,32/. Из предложения 3.1 и формулы /3.2/ сразу следует доказательство теоремы:

Теорема 3.1

Пусть $|z| < C^{-1}(V)\exp(-\alpha_*^2 V(0) - 1)$. Тогда мера $\mu_\infty(z)$ является единственным, V-регулярным решением уравнений Д-Л-Р /2.6/.

4. ОТ ЛОКАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО СВОЙСТВА К ГЛОБАЛЬНОМУ

Пусть V — марковская регулярная ковариация, определенная с помощью оператора /2.3/. В этом параграфе доказывается /при выполнении некоторых технических предположений/, что мера $\mu_\infty(z)$ обладает глобальным марковским свойством. В последующем мы ограничимся проверкой этого свойства для гиперплоскости R_o.

Из замечаний, сделанных в параграфе 2, следует, что наша задача состоит в доказательстве существования только одной гиббсовской меры, соответствующей гауссовской $\mu^o_{V_{R_o}}$ и ее возмущению вида

$$X^{\eta}_{\Lambda}(\phi) = z\int_{\Lambda} d(\underline{x}) :e^{i\alpha\phi}:_{V_{R_o}}(x) :e^{i\alpha\Pi^*_{R_o}(\eta)(x)}:_{K_{R_o}}$$

для почти всех $\eta \in S'(R^d)$.

Пусть (Λ_n) будет V-допустимой последовательностью. Примем обозначение $\Lambda_n^{\pm} = \Lambda_n \cap R^d_{\pm}$, где, по определению, $R^d_{\pm} = \{(x_o, \bar{x}) | x_o > 0\ (x_o < 0)\}$. Предположим также, что $\partial\Lambda_n \cap R_o$ имеют размерность $d-2$. Обозначим также $\overline{\partial\Lambda_n} = \partial\Lambda_n - R_o$.

Используя уравнения Д-Л-Р и локальное марковское свойство, нетрудно получить следующие выражения на условные математические ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}(R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n})$:

$$E_{\mu_\infty(z)}\{F | \mathcal{F}(R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n})\}(\cdot) =$$

$$= \frac{E_{\mu^o_V}\{F | \exp(z\int_{\Lambda_n} d(\underline{x}) :e^{i\alpha\phi}:_V(x)) | \mathcal{F}(R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n})\}(\cdot)}{E_{\mu^o_V}\{F | \exp(z\int_{\Lambda_n} d(\underline{x}) :e^{i\alpha\phi}:_V(x)) | \mathcal{F}(R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n})\}(\cdot)} =$$

$$= \frac{\mu^o_{V_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}}(F(\phi + \Pi^*_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}(\cdot))\, X_\Lambda(\phi + \Pi^*_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}(\cdot)))}{\mu^o_{V_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}}(X_\Lambda(\phi + \Pi^*_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}(\cdot)))},$$

которые верны для произвольной строго $\Lambda_n - R_o$ измеримой и $L^1_{\mu_\infty(z)}$ интегрируемой случайной величины F и для почти всех $\eta \in S'(R^d)$. Операторы $\Pi^*_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}$ определяются как дуальные к соответствующим проекторам $\Pi_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}$ в $\mathcal{H}(P)$ пространстве. Беря, в частности, $F(\phi) = e^{i\phi(f)}$, где $\mathrm{supp}\, f \not\subset \Lambda_n - \Sigma_o$, получим:

$$E_{\mu_\infty(z)}\{e^{i\phi(f)} | \mathcal{F}(R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}\}(\eta) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}V_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}(f,f)}\, e^{i\Pi^*_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}(\eta)(f)} \times \qquad /4.1/$$

$$\times \mu^{\eta}_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}\Big(\exp\Big[z\int_{\Lambda_n} d(\underline{x}) :e^{i\alpha\phi}:_V e^{i\alpha\Pi^*_{R_o \cup \partial B_n}(\eta)} \big(e^{-\alpha(V_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}} * f)(x)} - 1\big)\Big]\Big).$$

Теперь видно, что задача состоит в проверке следующего равенства:

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mu_\infty(z)}\{e^{i\phi(f)} | \mathcal{F}(R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n})\}(\eta) = E_{\mu_\infty(z)}\{e^{i\phi(f)} | \mathcal{F}(R_o)\}(\eta), \qquad /4.2/$$

для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$. Сравнивая выражение /4.1/ с /4.2/, получаем, что нужно проверить:

А/ для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \langle \eta, \Pi_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda_n}}(f) \rangle = \langle \eta, \Pi_{R_o}(f) \rangle$$

и

Б/ определяя следующие условные корреляционные функции

$$\rho^{\eta, R_o}_{\Lambda}(\underline{x})_n = \mu^{\eta}_{R_o,\Lambda}\Big(\prod_{i=1}^{m} :e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:_{V_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda}}}\Big) z^m \prod_{i=1}^{m} :e^{i\alpha_i \Pi^*_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda}}(\eta)}(x_i):_{K_{R_o \cup \overline{\partial\Lambda}}},$$

где

$$\mu^{\eta}_{R_o,\Lambda}(-) = (Z^{\eta}_{R_o\cup\Lambda}(z))^{-1}\cdot\mu^{o}_{V_{R_o}\cup\partial\Lambda}(-X_{\Lambda}(\phi+\Pi^{*}_{R_o\cup\overline{\partial\Lambda}}(\eta)),$$

$$Z^{\eta}_{R_o\cup\overline{\partial\Lambda}}(z) = \mu^{o}_{V_{R_o}\cup\partial\Lambda}(X_{\Lambda}(\phi+\Pi^{*}_{R_o\cup\overline{\partial\Lambda}}(\eta)),$$

надо доказать, что имеют место равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\rho^{\eta,R_o}_{\Lambda_n}((\underline{x})_n) = \rho^{\eta,R_o}_{\infty}((\underline{x})_n),$$

где

$$\rho^{\eta,R_o}_{\infty}((\underline{x})_n) = z^n\prod_{i=1}^{n}:e^{i\alpha_i\Pi^{*}_{R_o}(\eta)}(x_i):_{K_{R_o}}\bar{\mu}^{\eta}_{R_o,\infty}\Big(\prod_{i=1}^{n}:e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:_{V_{R_o}}\Big) \qquad /4.3/$$

$$\bar{\mu}^{\eta}_{R_o,\infty} = w-\lim_{n\to\infty}\bar{\mu}^{\eta}_{R_o,Y_n}.$$

(Y_n) - произвольная V-допустимая последовательность, а мера $\bar{\mu}^{\eta}_{R_o,Y_n}$ определена как

$$\bar{\mu}^{\eta}_{R_o,Y_n} = (Z^{\eta}_{R_o,Y_n}(z))^{-1}X_{Y_n}(\phi+\Pi^{*}_{R_o}(\eta))\mu^{o}_{V_{R_o}}.$$

$$Z^{\eta}_{R_o,Y_n}(z) = \mu^{o}_{V_R}(X_{Y_n}(\phi+\Pi^{*}_{R_o}(\eta))).$$

Стандартный анализ уравнений Кирквуда - Зальцбурга влечет за собой существование пределов /4.3/ для малых $|z|$ и для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta\in S'(R^d)$. Некоторые аргументы из теории мартингалов дают существование $\bar{\mu}^{\eta}_{R_o,\infty}$ и равенство /4.3/ для всех $|z|<C^{-1}(V)\cdot\exp(-\alpha^2_* V(0)-1)$ и почти всех $\eta\in S'(R^d)$.

Теперь сформулируем основные предположения относительно V, при выполнении которых мы умеем проверить программу, заключенную в А/ и Б/.

Определение 4.1

Пусть $\partial B(\rho_n)$ - произвольная последовательность сфер вида $\partial B(\rho_n) = \{x\in R^d \mid |x| = \rho_n\}$, где $\rho_n\to\infty$, когда $n\to\infty$. Пусть Δ - произвольный единичный куб, содержащийся строго внутри $R^d - R_o$. В случае, когда регулярная марковская ковариация V обладает свойствами:

1/ $\lim_{n\to\infty}\|\Pi^{*}_{R_o\cup\overline{\partial B(\rho_n)}}(\eta)-\Pi^{*}_{R_o}(\eta)\|_{L^1(\Delta)} =$

$= \lim_{n\to\infty}\|\Pi^{*}_{R_o\cup\overline{\partial B(\rho_n)}}(\eta)-\Pi^{*}_{R_o}(\eta)\|_{L^2(\Delta)} = 0,$

верными для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta\in S'(R^d)$,

2/

$$K_{R_o\cup\overline{\partial B(\rho_n)}}(x,x)\longrightarrow K_{R_o}(x,x)$$

равномерно по компактам в $R^d - R_o$, будем говорить, что V является строго марковской. Класс всех строго марковских ковариаций обозначим через $\mathcal{M}$. Для $V\in\mathcal{M}$ проверка пункта А/ тривиальна.

По аналогии с анализом, проведенным в параграфе 3, будем проверять свойство Б/ нашей программы.

Корреляционные функции ρ^{η,R_o}_{∞} удовлетворяют следующим уравнениям Кирквуда - Зальцбурга

$$\rho^{\eta,R_o}_{\infty} = z:e^{i\alpha_1\Pi^{*}_{R_o}(\eta)(x)}:_{K_{R_o}} + z:e^{i\alpha_1\Pi^{*}_{R_o}(\eta)}:_{K_{R_o}}(\hat{\Pi}\boldsymbol{K}_{\infty}(R_o,\eta))\rho^{\eta,R_o}_{\infty}$$

для малых $|z|$ равномерно по η. Оператор $\boldsymbol{K}_{\infty}(R_o,\eta)$ определен в соответствующем пространстве типа $\boldsymbol{B}_{\xi}$ формулами:

$$(\boldsymbol{K}(R_o)\Phi)_1(x_1,\alpha_1) = \sum_{m=0}^{\infty}\int d(\underline{y})_m\prod_{i=1}^{m}[e^{-\alpha_1\beta_j V_{R_o}(x_1-y_j)}-1]\Phi_m(\underline{y})_m,$$

$$(\boldsymbol{K}(R_o)\Phi)_m(x,\alpha)_m = \exp -\sum_{j=2}^{m}\alpha_1\alpha_j V_{R_o}(x_1-y_j)\times \qquad /4.4/$$

$$\times\{\Phi_{n-1}(x,\alpha)'_{n-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int d(y)_m\prod_{j=1}^{m}[e^{-\alpha_1\beta_j V_{R_o}(x_1-y_j)}-1]\times$$

$$\times\Phi_{n+m-1}((x,\alpha)'_{n-1},(y,\beta)_m)\}.$$

Соответствующие уравнения для $\rho^{\eta,R_o}_{B(n)}$ имеют вид

$$\rho^{\eta,R_o}_{B(n)} = z:e^{i\alpha_1\Pi^{*}_{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x_1)}:_{K_{R_o}\cup\overline{\partial B(n)}}\alpha +$$

$$+ z:e^{i\alpha_1\Pi^{*}_{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(\eta)}:_{K_{R_o}\cup\overline{\partial B(n)}}\cdot\hat{\Pi}\boldsymbol{K}(R_o\cup\overline{\partial B}(n))\rho^{\eta,R_o}_{B(n)},$$

где оператор $\boldsymbol{K}(R_o\cup\overline{\partial B}(n))$ определяется точно формулами /4.4/, если в них заменить V_{R_o} на $V_{R_o\cup\overline{\partial B}(n)}$.

Предложение 4.1

Пусть $V \in \mathcal{M}$. Тогда:

1/ для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ выполняется равенство

$$*-w\lim_{n\to\infty} \hat{\Pi} K_{B(n)}(R_o \cup \overline{\partial B(n)}) = \hat{\Pi} K_\infty(R_o);$$

2/ для $\mu_\infty(z)$ почти всех $\eta \in S'(R^d)$ имеет место сходимость

$$*-w\lim_{n\to\infty} :e^{i\alpha\Pi^*_{R_o\cup\partial B(n)}(\eta)}:(x)_{K_{R_o\cup\partial B(n)}} = :e^{i\alpha\Pi^*_{R_o}(\eta)}:_{K_{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}}(x).$$

Это предложение доказывается в полной аналогии с доказательствами параграфа 3, поэтому мы не будем его выписывать.

Применяя тождества типа Майера - Монтролла, как в параграфе 3, и аргументы, подобные тем, которые использовались в доказательстве Предложения 3, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho^{\eta, R_o}_{B(n)} = \rho^{\eta, R_o}_\infty$$

равномерно по компактам. Этим способом мы доказали следующий результат:

Теорема 4.1

Предположим, что $V \in sM$ и что μ^o_V имеет глобальное марковское свойство относительно гиперплоскости R_o. Тогда для достаточно малых $|z|$ мера $\mu_\infty(z)$ обладает глобальным марковским свойством относительно гиперплоскости R_o.

В заключение вернемся к обсуждению свойства строгой "марковости", введенной определением 4.1. Допустим, что оператор A, определяющий ковариацию V, таков, что $\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta) = \Pi^*_{R_o \cup \partial B(n)}(\eta) - \Pi^*_{R_o}(\eta)(x)$ является решением уравнения

$$A\,\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x) = 0$$

для $x \in R^d - (R_o \cup \partial B(n))$ таким, что для $x \in R_o$: имеем $\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x) = 0, \dots, \partial^i_n(\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta))(x) = 0$,

где i пробегает значения от 0 до $n-1$, а для $x \in \partial B(n)$ имеем $\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x) = \eta(x) - \Pi^*_{R_o}(\eta)(x), \dots,$

$$\partial^{n-1}_n(\Pi^*_{R_o,\partial B(n)}(\eta))(x) = \partial^{n-1}_n(\eta)(x) - \partial^{n-1}_n(\Pi^*_{R_o}(\eta))(x).$$

Предположим далее, что оператор A таков, что существуют потенциалы $\{b_j^{R_o}(y,x)\}_{j=0,\dots,n-1}$ и $\{b_j^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)\}_{j=0,\dots,n-1}$ такие, что $\Pi^*_{R_o}(\eta)(x)$ и $\Pi^*_{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x)$ задаются формулами:

$$\Pi^*_{R_o}(\eta)(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{R_o} d\sigma(y)\, b_j^{R_o}(y,x)(\partial^j_n\eta)(y),$$

$$\Pi^*_{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{R_o\cup\overline{\partial B(n)}} d\sigma(y)\, b_j^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)(\partial^j_n\eta)(y).$$

Из предыдущих замечаний получаем представление на $\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta)$:

$$\Pi^*_{R_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta)(x) =$$

$$= \int_{\partial B(n)} \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)(\partial^i_n(\eta)(y) - \Pi^*_{R_o}(\eta)(y))\,d\sigma(y) =$$

$$= \int_{\partial B(n)} \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)(\partial^i_n(\eta)(y))\,d\sigma(y) -$$

$$- \int_{\partial B(n)} \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)\,\partial^i_n(\Pi^*_{R_o}(\eta))(y)\,d\sigma(y),$$

верное для $x \notin R_o \cup \partial B(n)$ и для μ^o_V почти всех $\eta \in S'(R^d)$. В предположении верности этих формул получаем следующую оценку:

$$\mu_\infty((\Pi^*_{\Sigma_o,\overline{\partial B(n)}}(\eta))^2(y)) \le 2c\int_{\partial B(n)} d\sigma(y)\int_{\partial B(n)} d\sigma(y')\sum_{i,i'=0}^{n-1}\times$$

$$\times\, b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)\, b_{i'}^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y',x)\,\mu_\infty(\partial^i_n\eta(y)\,\partial^{i'}_n\eta(y')) +$$

$$+ 2c\int_{\partial B(n)} d\sigma(y)\int_{\partial B(n)} d\sigma(y')\sum_{i,i'=0}^{n-1} b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)\, b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y',x)\,\times$$

$$\times\,\mu_o(\partial^i_n\eta(y)\partial^{i'}_n\eta(y')) < 2c\int_{\partial B(n)} d\sigma(y)\int_{\partial B(n)} d\sigma(y')\sum_{i,i'=0}^{n-1}\times$$

$$\times\, b_i^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y,x)\, b_{i'}^{R_o\cup\overline{\partial B(n)}}(y',x)\,\partial^i_n(y)\partial^{i'}_n(y')V(y,y') +$$

$$+\; 2c\int_{\partial B(n)} d\sigma(y)\int_{\partial B(n)} d\sigma(y')\sum_{i,i'=0}^{n-1}\times$$

$$\times\, b_i^{R_0 \cup \overline{\partial B(n)}}(y,x)\, b_{i'}^{R_0 \cup \overline{\partial B(n)}}(y',x)\, (\partial_n^{i}(y)\partial_n^{i'}(y'))\, K_{R_0}(y,y') .$$

Из последней оценки вытекает, что проверка условий определения 4.1 требует преодоления серьезных трудностей в теории общих гипероэллиптических граничных задач,которые в настоящее время не поддаются решению в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nelson E. Journ.Funct.Anal., 1973, 12, p.97; Journ.Funct. Anal., 1973, 12, p.211.
2. Симон Б. русск.перевод: Модель $\mathcal{P}(\phi)_2$ эвклидовой /квантовой/ теории поля, "Мир", М., 1976.
3. Глимм Д., Джаффе А. русский перевод: Математические методы квантовой теории, "Мир", М., 1984.
4. Bataban T. Physica, 1984, 124A, 79-90.
5. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Comm.Math.Phys., 1979, 68, p.68.
6. Gielerak R. Journ.Math.Phys., 1983, 24(2), p.347.
7. Gielerak R. In the book.: "Critical Phenomena. Theoretical Aspects", Progress in physics, A.Jaffe, D.Ruelle. Eds. Birkauser, 1985.
8. Zegarlinski B. Comm.Math.Phys., 1984, 96, p.195.
9. Bellisard J., Hoegh-Krohn R. Comm.Math.Phys., 1982, 84, p.297 и ссылки там же.
10. Goldstein S. Comm.Math.Phys., 1980, 74, p.223.
11. Mc.Bryan O.A. Comm.Math.Phys., 1978, 61, p.275.
12. English H. Rept.Math.Phys., 1980, 18, p.378.
13. Frohlich J., Park Y.M. Comm.Math.Phys., 1978, 59, p.235.
14. Скрипник В.Ю. Препринт ИТФ-75, 104 Е, 1975, Киев.
15. Gielerak R., Zegarlinski B. Fortschr.d.Physik, 1984, 31,p.1.
16. Сухов В. Труды Моск.мат.Общ., 1971, т.24.
17. Скрипник В.Ю. ДАН СССР, 1975, 222, с.797.
18. Добрушин Р.Л., Минлос Р. $\mathcal{P}(\phi)_2$ в книге: Проблемы механики и математической физики, "Мир", М., 1976.
19. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. "Наука", М., 1981.
20. Молчан Г.Я. ДАН СССР, 1971, 197, с.784; ДАН СССР, 1974, 215, с.1276.
21. Mc.Kean H.(Jr.), Prob.Theory and Its Applic., 1963, 8, p.357.
22. Pitt L. Archive for Rat.Mech.Anal., 1971, 43, p.43.
23. Albeverio S., Hoegh-Korhn R. Stochastic Analysis and Applications. Eds. M.Pinsky, Dekker, New York, 1985.
24. Benfatto G., Gallavotti G., Nicollo F. Journ.Funct.Anal., 1980, 36. p.343.
25. Ито К., Маккин Г. русский перевод: Диффузионные процессы и их траектории, "Мир", М., 1968.

26. Петрина Д.Я., Скрипник В.И. ТМФ, 1971, 8/3/, с.369.
27. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Comm.Math.Phys., 1973, 30, p.171.
28. Рюэль Д. русский перевод: Статистическая механика. Строгие результаты, "Мир", М., 1971.
29. Гелерак Р. ОИЯИ, Р17-85-770, Р17-85-771, Дубна, 1985.
30. Загребнов В.А. ТМФ, 1982, 51, с.389.
31. Рид М., Саймон Б. русский перевод: Методы математической физики, "Наука", М., 1977, т.1.
32. Ruelle D. Comm.Math.Phys., 1970, 18, p.127.
33. Kunsch H. J.Fac.Sci. Univ.of Tokyo IA, 1979, 26, p.33.
34. Kotani S. J.Math.Soc., Jap., 1976, 28, p.86.
35. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Rept.Math.Phys., 1984,
36. Dynkin E.B. Buill.Amer.Math.Soc., 1980, 3, p.975.
37. Rockner M. Math.Annal., 1983, 264, p.
38. Rockner M. Bielefeld Project No.2, preprint No.58, 1984, Universitat Bielefeld.
39. См. ссылку 23.
40. Holley R., Strook D. Research Inst.Math.Kyoto University, 1978, 14, p.741.
41. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Ann.Inst.d.Henri Poincare,1979.
42. Гелерак Р. ОИЯИ, Р17-87-12, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1987 года.

Гелерак Р. P17-87-11
Тригонометрические возмущения гауссовых обобщенных полей. Случай слабой связи.

Исследуются функциональные уравнения Д-Л-Р, соответствующие тригонометрическим возмущениям гауссовских, марковских мер в случае слабой связи. Доказывается, что при выполнении некоторых предположений технического характера глобальное марковское свойство остается ненарушенным.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Gielerak R. P17-87-11
Trigonometric Perturbations of Generalized Gaussian Fields. The Case of Weak Coupling

Functional DLR's equations which correspond to the trigonometric perturbations of the Gaussian, Markovian measures are considered in the case of weak coupling. It is proved that for some technical assumptions the global Markovian property remains unchanged.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987