объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-86-94

В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов*, Ю.В.Катышев

ВЕКТОРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ И НИЗКОЧАСТОТНОЙ ВОЛН

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

* ИФВЭ АН КазССР, Алма-Ата

1986

Введение

Настоящая работа посвящена изучению векторного обобщения следующей системы уравнений:

$$i\psi_t+\psi_{xx}-n\psi=0\ , \quad n_{tt}-n_{xx}-\alpha(n^2)_{xx}-\beta n_{xxxx}=|\psi|^2_{xx}\ , \qquad (I)$$

где $\psi(x,t), n(x,t)$ – комплексная и действительная функции соответственно, α, β – параметры уравнения.

Впервые система уравнений (I) появилась в работе одного из авторов (В.Г.М.)[I] и была посвящена изучению взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме в околозвуковой области. Она является обобщением системы уравнений, полученной Захаровым[2]:

$$i\psi_t+\psi_{xx}-n\psi=0, \quad n_{tt}-n_{xx}=|\psi|^2_{xx}\ . \qquad (2)$$

(I) учитывает нелинейность низкочастотной волны.

В работах[I] было получено семейство односолитонных решений системы (I) вида

$$\psi=6b^2\sqrt{\alpha+\beta}\ \mathrm{sech}\, b\xi\, \mathrm{th}\, b\xi\, e^{i\theta}\ , \quad n=-6b^2\mathrm{sech}^2 b\xi\ , \qquad (3)$$

$$\theta=\frac{v}{2}\xi+\left(\frac{v^2}{4}+b^2\right)t+\theta_0\ , \quad 2b^2=\frac{1}{\gamma^2\sqrt{\alpha+\beta}}\ , \gamma^{-2}=1-v^2, \ \xi=x-vt-\xi_0\ .$$

В серии более поздних работ изучались стационарные локализованные (солитонные) решения системы (I) при различных значениях параметров α, β и ее обобщений, возникающих в физике плазмы[3-6]. Так, в[6] было обнаружено, что решение (3) соответствует одной крайней точке в спектре нелинейной задачи на собственные значения:

$$\psi''-n\psi=\lambda\psi\ ,$$
$$n''+\gamma^{-1}n+3n^2+\psi^2=0\ .$$

Но, кроме того, существует еще целый класс решений с $\lambda\ll 1$, лежащими в последовательности разрешенных зон.

В последние годы интерес к системе (I) вырос в связи с исследованиями локализованных возбуждений в квазиодномерных магнети-

Объединенный институт
ядерных исследований

ках[7,8]. Здесь также возникло обобщение скалярного варианта (I) на векторный и было найдено решение.

Позднее система (I) обсуждалась в работе Давыдова и сотрудников[9] в применении к молекулярным кристаллам. Недавно Кричевером была установлена интегрируемость скалярного варианта (I), что указывает также на формальную интегрируемость векторного варианта. Заметим, что система уравнений Захарова (2) неинтегрируема[10].

Ниже дан вывод векторного обобщения системы (I) из многокомпонентной xxz -модели Гейзенберга. Обсуждается гамильтонова структура. Получены некоторые точные односолитонные (регулярные и сингулярные) решения, в том числе бризерные. На некоторых полученных решениях вычислен спектр энергии.

I. U(p,q) – система уравнений и ее гамильтонова структура

Рассмотрим многокомпонентную xxz -модель Гейзенберга с учетом колебаний решетки[7]:

$$\hat H = \hat H_s + \hat H_p \, , \qquad (I.1)$$

где

$$\hat H_s = -\frac12\left[\frac12\sum_{i,j,\alpha,\beta} J^{\alpha\beta}_{ij}(S_i^{+\alpha}S_j^{-\beta}+S_i^{-\alpha}S_j^{+\beta})+\sum_{i,j,\alpha,\beta,\gamma,\delta} R^{\alpha\beta}_{ij} S_i^{z\alpha\beta}S_j^{z\gamma\delta}\right] \qquad (I.2)$$

описывает взаимодействия спинов разных сортов, $H_p=T+U$ соответствует колебаниям решетки,

$$T=\frac{m}{3}\sum_j \dot x_j^2 \, , \qquad U=\sum_j\left[\frac{mv_0^2}{2}(x_{j+1}-x_j-a)^2+\frac{U'''}{3!}(x_{j+1}-x_j-a)^3\right] \, ,$$

a – постоянная решетки, v_0 – скорость звука в кристалле, m – масса фонона.

Если в обменных интегралах учитывать взаимодействия лишь ближайших соседей, пренебрегая взаимодействием между "цветовыми" и "пространственными" степенями свободы, то имеем

$$J^{\alpha\beta}_{ij} = J_{ij+\sigma}K^{\alpha\beta} \, , \qquad R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{ij} = \bar J_{ij+\sigma}L_1^{\alpha\beta}L_2^{\gamma\delta} \, , \qquad (I.3)$$

где $J_{jj+\sigma}\equiv J(|x_{j+}-x_{j+\sigma}|)$ – обменные интегралы, $\sigma=\pm1$.

Гамильтониан можно записать через бозонные операторы с помощью обобщенного представления Холстейна-Примакова:

$$S_j^{+\alpha} = \sqrt{2s-a_j^{+\alpha}a_j^{\alpha}}\,a_j^{\alpha} \, , \qquad S_j^{\alpha}=a_j^{+\alpha}\sqrt{2s-a_j^{+\alpha}a_j^{\alpha}} \, , \qquad (I.4)$$

$$S_1^{z\alpha\beta} = S\delta^{\alpha\beta} - a_j^{+\alpha}a_j^{\beta} \, ,$$

$$[a_i^{\alpha}, a_j^{+\beta}] = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \, , \qquad [a_i^{\alpha}, a_j^{\beta}] = [a_i^{+\alpha}, a_j^{+\beta}] = 0 \, .$$

В низкотемпературном квазиклассическом пределе ($a_j^{+\alpha}a_j^{\alpha}=n_j^{\alpha} \ll 2s$), оставляя в разложении $S_j^{\pm\alpha}$ только первый член и подставляя его в (I.1), имеем

$$\hat H=H_0+H_p-\frac{S}{2}\sum_{j\sigma}\left\{J_{jj+\sigma}\sum_{\alpha\beta}\left[K^{\alpha\beta}(a_j^{\alpha}a_{j+\sigma}^{+\beta}+a_j^{+\alpha}a_{j+\sigma}^{\beta})\right]+\bar J_{jj+\sigma}\sum_{\alpha\beta}(\ell_2L_1^{\beta}a_j^{+\alpha}a_j^{\beta}+\ell_2L_2^{\beta}a_{j+}^{+\alpha}a_{j+}^{\beta})\right\} \, , \qquad (I.5)$$

где $H_0=-\frac{S^2}{2}\sum_{ij\alpha\beta} R_{ij}^{\alpha\alpha\beta\beta}$, $\ell_i = \mathrm{Tr}L_i$. Для того чтобы выделить спин-фононное взаимодействие, в (I.5) мы пренебрегаем членом четвертого порядка по бозе-операторам. Чтобы перейти к классическому гамильтониану, усредним (I.5) по состоянию

$$|\Psi\rangle=\prod_j|\Psi_j\rangle \, , \qquad (I.6)$$

где $|\Psi_j\rangle$ – гейзенберг-вейлевское когерентное состояние[11], удовлетворяющее по определению следующим соотношениям:

$$a_j|\Psi_j\rangle=\Psi_j|\Psi_j\rangle \, , \qquad (I.7)$$

$$\langle\Psi_j|\Psi_j\rangle = 1 \, , \quad \langle\Psi_i|\langle\Psi_j|\, a_i^{+m}a_j^{n}|\Psi_j\rangle|\Psi_i\rangle = \Psi_i^{*m}\Psi_j^{n} \, .$$

Имеем

$$H=\langle\Psi|\hat H|\Psi\rangle=H_0+H_p-\frac{S}{2}\sum_{j,\sigma,\alpha\beta}J_{jj+\sigma}K^{\alpha\beta}(\Psi_j^{\alpha}\Psi_{j+\sigma}^{*\beta}+\Psi_j^{+\alpha}\Psi_{j+\sigma}^{\beta}) + \bar J_{jj+\sigma}(\ell_2L_1^{\alpha\beta}\Psi_j^{+\alpha}\Psi_j^{\beta}+\ell_1L_2^{\alpha\beta}\Psi_{j+\sigma}^{+\alpha}\Psi_{j+\sigma}^{\beta}) \, . \qquad (I.8)$$

В длинноволновом приближении с помощью техники, развитой в[12], получаем следующую систему уравнений:

$$i\Psi_t^{\alpha}=-b\sum_{\beta}K_{\{\alpha,\beta\}}\Psi^{\beta}_{\xi\xi}-s\sum_{\alpha,\beta}T_{\alpha\beta}\Psi^{\beta}+sa^2\sum_{\beta}\bar T^{\alpha\beta}\Psi^{\beta}x_{\xi} \, , \qquad (I.9)$$

$$x_{tt}=Cx_{\xi\xi}+D(x_{\xi}^2)_{\xi}+Ex_{\xi\xi\xi\xi}+sa^2\sum_{\alpha\beta}\bar T_{\alpha\beta}(\Psi^{*\alpha}\Psi^{\beta})_{\xi} \, ,$$

где

$$b=J_0s/2 \, , \qquad \bar T_{\alpha\beta}=J_0K_{\{\alpha,\beta\}}-\bar J_0(\ell_1L_{2\alpha\beta}+\ell_2L_{1\alpha\beta}) \, ,$$

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = \bar{J}_1 K_{\{\alpha,\beta\}} - \bar{J}_1(\ell_1 L_{2\alpha\beta} + \ell_2 L_{1\alpha\beta}) \quad , \quad J_{jj+\sigma} \approx J_o - J_1 \,|\,(X_j - X_{j+\sigma})| \quad ,$$

$$C = a^2(mv_o^2 - U''' a) \quad , \quad D = \frac{a^3}{2} U''' \quad , \quad E = mv_o^2\, a^4/12 \quad .$$

Положим

$$T_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}' \quad , \quad \bar{T}_{\alpha\beta} = B\,\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta} \, , \quad K_{\{\alpha,\beta\}} = K\,\gamma_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta} \, ,$$

$$\gamma = (\gamma_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\dots,1}_{p},\underbrace{-1,-1,\dots-1}_{q}) \quad , \quad p+q=N.$$

Тогда из (I.9) получаем $(n = x_\xi)$

$$i\psi_t^{(\alpha)} = -Kb\psi_{\xi\xi}^{(\alpha)} - sA\psi^{(\alpha)} + sa^2 Bn\psi^{(\alpha)} \, , \tag{I.10}$$

$$n_{tt} = Cn_{\xi\xi} + D(n^2)_{\xi\xi} + En_{\xi\xi\xi\xi} + sa^2 B(\bar{\Psi}\Psi)_{\xi\xi} \quad ,$$

где $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)^t$, $\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma$, $\Psi^+ = \Psi^{*t}$.

С помощью преобразований

$$t \to \frac{\sqrt{kb}}{C}\, t \quad , \quad \xi \to \sqrt{\frac{kb\sqrt{kb}}{C}} \quad , \quad n \to \frac{C}{a^2 sB\sqrt{kb}}\, n \quad ,$$

$$\Psi \to \frac{C}{sa^2 B}\, e^{i\varkappa t} \quad , \quad \varkappa = sAC/a^2 SB\sqrt{kb}$$

приходим к системе, являющейся $U(p,q)$ – обобщением системы уравнений (I) ($\xi \to X$):

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - n\Psi = 0 \quad , \tag{I.11}$$

$$n_{tt} = n_{xx} + \alpha(n^2)_{xx} + \beta n_{xxxx} + (\bar{\Psi}\Psi)_{xx} \quad ,$$

где

$$\alpha = D/a^2 sBkb \quad , \quad \beta = E/(kb)^2 \quad .$$

Система (I.II) гамильтонова. Чтобы показать это, (I.II) перепишем в виде

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - n\Psi = 0 \quad , \tag{I.12}$$

$$m_t = n + \alpha n^2 + \beta n_{xx} + \bar{\Psi}\Psi \quad ,$$

$$n_t = m_{xx} \quad ,$$

введя вспомогательное поле $m(x,t)$. Скобку Пуассона определяем как

$$\{A,B\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\delta A}{\delta n}\frac{\delta B}{\delta m} - \frac{\delta A}{\delta m}\frac{\delta B}{\delta n} + i\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\delta A}{\delta\Psi(k)}\frac{\delta B}{\delta\Psi^*(k)} - \frac{\delta A}{\delta\Psi^*(k)}\frac{\delta B}{\delta\Psi(k)}\right]\right\} . \tag{I.13}$$

Коммутационные соотношения для канонических сопряженных $2(N+1)$-переменных $(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots, \Psi^{(N)}, \Psi^{*(1)}, \dots, \Psi^{*(N)}, m, n)$ имеют вид

$$\left\{\Psi^{(\alpha)}(x), \Psi^{(\beta)}(y)\right\} = i\delta_{\alpha\beta}\,\delta(x-y) \quad , \quad \left\{m(x), n(y)\right\} = -\,\delta(x-y), \tag{I.14}$$

$$0 = \left\{m(x), m(y)\right\} = \left\{n(x), n(y)\right\} = \left\{\Psi^{(\alpha)}(x), \Psi^{(\beta)}(y)\right\} = \left\{\Psi^{(\alpha)}(x), m(y)\right\} = \left\{\Psi^{(\alpha)}(x) n(y)\right\}.$$

В этих переменных система (I.II) примет гамильтонову форму:

$$i\Psi_t^{(k)} = i\left\{H, \Psi^{(k)}\right\} = \delta H/\delta\Psi^{*(k)} \quad , \quad m_t = \left\{H, m\right\} = \delta H/\delta n \, , \tag{I.15}$$

$$i\Psi^{*(k)} = i\left\{H, \Psi^{*(k)}\right\} = -\delta H/\delta\Psi^{(k)} \quad , \quad n_t = \left\{H, n\right\} = -\delta H/\delta m \quad ,$$

где гамильтониан H имеет вид

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(\bar{\Psi}_x \Psi_x) + n(\bar{\Psi}\Psi) + \frac{1}{2}(n^2 + m_x^2 + \beta n_x^2) + \frac{\alpha}{3}n^3 \right] . \tag{I.16}$$

Таким образом, $U(p,q)$ – система уравнений (I.II) является гамильтоновой. Функцией Гамильтона является функционал (I.16), фазовое пространство состоит из функций $(\Psi^{(1)}(x,t), \dots, \Psi^{(N)}(x,t), \Psi^{*(1)}(x,t), \dots, \Psi^{*(N)}(x,t), m(x,t), n(x,t))$.

Система (I.II) может быть написана также в лагранжевом виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\Psi_t^{(k)}} = \frac{\partial L}{\partial\Psi^{(k)}} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{-\partial L}{\partial\Psi^{*(k)}} = \frac{\partial L}{\partial\Psi^{*(k)}} \quad , \tag{I.17}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial m_t} = \frac{\partial L}{\partial m} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial n_t} = \frac{\partial L}{\partial n} \quad ,$$

где функция Лагранжа L есть

$$L = -\frac{i}{2}(\bar{\Psi}\Psi_t - \Psi_t\Psi) - \frac{1}{2}(mn_t - m_t n) - H \quad . \tag{I.18}$$

2. Односолитонные решения: регулярный случай

В этом разделе мы опишем односолитонные регулярные решения системы (I.II) при $N = p+q = 1,2,3,4$, удовлетворяющие нулевым граничным условиям:

$$\Psi^{(j)}(x,t) \to 0, \quad n(x,t) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty \, , \tag{2.1}$$

$$j = 1,2,\dots,N.$$

Будем искать решения системы (I.II) следующим образом. Известно/13/, что в яме вида

$$U=a_N \operatorname{sech}^2 bx \qquad (2.2)$$

линейное уравнение Шредингера (одномерное)

$$\Psi_{xx} - U\Psi = \lambda\Psi \qquad (2.3)$$

имеет конечное число уровней в зависимости от соотношения глубины и ширины ямы a_N и b. Так, в "мелкой" яме $a_N \leq 2b^2$ существует лишь один уровень энергии $\lambda_1=-b^2$, в более глубокой яме $2b^2 \leq a_N \leq 6b^2$ существуют два уровня энергии $\lambda_1=-b^2$, $\lambda_2=-4b^2$ и т.д. В общем случае количество уровней определяется из соотношения

$$\lambda_j=-b^2(N-j+1)^2, \quad j=1,2,\ldots, \qquad (2.4)$$

причем

$$a_N = -N(N+1)b^2=-(p+q)(p+q+1)b^2. \qquad (2.5)$$

Первое уравнение системы (I.II) для стационарных решений имеет вид (2.3), роль потенциала в нем играет низкочастотное поле n. Последнее подчиняется неоднородному уравнению Буссинеска, поэтому будем искать его решение в виде модификации решения однородного уравнения, т.е. полагая, что n соответствует (2.2).

Эти рассуждения подсказывают вид решений для различных значений N, т.е. для разных моделей взаимодействия волн (число взаимодействующих волн равно $N+1$):

$$\Psi^{(j)}(x,t)=C_j e^{i\theta_j}\Psi^{(j)}(\xi), \qquad (2.6)$$

где $\xi=x-vt-x_0$, θ_j зависит от величины порядка $N=p+q$ группы $SU(p,q)$ и скорости движения солитона

$$\theta_j = \frac{v}{2}x - w_j t, \qquad (2.7)$$

$$w_j = \frac{v^2}{4} - (N-j+1)^2 b^2. \qquad (2.8)$$

Рассмотрим четыре варианта:

I. $N=1$: $G_1=SU(1)$ (двухволновое взаимодействие)

В этом случае существуют три односолитонных решения, удовлетворяющие граничным условиям (2.I):

$$\text{I.}\quad \Psi=Ce^{i\theta_1}\operatorname{sech} b\xi, \quad n=-2b^2\operatorname{sech}^2 b\xi, \qquad (2.9)$$

где $|C|^2 = 2b^2(1-v^2+4\beta b^2)$, $\alpha=-3\beta$, $\beta>(v^2-1)/4b^2$.

2. Этот случай в действительности соответствует редукции трехволнового взаимодействия ($N=2$) (глубокая яма):

$$n=-6b^2\operatorname{sech}^2 b\xi,$$

$$\text{а)}\quad \Psi=Ce^{i\theta'_1}\operatorname{sech}^2 b\xi, \qquad (2.10)$$

где $|C|^2 = -36b^2(\alpha+\beta)$, $\beta=(v^2-1)/4b^2$, $\alpha<-\beta$, $\theta'_1=\theta_1(N=2)$;

$$\text{б)}\quad \Psi=Ce^{i\theta'_2}\operatorname{th} b\xi \operatorname{sech} b\xi, \qquad (2.11)$$

где $|C|^2=36b^4(\alpha+\beta)$, $(1-v^2)/2b^2=3\alpha-\beta$, $\alpha>-\beta$, $\theta'_2=\theta_2(N=2)$.

Отметим, что решения вида (2.10) и (2.11) обсуждались в работе/7/.

II. $N=2$: $G_2=SU(2)$ и $SU(1.1)$ (трехволновое взаимодействие)

Односолитонное решение имеет вид

$$\Psi^{(1)} = C_1 e^{i\theta_1}\operatorname{sech}^2 b\xi,$$
$$\Psi^{(2)} = C_2 e^{i\theta_2}\operatorname{th} b\xi \operatorname{sech} b\xi, \qquad (2.12)$$
$$n=-6b^2\operatorname{sech}^2 b\xi,$$

где $|C_1|^2 = 6b^2(1-v^2-2\beta b^2-6\alpha b^2)$,

$$|C_2|^2 = \varepsilon_1 6b^2(1-v^2+4\beta b^2), \quad \varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{для } SU(2), \\ -1, & \text{для } SU(1.1). \end{cases} \qquad (2.13)$$

III. $N=3$: $G_3=SU(3)$, $SU(2.1)$ и $SU(1.2)$ (четырехволновое взаимодействие)

Регулярные односолитонные решения, соответствующие этим трем группам, напишем в единой форме с помощью чисел ε_k, $k=1,2$, заданных таблицей:

$SU(p,q)$ $p+q=3$	$SU(3)$	$SU(2.1)$	$SU(1.2)$
ε_1	1	1	-1
ε_2	1	-1	-1

(2.14)

$$\psi^{(1)}=C_1 e^{i\theta_1}\mathrm{sech}^3 b\xi \ , \quad \psi^{(2)}=C_2 e^{i\theta_2}\mathrm{th}\, b\xi\, \mathrm{sech}^2 b\xi \ ,$$

$$\psi^{(3)}=C_3 e^{i\theta_3}(4-5\,\mathrm{sech}^2 b\xi)\,\mathrm{sech}\, b\xi \ , \quad n=-12b^2\mathrm{sech}^2 b\xi \ , \quad \text{где} \tag{2.15}$$

$$|C_1|^2 = 9b^2\left[\frac{5}{4}(1-v^2)-16\alpha b^2-3\beta b^2\right] \ , \quad |C|^2=6\,\varepsilon_1 b^2\left[5(1-v^2)-24\alpha\beta^2+8\beta b^2\right] \ ,$$

$$|C_3|^2 = \frac{3}{4}\varepsilon_2 b^2(1-v^2+4\beta b^2) \ .$$

IУ. <u>N=4 : G_4=SU(4) , SU(3.1) , SU(2.2) и SU(1.3)</u>

Как и выше, введем числа ε_k , принимающие значения согласно таблице:

SU(p,q) p+q=4	SU(4)	SU(3.1)	SU(2.2)	SU(1.3)	SU(0.4)
ε_1	1	1	1	-1	-1
ε_2	1	1	-1	-1	-1
ε_3	1	-1	-1	-1	-1

(2.I6)

Регулярные односолитонные решения системы (I.II), удовлетворяющие граничным условиям (2.I) и инвариантные относительно группы G_4 , имеют вид

$$\psi^{(1)}=C_1 e^{i\theta_1}\mathrm{sech}^4 b\xi \ , \quad \psi^{(2)}=C_2 e^{i\theta_2}\mathrm{th}\, b\xi\, \mathrm{sech}^3 b\xi \ ,$$

$$\psi^{(3)}=C_3 e^{i\theta_3}(7\,\mathrm{sech}^2 b\xi-6)\,\mathrm{sech}^2 b\xi \ , \tag{2.17}$$

$$\psi^{(4)}=C_4 e^{i\theta_4}(7\,\mathrm{sech}^2 b\xi-4)\,\mathrm{sh}\, b\xi\, \mathrm{sech}^2 b\xi \ ,$$

где

$$|C_1|^2=\varepsilon_1|C_2|^2-25\varepsilon_2|C_3|^2+49\varepsilon_3|C_4|^2 \ , \quad |C_2|^2=\frac{5}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2|C_3|^2-105\,\varepsilon_1\varepsilon_2|C_4|^2 \ ,$$

$$|C_3|^2 = 10\varepsilon_2 b^2\left[9(1-v^2)+24\beta b^2-40\alpha b^2\right] \ ,$$

$$|C_4|^2 = \frac{5}{4}\varepsilon_3 b^2(1-v^2+4\beta b^2) \ .$$

3. <u>Односолитонные решения: сингулярный случай</u>

Известно, что локальные (точечные) неоднородности или дефекты в конденсированных средах описываются сингулярными решениями уравнений /I4/. Поэтому представляют интерес также сингулярные решения системы (I.II), удовлетворяющие граничным условиям (2.I). "Аналогично" (2.6) решение ищем в виде

$$\psi^{(j)}(x,t)=C_j e^{i\theta_j}\,\psi^{(j)}(\xi) \ , \quad n(x,t)=a_N\,\mathrm{cosech}^2 b\xi \ , \tag{3.1}$$

где $a_N=N(N+1)b^2$, а θ_j имеет такой же вид, как в (2.7). Приведем список сингулярных решений для различных моделей G_N (I.II).

<u>Группа G_1</u>. В этом случае односолитонные сингулярные решения имеют следующий вид:

а) $$\psi=Ce^{i\theta_1}\mathrm{cosech}\, b\xi \ , \quad n=2b^2\mathrm{cosec}\, 2b\xi \ , \tag{3.2}$$

где $|C|^2 =2b^2(v^2-1-4\beta b^2)$, $\alpha=-3\beta$, $\beta < (v^2-1)/4b^2$;

б) $$\psi=C_1 e^{i\theta_1}\mathrm{cosech}^2 b\xi \ , \quad n=6b^2\mathrm{cosech}^2 b\xi \ , \tag{3.3}$$

где $|C|^2=-36b^4(\alpha+\beta)$, $\beta=(v^2-1)/4b^2$;

в) $$\psi=Ce^{i\theta'_2}\mathrm{cth}\, b\xi\, \mathrm{cosech}\, b\xi \ , \quad n=6b^2\mathrm{cosech}^2 b\xi \ , \tag{3.4}$$

где $|C|^2=-36b^4(\alpha+\beta)$, $\beta=-3\alpha+\dfrac{1-v^2}{2b^2}$.

П. <u>Группа G_2</u>. Аналогично (2.I2) получаем

$$\psi^{(1)}=C_1 e^{i\theta_1}\mathrm{cosech}^2 b\xi \ ,$$

$$\psi^{(2)}=C_2 e^{i\theta_2}\mathrm{cth}\, b\xi \ , \ \mathrm{cosech}\, b\xi \ , \tag{3.5}$$

$$n = 6b^2\mathrm{cosech}^2 b\xi \ .$$

Здесь $|C_2|^2 =-6b^2\varepsilon_1(1-v^2+4\beta b^2)$, $|C_2|^2 =6b^2(1-v^2-2\beta b^2-6\alpha b^2)$, ε_1 задано (2.I3).

Ш. <u>Группа G_3</u>. Решение имеет вид

$$\psi^{(1)} = C_1 e^{i\theta_1}\mathrm{cosech}^3 b\xi \ , \quad \psi^{(2)}=C_2 e^{i\theta_2}\mathrm{cth}\, b\xi\, \mathrm{cosech}^2 b\xi \ ,$$

$$\psi^{(3)} =C_3 e^{i\theta_3}(4+5\,\mathrm{cosech}^2 b\xi)\,\mathrm{csech}\, b\xi \ , \quad n=12b^2\mathrm{cosech}^2 b\xi \ , \tag{3.6}$$

где $|C_1|^2 =-\varepsilon_1|C_2|^2-25\varepsilon_2|C_3|^2$, $|C_2|^2=40\varepsilon_1\varepsilon_2|C_3|^2-72b^4(2\alpha+\beta)$,
$|C_3|^2= \frac{3}{4}\varepsilon_2 b^2(v^2-1-4\beta b^2)$, а величины ε_1, ε_2 определяются из таблицы (2.I4).

IУ. <u>Группа G_4</u>. В этом случае сингулярное решение системы (I.II), удовлетворяющее нулевым граничным условиям, имеет вид

$$\psi^{(1)}=C_1 e^{i\theta_1}\mathrm{cosech}^4 b\xi \ , \quad \psi^{(2)}=C_2 e^{i\theta_2}\mathrm{cth}\, b\xi\, \mathrm{cosech}^3 b\xi \ ,$$

$$\psi^{(3)}=C_3 e^{i\theta}(6+7\,\mathrm{cosech}^2 b\xi)\,\mathrm{cosech}^2 b\xi \ , \tag{3.7}$$

$$\psi^{(4)}=C_4 e^{i\theta_4}(4+7\,\mathrm{cosech}^2 b\xi)\,\mathrm{cth}\, b\xi\, \mathrm{cosech}\, b\xi \ ,$$

$$n= 20b^2\mathrm{cosech}^2 b\xi \ .$$

Здесь $|C_1|^2 = -\varepsilon_1|C_2|^2+49\varepsilon_2|C_3|^2-\varepsilon_3|C_4|^2$, $|C_2|^2=-82\varepsilon_1\varepsilon_2|C_3|^2-105\varepsilon_1\varepsilon_3|C_4|^2$,

$|C_3|^2=-2\varepsilon_2\varepsilon_3|C_4|^2-\frac{10}{9}b^4(3\beta+10\alpha)$,

$|C_4|^2=\frac{5}{4}\varepsilon_3\, b^2(v^2-1-4\beta b^2)$ ε_k задан (2.16).

4. Некоторые другие решения

Новый класс решений системы (I.II) можно получить, используя ее $U(p,q)$ - симметрию. Пусть $f(x,t)=(\psi,n)^t$ является решением системы (I.II). Тогда новое решение есть $f'=Rf$, если $R=\mathrm{diag}(R,1)$, $R\in U(p,q)$. При этом сохраняется билинейная форма $(\bar\Psi',\Psi')=(\bar\Psi\bar R R\Psi)=(\bar\Psi\Psi)$, $\bar R=\gamma R^+\gamma$.

Найдем на примере группы G_2 односолитонное решение системы (I.II) типа бризера. Пусть $A\in G_2$ и имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -\varepsilon_1\bar b_2 & \bar a_2 \end{pmatrix}, \qquad |a_2|^2+\varepsilon_1|b_2|^2=1 . \tag{4.I}$$

Тогда из (2.I2) с помощью изотопического вращения получим

$$\psi^{(1)}=C_1^{\delta}(a_2C_1e^{i\theta_1}\mathrm{sech}^2 b\xi+b_2C_2e^{i\theta_2}\mathrm{th}b\xi\,\mathrm{sech}b\xi) , \tag{4.2}$$

$$\psi^{(2)}=C_2^{\delta}(-\varepsilon_1\bar b_2C_1e^{i\theta_1}+\bar a C_2e^{i\theta_2}\mathrm{sh}b\xi)\,\mathrm{sech}^2 b\xi ,$$

$$n=-6^2\mathrm{sech}^2 b\xi , \qquad |C_1^{\delta}|^2=|C_2^{\delta}|^2=1 .$$

Аналогично можно найти бризерные решения, соответствующие группам G_N , $N=3,4$. Эти решения уже "инвариантны" по отношению к преобразованиям G_N , поскольку повторное преобразование лишь изменяет константы. Кроме полученных решений существует решение, выражающееся через $\wp$ -функции Вейерштрасса:

$$\psi(x,t)=\sqrt{2(v^2-1)\wp(\xi,\omega,\omega')}\; e^{\frac{iv}{2}(\xi-\xi_0)} ,$$

$$n(x,t)=2\wp(\xi,\omega,\omega') ,$$

где ω , ω' - полупериоды функции $\wp(\xi,\omega,\omega')$.

Используя свойства вырождения $\wp$ -функции, можно получить новые решения системы (I.II).

5. Обсуждение

Вычислим спектр энергии системы (I.II) на односолитонном решении (2.I2), т.е. при $N=2$. Имеем

$$E_{2M}=12b\left\{\frac{v^2}{4}(1-v^2)+b^2\left[5v^2-1-v^2\alpha+\frac{304}{5}b^2\alpha+\frac{12\beta b^2}{5}\right]\right\} . \tag{5.I}$$

Отсюда видно, что энергия не зависит от параметра $\varepsilon=\pm1$, т.е. она одинакова для групп $SU(2)$ и $SU(1.1)$ решений (2.I2) при нулевых граничных условиях. При $\alpha=\beta=0$ система (I.II) переходит в систему уравнений Захарова с $U(p,q)$ - группой. При этом энергия равна

$$E_{23}=12b\left\{\frac{v^2}{4}(1-v^2)+b^2(5v^2-1)\right\} . \tag{5.2}$$

В ультрарелятивистском пределе, т.е. при $v\to1$, из (5.I) и (5.2) соответственно имеем

$$E_{2M}=12b^3(4-\alpha+\frac{304}{5}\alpha b^2+\frac{12\beta b^2}{5}) , \tag{5.3}$$

$$E_{23}=48b^3. \tag{5.4}$$

Важным вопросом является классификация полученных решений по параметрам уравнения α , β и параметру решения v . Проделаем это для случая $SU(2)$- и $SU(1.1)$ - вариантов системы уравнений (I.II) и соответствующей системы уравнений Захарова (СУЗ) и НУШ на односолитонных решениях (2.I2). Результаты приведены в таблицах I и 2.

Таблица I

Области существования односолитонных решений (2.I2) системы (I.II) СУЗ и НУШ для группы $SU(2)$ в зависимости от параметров α , β и v

α	β		Решение системы (I.II)	Решение СУЗ и НУШ
$\alpha\geqslant0$	$\beta>0$	$v>1$	не существует	не существует
		$v<1$	существует	существует
$\alpha\geqslant0$	$\beta<0$	$v>1$	не существует	не существует
		$v<1$	существует	существует
$\alpha\leqslant0$	$\beta<0$	$v>1$	существует	не существует
		$v<1$	существует	существует
$\alpha\leqslant0$	$\beta>0$	$v>1$	существует	не существует
		$v<1$	существует	существует

Таблица 2

Области существования односолитонных решений (2.I2) системы (I.II) СУЗ и НУШ для группы $SU(I.I)$ в зависимости от параметров α, β и v

α	β	v	Решение (I.II)	Решение СУЗ и НУШ
$\alpha > 0$	$\beta > 0$	$v > 1$	не существует	не существует
		$v < 1$	не существует	не существует
$\alpha > 0$	$\beta < 0$	$v > 1$	существует	не существует
		$v < 1$	существует	не существует
$\alpha < 0$	$\beta < 0$	$v > 1$	существует	не существует
		$v < 1$	существует	не существует
$\alpha < 0$	$\beta > 0$	$v > 1$	существует	не существует
		$v < 1$	не существует	не существует

Наглядные графические изображения областей существования на плоскости (α, β) односолитонных решений $SU(2)$ и $SU(1.1)$ системы (I.II) приведены на рис.I,2 и 3. Начало координат соответствует СУЗ. На рис. I, 2 и 3 $\alpha_0 = (1-v^2)/6b^2$, $D\left(\frac{1-v^2}{4b^2}, -\frac{v^2-1}{4b^2}\right)$, $C(\alpha_0, 0)$.

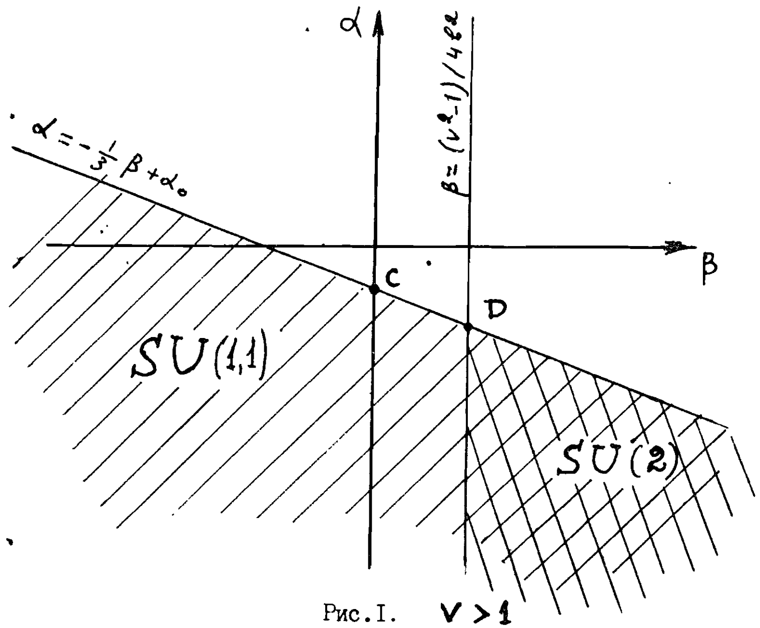

Рис.I. V > 1

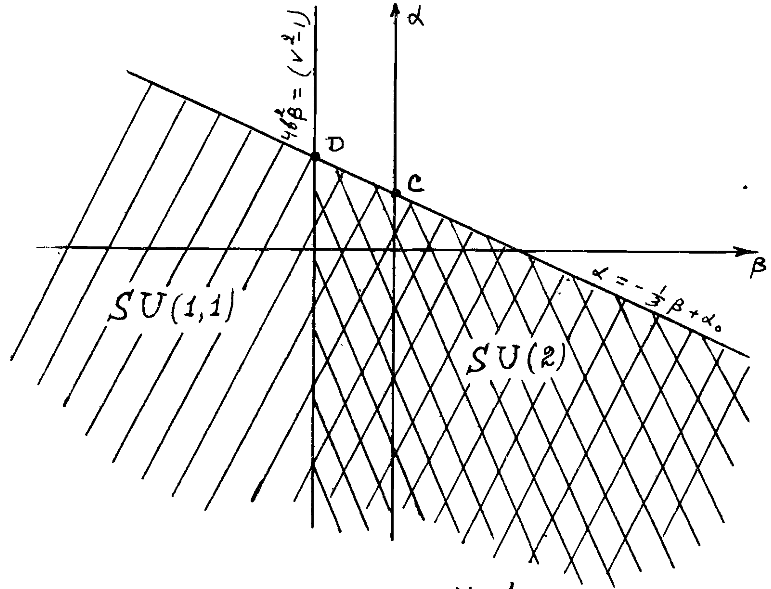

Рис.2. V < 1

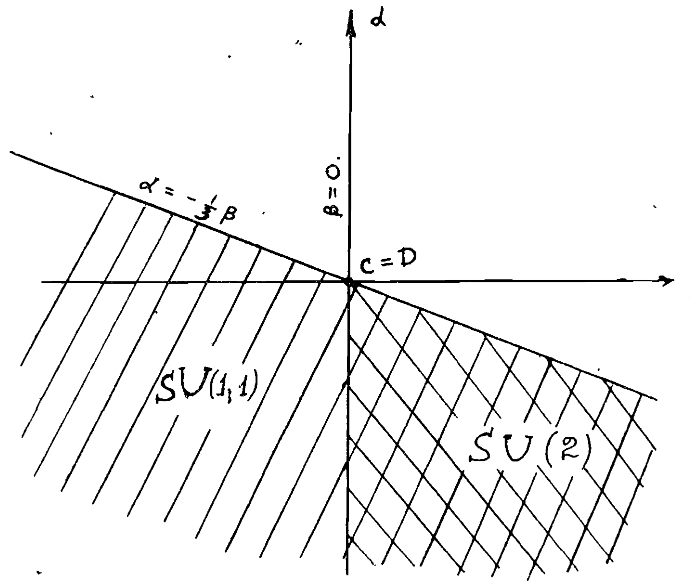

Рис.3. V = 1

Из явного вида односолитонного решения (2.I2) и из рис.I,2 и 3 ясно, что

$\psi^{(1)} \neq 0, \quad \psi^{(2)} \equiv 0$ на линии $\beta=(v^2-1)/4b^2$,

$\psi^{(1)} = 0, \quad \psi^{(2)} \neq 0$ на линии $\alpha=-\frac{1}{3}\beta+\alpha_0$,

$\psi^{(1)} \equiv 0, \quad \psi^{(2)} \equiv 0$ в точке D .

Отметим несколько весьма примечательных фактов, связанных с рассмотренной нами системой уравнений (I.II).

I . При некоторых значениях α и β эта система является формально интегрируемой /I5/, однако при изменении параметров она может потерять это свойство. Примером является начало координат на плоскости (α , β), т.е. α , $\beta \to 0$, где (I.II) переходит в СУЗ. В связи с этим встает вопрос об отыскании на плоскости (α , β) областей (или точек), где (I.II) интегрируема.

2 . Однонаправленный вариант системы (I.II) можно получить стандартным путем, полагая $\partial^2_t-\partial^2_x \approx -2(\partial_t+\partial_x)\partial_x$ и интегрируя второе уравнение (I.II):

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - n\Psi = 0 \ ,$$
$$(\partial_t+\partial_x+\frac{\beta}{2}\partial_x^3)n + \frac{\alpha}{2}(n^2)_x + \frac{1}{2}(|\Psi|^2)_x = 0. \qquad (5.5)$$

Эта система уравнений в применении к физике плазмы была получена и исследована Нишикавой и соавторами в /I6/. Бениловым и Бурцевым в /I7/ **было показано, что (5.5) неинтегрируема** (во всяком случае,на линии $\beta/2=-1$). В точке же $\alpha=\beta=0$ система (5.5) переходит в

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - n\Psi = 0 \ ,$$
$$n_t + n_x + \frac{1}{2}|\Psi|^2_x = 0 \ ,$$

т.е. систему уравнений, исследованную Яджимой и Ойкавой в /I8/, где была установлена ее интегрируемость. Возникает вопрос, аналогичный поставленному в первом пункте. Это означает, что симметричный и однонаправленный варианты U(1)-версии системы (I.II) противоположны по свойствам интегрируемости по крайней мере в уже рассмотренных областях и точках плоскости (α , β).

3 . Полученные для (I.II) результаты дают возможность судить также о некоторых решениях U(N) НУШ:

$$i\Psi^{(k)}_t + \Psi^{(k)}_{xx} + (\bar{\Psi}\Psi)\Psi^{(k)} = 0, \quad (k=1,2,\dots,N) \ , \qquad (5.6)$$

где ($\bar{\Psi}\Psi$) - U(N)-внутреннее произведение $\bar{\Psi}\Psi=\sum_{k=1}^{N}|\Psi^{(k)}|^2$. Действительно, не трудно проверить простым вычислением, что все

решения U(N) версии (I.II), полученные выше при $\alpha=\beta=0$, являются также решениями (5.6), если константы c_k удовлетворяют условию

$$\bar{\Psi}\Psi \sim \mathrm{sech}^2 b\xi \ . \qquad (5.7)$$

В качестве примера рассмотрим U(2) НУШ, исследованное Манаковым в /I9/ с помощью МОЗР. В частности, в /I9/ рассмотрено взаимодействие солитонов

$$\Psi^{(k)} = c_k e^{i\theta_k(x,t)}\mathrm{sech}\, b\xi \ , \qquad \sum_{k=1}^{2}|c_k|^2 = 2b^2 . \qquad (5.8)$$

Из нашего рассмотрения следует, что кроме этих (вырожденных по энергии) "легких" солитонов в мелкой яме в рамках (5.6) существуют также "тяжелые" солитоны в глубокой яме:

$$\Psi^{(1)} = c_1 e^{i\theta_1}\mathrm{sech}^2 b\xi \ ,$$
$$\Psi^{(2)} = c_2 e^{i\theta_2}\mathrm{th}\, b\xi\, \mathrm{sech}\, b\xi \ , \qquad (5.9)$$

где $\theta_1 = \frac{v}{2}x - (\frac{v^2}{4} - 4b^2)t$, $\theta_2 = \frac{v}{2}x - (\frac{v^2}{4} - b^2)t$,

$|c_1|^2 = |c_2|^2 = 6b^2$,

энергия которых равна

$$E = 12b\,(\frac{v^2}{4} - b^2) \ ,$$

а также их SU(2) - инвариантные аналоги вида

$$\Psi^{(k)} = c_k(a_k e^{i\theta_1} + b_k \mathrm{sh}\, b\xi\, e^{i\theta_2})\mathrm{sech}^2 b\xi \ ,$$

где $|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1$.

Таким образом, в рамках уже исследованной модели U(2) НУШ получен новый тип решений ("тяжелые" солитоны с нарушенным вырождением по энергии). Более того, если поля $\Psi^{(k)}$ интерпретировать как волновые функции частиц, то последние в глубокой яме ведут себя как фермионы. Аналогичная ситуация имеет место и в случае U(N) НУШ. Правило построения решения может быть сформулировано следующим образом: все уровни в яме солитона независимо от ее глубины **согласно условиям(5.7)** должны быть заняты. Это означает, что в самой глубокой яме (2.5) каждый уровень занят одной частицей (аналог ферми-статистики). Для солитонов с более мелкими, нежели (2.5), ямами ($k < N$) на некоторых уровнях может находиться по **несколько** частиц. Например, U(N) НУШ имеет следующее вырожденное односолитонное решение, являющееся обобщением (5.9):

$$\Psi^{(s)} = c_s e^{i\theta_1}\mathrm{sech}^2 b\xi \ , \ \Psi^{(\ell)} = c_\ell e^{i\theta_2}\mathrm{th}\, b\xi\,\mathrm{sech}\, b\xi \ , \qquad (5.10)$$

где $1 \leqslant s \leqslant N-1$, $1 < \ell \leqslant N$, $s+\ell=N$ $\sum_s |c_s|^2 = \sum_\ell |c_\ell|^2 = 6b^2$.

Для системы (I.II) эти требования не обязательны, т.е. существуют решения с незанятыми уровнями. Например, (I.II) имеет следующее решение ($U(3)$ - вариант):

$$\psi^{(1)}=C_1e^{i\theta_1}\operatorname{sech}^3 b\xi\,, \quad \psi^{(2)}=C_2e^{i\theta_1}\operatorname{sech}^3 b\xi\,, \tag{5.II}$$

$$\psi^{(2)}=C_3e^{i\theta_2}\operatorname{th}b\xi\operatorname{sech}^2 b\xi\,, \quad n=-12b^2\operatorname{sech}^2 b\xi\,,$$

где $|C_1|^2-\varepsilon_1|C_2|^2=\varepsilon_2|C_3|^2$, $\varepsilon_2|C_5|^2=-3b^4(\alpha+\beta)$,

$v^2-1=4\beta b^2$.

В этом случае уровень, соответствующий λ_3, не занят. Аналогично, решения с незанятыми уровнями существуют для других вариантов системы (I.II) при $N\geqslant 3$.

Как указывалось выше, при выводе системы (I.II) в гамильтониане (I.5) мы пренебрегли членом четвертого порядка по бозе-операторам. Учет последнего приводит вместо (I.II) к следующей системе уравнений:

$$i\Psi_t+\Psi_{xx}-n\Psi+\lambda(\bar{\Psi}\Psi)\Psi=0\,, \tag{5.I2}$$

$$n_{tt}-n_{xx}-\alpha(n^2)_{xx}-\beta n_{xxxx}-(\bar{\Psi}\Psi)_{xx}=0\,.$$

Система (5.I2), как и (I.II), может иметь солитоноподобные решения разных типов. В частности, при $N=1$ решение есть

$$\psi^{(1)}=C_1e^{i\theta_1}\operatorname{sech} b\xi\,, \quad n=a\operatorname{sech}^2 b\xi\,, \tag{5.I3}$$

где $\theta_1=\frac{v}{2}x-\left(\frac{v^2}{4}-b^2\right)$, $|C|^2=\frac{2b^2}{\alpha\lambda}(\alpha+3\beta)$,

$a=\frac{6\beta b^2}{\alpha}$, $v^2-1-4\beta b^2=(\alpha+3\beta)/3\beta\lambda$.

Энергия такого солитона равна

$$E_\lambda^{(1)}=\left(\frac{v^2}{2}+\frac{9}{8}b^2\right)\frac{4b}{\alpha\lambda}(\ +3\beta)+\frac{16\beta b^3}{\alpha\lambda}+\frac{48\beta^2b^3}{\alpha^2\lambda}+24(1+v^2)\frac{\beta^2b^3}{\alpha^2}-$$

$$-\frac{8}{15}\beta b-\frac{b^3}{2\alpha^2\lambda}(\alpha+3\beta)^2+\frac{38\beta^3b^5}{15\alpha^2}\,.$$

При $N=2$ имеем

$$\psi^{(1)}=C_1e^{i\theta_1}\operatorname{sech}^2 b\xi\,,$$

$$\psi^{(2)}=C_2e^{i\theta_2}\operatorname{th}b\xi\operatorname{sech}b\xi\,, \tag{5.I4}$$

$$n=a\operatorname{sech}^2 b\xi\,,$$

где $|C_1|^2=|C_2|^2=\frac{6\beta b^2}{\alpha}(v^2-1-4\beta b^2)$, $a=6\beta b^2/\alpha$,

$v^2-1=\frac{\alpha+\beta}{\lambda\beta}+4\beta b^2$, θ_1 и θ_2 - такие же, как и в (2.I2). Вычисляя энергию этого солитона, получим

$$E_\lambda^{(2)}=\frac{12\beta b}{\alpha}\left[\left(3b^2+\frac{v^2}{4}\right)\frac{\alpha+\beta}{\lambda\beta}+\frac{4\beta b^2}{\alpha}\left(v^2-\frac{24}{5}\beta b^2\right)\right].$$

В заключение отметим, что для систем уравнений (I.II), (5.6) и (5.I2) феноменология полученных выше солитонных (и солитоноподобных) решений, в частности, процессы их рождения из начальных пакетов, столкновений между собой и с "легкими" солитонами, остаются пока полем для исследований даже в интегрируемых вариантах, в частности НУШ.

Литература

I. Makhankov V.G. Phys. Lett., 1974, 50A, p.42;
Preprint JINR, E5-8389, Dubna, 1974;
Phys. Rep., 1978, 35, p.1.

2. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, с.1745.
3. Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. Физика плазмы, 1976, 2.
4. Schamel H., Yu M.Y., Shukla P. Phys. Fluids, 1977, 20, p.1286.
5. Laedke E., Spatschek K. Phys. Lett., 1979, 75A, p. 53.
6. Bogomolov Ya. L., Kolchugina I.A., Litvak A.G., Sergeev A.M. Phys. Lett., 1982, 91A, p.447.
7. Makhankov V.G., Kundu A., Pashaev O.K. Physica, 1984, 11O, p.375-380; Preprint JINR, E17-82-602, Dubna, 1982.
8. Makhankov V.G., Kundu A., Pashaev O.K. Physica Scripta, 1983, 28, p.229-234; Preprint JINR, E17-82-677, Dubna, 1982 .
9. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев, "Наукова думка", 1984.

I0. Abdulloev Kh., Bogolubsky I.L., Makhankov V.G. Phys. Lett., 1974, 48A, p.161; Nucl. Fusion, 1975, 15, p.21;
см. также Дегтярев Л.М. и др. ЖЭТФ, 1974, 67, с.533.

II. Переломов А.М. УФН, 1977, т.123, вып.I, с.23.
I2. Fedyanin V.K., Makhankov V.G., Yakushevich L. Phys. Lett., 1977, 61A, p.256.
I3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
I4. Расизаде О.Ш. ТМФ, 1981, т.48, № 2, т.49, № I, с.36.
I5. Кричевер И.М. Функц. анализ, 1986, т.20, в.2.
I6. Nishikawa K. et al. Phys. Rev. Lett., 1974, 33, p.148.
I7. Benilov E.S., Burtsev S.P. Phys. Lett., 1983, 98A, p.256.
I8. Yajima N., Oikawa M. Prog. Theor. Phys., 1976, 56, p.1719.
I9. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1974, 65, с.505.

Рукопись поступила в издательский отдел
I7 февраля 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Маханьков В.Г., Мырзакулов Р., Катышев Ю.В. Р17-86-94
Векторное обобщение системы уравнений взаимодействующих высокочастотных и низкочастотной волн

Изучается векторное обобщение следующей системы уравнений, впервые полученной одним из авторов (В.Г.М.):

$$i\phi_t + \phi_{xx} - n\phi = 0,$$
$$n_{tt} = n_{xx} + (\alpha n^2 + \beta n_{xx})_{xx} + |\phi|^2_{xx}. \qquad (*)$$

Дан вывод векторного обобщения системы (*) из многокомпонентной XXZ-модели Гейзенберга. Обсуждается гамильтонова структура. Получены некоторые точные односолитонные (регулярные и сингулярные) решения U(p,q) системы (*) и связанных с ней U(N) -нелинейного уравнения Шредингера и системы уравнений Захарова. Для случая U(2)- и U(1,1) -вариантов найдены области существования односолитонных решений на (α, β) -плоскости. В заключение получено обобщение U(p,q) -системы (*), учитывающее спин-спиновое взаимодействие, и для него приведены некоторые солитоноподобные решения. На некоторых полученных решениях вычислен спектр энергий.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Makhankov V.G., Katyshev Yu.V., Myrzakulov R. P17-86-94
A Vector Generalization of a System of Equations of Interacting High-Frequency and Low-Frequency Waves

A vector generalization of the system of equations

$$i\phi_t + \phi_{xx} - n\phi = 0,$$
$$n_{tt} = n_{xx} + (\alpha n^2 + \beta n_{xx})_{xx} + |\phi|^2_{xx} \qquad (*)$$

first obtained by one of the authors (V.G.M.) is studied. The derivation of the vector generalization of system (*) from the multicomponent XXZ Heisenberg model is presented. The Hamiltonian structure is discussed. Some exact single-soliton (regular and singular) solutions to the U(p,q) system (*) and associated U(N) nonlinear Schroedinger equation and Zakharov system of equations are obtained. For the case of U(2) and U(1,1) versions the existence regions of one-soliton solutions in the (α, β) plane are found. Finally a generalization to the U(p,q) system (*) allowing for the spin-spin interaction is obtained, and some its soliton-like solutions are presented. For certain solutions obtained the energy spectrum is calculated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986