86-90

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-86-90

Ю.В.Катышев, Р.Мырзакулов*

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

*ИФВЭ АН КазССР, Алма-Ата

1986

Известно, что некоторые нелинейные эволюционные уравнения (НЭУ), интегрируемые методом обратной задачи рассеяния (МОЗР), обладают нетривиальными сингулярными решениями /I,2,3/. Оказалось, например, что динамика полюсов рациональных решений НЭУ связана с гамильтоновыми системами частиц на прямой с парным потенциалом взаимодействия. Для получения сингулярных решений обычно вводят особенности определенного вида в начальные данные соответствующей задачи Коши. Развиваясь под действием динамики уравнения, эти особенности дают линии сингулярности на (x,t) – плоскости, которые можно интерпретировать как мировые линии точечных взаимодействующих частиц. Поэтому сингулярные решения НЭУ могут дать нетривиальные примеры динамики систем взаимодействующих частиц, в том числе релятивистских /4-6/. Таким образом получается одна из реализаций известной идеи введения частиц как стабильных сингулярностей решений классической теории поля. Заметим, что именно существенная нелинейность уравнения приводит к нетривиальности соответствующих динамик механических систем, поскольку, в отличие от линейных случаев, здесь особенности распространяются не по прямым, а по кривым линиям на (x,t)– плоскости.

Отметим, что включение в рассмотрение сингулярных начальных данных приводит к тому, что МОЗР в его стандартной формулировке неприменим. Обобщение МОЗР на случай системы Захарова-Шабата с сингулярными потенциалами было приведено в /7/. В работе /8/ была доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с отталкиванием

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - 2|\varphi|^2\varphi = 0 \qquad (I)$$

в классе функций с особенностями типа x^{-1}.

Ниже получены сингулярные решения НУШ (I), в которых предэкспоненциальные выражения являются рациональными, тригонометрическими и т.д. функциями от x и t *. Показано, что динамика полюсов N -полюсного рационального решения НУШ (I) совпадает с движением частиц системы Мозера /9/. При N = I, 2 приведены явные формулы рацио-

* – Такие решения, для простоты, мы называем соответственно сингулярными рациональными, тригонометрическими и т.д. решениями НУШ.

нальных решений. В заключение обсуждается связь полученных сингулярных решений с так называемыми конечнозонными решениями НУШ (I), выраженными через θ – функцию Римана, определенную на гиперэллиптической римановой поверхности.

I. Найдем рациональное решение НУШ (I), удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi(x,t) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e^{ikx-ik^2t} . \qquad (I.I)$$

Уравнение (I) перепишем в виде

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - 2(|\varphi|^2-1)\varphi = 0 . \qquad (I.2)$$

Рациональное решение уравнения (I.2) ищем в виде

$$\varphi(x,t) = \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j(t)}{x-x_j(t)}\right] e^{ikx-ik^2t} . \qquad (I.3)$$

Подставляя (I.3) в (I.2) и приравнивая к нулю коэффициенты при $(x-x_j)^{-1}$; $(x-x_j)^{-2}$ и $(x-x_j)^{-3}$, получим, что функция $\varphi(x,t)$ вида (I.3) удовлетворяет (I.2) тогда и только тогда, когда $a_j(t)$ и $x_j(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$ia_m\dot{x}_m - 2ika_m - 2c_ma_m - 2\left[1+\sum_{j\neq m}^{N} a_jx_{mj}^{-1}\right] = 0 ,$$
$$i\dot{a}_m - 2(c_m+a_m) - 2\sum_{j\neq m}^{N}\left[(c_ja_m+c_ma_j)x_{mj}^{-1} + (a_m-a_j)x_{mj}^{-2}\right] = 0 , \qquad (I.4)$$

причем $a_j(t)$ удовлетворяет условию связи:

$$|a_j(t)|^2 = 1 , \qquad (I.5)$$

где $x_{mj}=x_m-x_j$, $c_m=2\mathrm{Re}(a_m+\sum_{j\neq m} a_ma_jx_{mj}^{-1})$, $m,j = 1,2,\dots,N$, причем $\dot{x}_m$, $\dot{a}_m$ означает dx_m/dt , da_m/dt соответственно.

Найдем в явном виде рациональные решения НУШ (I.2) при N = I,2. Имеем

$$\varphi = \left[1+\frac{i}{x-2(k-1)t-x_0}\right] e^{ikx-ik^2t} , \qquad (I.6)$$

$$\varphi(x,t) = \left[1+\frac{1+i(b_0-4t)}{x^2+(m_0-4kt)x+4(k^2-1)t^2+2(b_0-km_0)t+x_0}\right] e^{ikx-ik^2t} +1 ,$$

где b_0, m_0=const, $x_0=\frac{1}{4}(m_0^2-1-b_0^2)$. (I.7)

Полюса x_1,x_2 2-полюсного решения (I.7) равны соответственно

$$x_{1,2}=(2kt-\frac{m_0}{2}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+b_0^2-8b_0t+16t^2} \qquad (I.8)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{x}_1 = \frac{8}{(x_1-x_2)^3} , \qquad (I.9)$$
$$\ddot{x}_2 = -\frac{8}{(x_1-x_2)^3} .$$

Система уравнений (I.9) совпадает с уравнениями движения системы из двух частиц, взаимодействующих с потенциалом $u=4(x_1-x_2)^{-2}$, гамильтониан которой имеет вид

$$H=\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2}-\frac{4}{(x_1-x_2)^2} , \qquad (I.10)$$

где x_1,p_1,x_2,p_2 – координаты и импульсы частиц с массами $m_1=m_2=1$.

Таким образом, динамику сингулярностей двухполюсного рационального решения (I.7) НУШ (I.2) адекватно можно отождествлять с мировыми линиями на (x,t) -плоскости двух частиц с гамильтонианом (I.I0). Отметим, что числа полюсов и нулей функции $\varphi(x,t)$ (I.3) совпадают. Перепишем (I.7) в виде

$$\varphi(x,t)=\frac{(y-y_1(t))(y-y_2(t))}{(x-x_1(t))(x-x_2(t))} e^{ikx-ik^2t} , \qquad (I.II)$$

где нули $y_1(t)$, $y_2(t)$ комплексны и равны

$$y_{1,2}=(2kt-\frac{m_0}{2}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{16t^2+8(2i-b_0)t+b_0^2-3} . \qquad (I.I2)$$

Прямым вычислением можно показать, что нули y_1, y_2 удовлетворяют уравнениям, совпадающим с (I.9):

$$\ddot{y}_1=8(y_1-y_2)^{-3} , \quad \ddot{y}_3 = -8(y_1-y_2)^{-3} . \qquad (I.I3)$$

2. В этом разделе приведем некоторые сингулярные решения НУШ (I). Известно, что (I) имеет следующее решение типа "бегущих" волн:

$$\varphi(x,t)=\sqrt{\wp(\xi,\omega,\omega')+\frac{v^2}{12}}\, e^{i\frac{v}{2}\beta} , \qquad (2.I)$$

где $\wp(\xi,\omega,\omega')$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, ω , ω' – ее полупериоды, $\xi=x-vt$, $\beta=\xi+\alpha$, α=const.

$\wp$ – функция Вейерштрасса связана с функциями Якоби $\mathrm{sn}(\xi,k)$, $\mathrm{cn}(\xi,k)$ с помощью формул

$$\wp(\xi,\omega,\omega') = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(\xi\sqrt{e_1-e_3},k)} \tag{2.2}$$

$$\wp(\xi,\omega,\omega') = e_2 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{cn}^2(\xi\sqrt{e_1-e_3}(\xi-\omega),k)} , \tag{2.3}$$

где e_1, e_2, e_3 – корни многочлена

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3) , \tag{2.4}$$

здесь

$$g_2 = \frac{v^4}{12} - 4c_1 , \quad g_3 = \frac{v^6}{216} - \frac{c_1 v^2}{3} , \quad c_1 = \mathrm{const} , \quad k = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} .$$

Положим $e_3 = -v^2/12$. Тогда из (2.I) и (2.2) имеем

$$\varphi(x,t) = \frac{\sqrt{e_1+v^2/12}}{\mathrm{sn}(\xi\sqrt{e_1-e_3},\ k)} e^{\frac{iv}{2}(x-vt)+i\alpha} \tag{2.5}$$

Если потребовать $e_2 = -v^2/12$, то из (2.I) и (2.3) получим

$$\varphi(x,t) = \frac{\sqrt{e_1+v^2/12}\ e^{i\beta}}{\mathrm{cn}(\sqrt{e_1-e_3}(\xi-\omega),k)} \tag{2.6}$$

Линиями сингулярности решений (2.5) и (2.6) являются линии $x = vt + x_0 + 2m$ и $x = vt + x_0 + (2m+1)\omega$ соответственно. Аналогично регулярному случаю решения (2.5) и (2.6) назовем сингулярными кноидальными волнами.

Пусть $k \to 1$. Тогда из (2.5) следует решение (сингулярный аналог "кинка")

$$\varphi(x,t) = \sqrt{e_1+v^2/12}\ \mathrm{cth}(\xi\sqrt{e_1-e_3})e^{i\beta} , \tag{2.7}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\varphi(x,t) \xrightarrow[|x|\to\pm\infty]{} \sqrt{e_1+v^2/12}\ e^{i\beta} . \tag{2.8}$$

Полагая $k \to 1$, $e_1 = -v^2/12$ в формулах (2.2) и (2.I), получим сингулярное односолитонное решение:

$$\varphi(x,t) = \sqrt{e_1-e_3}\ \mathrm{cosech}(\xi\sqrt{e_1-e_3})e^{i\beta} . \tag{2.9}$$

Два дополнительных сингулярных решения, выражающихся через тригонометрические функции, получаем соответственно из (2.5) и (2.6), полагая $k \to 0$:

$$\varphi(x,t) = \frac{\sqrt{e_1+v^2/12}\ e^{i\beta}}{\sin(\xi\sqrt{e_1-e_3})} \tag{2.I0}$$

и

$$\varphi(x,t) = \frac{\sqrt{e_1+v^2/12}\ e^{i\beta}}{\cos(\xi\sqrt{e_1-e_3})} . \tag{2.II}$$

3. Выше был приведен ряд решений для НУШ с отталкиванием **(I)**. Из них можно построить и решения НУШ с притяжением:

$$i\psi_t + \psi_{yy} + 2|\psi|^2\psi = 0 . \tag{3.I}$$

В самом деле, пусть $\varphi(x,t)$ является решением НУШ с отталкиванием **(I)**. Тогда решение НУШ с притяжением (3.I) имеет вид

$$\psi(y,t) = \bar{\varphi}(iy,t) . \tag{3.2}$$

Отметим, что все решения, полученные выше, являются вырожденными случаями так называемого конечнозонного решения /I0/. Конечнозонные решения выражаются через θ – функции Римана, определенные на некоторой римановой поверхности. Для НУШ с отталкиванием (I) риманова поверхность рода g имеет вид

$$\nu^2 = P_{2g+2}(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda-\lambda_j) , \tag{3.3}$$

где все λ_j вещественны и различны. Положим $\lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_{2g+2}$, пусть $P_\pm = \{\lambda=\infty,\ \nu\lambda^{-g-1} = \pm 1\}$ – бесконечно удаленные точки римановой поверхности (3.3). Тогда конечнозонное решение НУШ (I) имеет вид /II/

$$\varphi(x,t) = r_0 \exp\left\{ ix\int_{P_-}^{P_+}\Omega + it\int_{P_-}^{P_+}\Omega^{(2)}\right\} \frac{\theta(ixU+itV+z_0+\Delta)}{\theta(ixU+itV)\,\varepsilon(P_+,P_-)} , \tag{3.4}$$

где $\Omega = \Omega^{(1)}_{P_+} - \Omega^{(1)}_{P_-}$ и $\Omega^{(2)} = \Omega^{(2)}_{P_+} - \Omega^{(2)}_{P_-}$ – нормированные абелевы дифференциалы второго рода с полюсами в точках $P_\pm$ второго и третьего порядка соответственно, U, V – векторы b – периодов римановой поверхности (3.3), $\Delta = A(P_+) - A(P_-)$, A – отображения Абеля, $\varepsilon(P_+,P_-)$ – некоторая константа, зависящая только от римановой поверхности, $|r_0| = 1$, z_0 – чисто мнимый вектор. В случае рационального решения (I.3) риманова поверхность является рациональной (сферой Римана), т.е. имеет род $g = 0$, с координатой k, в окрестности отмеченной точки $P_0 = \infty$:

$$\nu^2 = P_2 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) . \tag{3.5}$$

Решение (2.I) является вырождением конечнозонного решения (3.4) в случае римановой поверхности рода $g=1$ (эллиптическая кривая):

$$\nu^2 = P_4(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4) . \qquad (3.6)$$

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность В.Г.Маханькову, а один из авторов (Р.М.) - Б.А.Дубровину за полезные обсуждения полученных результатов.

Литература

I. Kruskal M. Lectures in Appl. Math., 1974, 15, 61.
2. Airault H., McKean H.P., Moser J. Comm. Pure Appl. Math., 1977, 30, No1, 95.
3. Calogero F. Nuovo Cimento, 1978, 43B, No.2; Кричевер И.М. УМН, 1977, т.32, вып.6, с.183; Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V. Nuovo Cimento, 1977, v.40B, p.339.
4. Джорджадзе Ф.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. ТМФ, 1979, т. 40, № 2, с. 221.
5. Погребков А.К. ТМФ, 1980, т. 45, № 2, с. 161.
6. Pogrebkov A.K. Lett. Math. Phys., 1982, 6, 243.
7. Аркадьев В.А., Погребков А.К., Поливанов М.К. ТМФ, 1982, т. 53, № 2, с. 163; ТМФ, 1983, т. 54, № 1, с. 23.
8. Аркадьев В.А., Погребков А.К., Поливанов М.К. ТМФ, 1984, т.58, № 1, с.38.
9. Moser J. Adv. Math. 1975, v.16, p.354; Calogero F. Leth. Nuovo Cimento, 1975, 13, p.411.
10. Итс А.Р. Вестник ЛГУ, 1976, № 7, с. 39.
11. Дубровин Б.А. В кн.: Современные проблемы математики, т. 23. "Наука", М., 1983, с.44.

Рукопись поступила в издательский отдел 14 февраля 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Катышев Ю.В., Мырзакулов Р. Р17-86-90

Сингулярные решения нелинейного уравнения Шредингера и интегрируемые системы частиц

Получены сингулярные решения нелинейного уравнения Шредингера, в которых предэкспоненциальные выражения являются рациональными, тригонометрическими функциями от аргументов. Показано, что динамика полюсов N-полюсного рационального решения нелинейного уравнения Шредингера совпадает с движением частиц системы Мозера. При $N=1,2$ приведены явные формулы рациональных решений. Обсуждается связь полученных сингулярных решений с так называемыми конечнозонными решениями, выраженными через Θ-функцию Римана, определенную на гиперэллиптической римановой поверхности.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой.

Katyshev Yu.V., Myrzakulov R. P17-86-90

Singular Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation and Integrable Particle Systems

Singular solutions to the nonlinear Schrödinger equation are obtained which have preexponential expression in the form of rational trigonometric functions of arguments. Dynamics of poles of N-pole rational solution of the nonlinear Schrödinger equation is shown to coincide with particle motion of the Moser system. At $N=1,2$ explicit expressions for the rational solutions are given. Relationships between the singular solutions obtained and the finite zone solutions expressed via the Riemann theta function definded on hyperelliptic Riemannian surface.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986