объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-86-74

А.А.Бакасов, Н.Н.Боголюбов (мл.),
А.С.Шумовский, В.И.Юкалов

КИНЕТИКА ДВУХФОТОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЗАТУХАЮЩЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1986

Введение

Целью настоящей работы является исследование иерархии кинетических уравнений, полученной в рамках микроскопической модели, описывающей нелинейное взаимодействие материи с двумя различными бозонными полями. Такую иерархию удобно записывать в терминах одних только операторов материи, что сокращает как число различных расцеплений, применяемых для получения исследуемых уравнений, так и количество самих уравнений. Тем самым уменьшается элемент феноменологии, вносимый на заключительном этапе решения задачи. Для стандартной модели Дикке исключение бозонных переменных было осуществлено в работах /I-3/, а полученное уравнение исследовано в различных приближениях. Для многоуровневой системы типа модели Дикке уравнение в терминах операторов материи было получено в /4/. Во всех этих работах был использован метод, предложенный в связи с проблемой исследования полярона в /5/.

Важным элементом этого метода является лемма Боголюбова о соотношениях между средними специального вида, доказанная в /5/ для систем со взаимодействием, линейным по операторам поля. Однако для нелинейных систем эта лемма требует обобщения. В связи с этим в § I данной работы рассмотрена модельная система общего вида, состоящая из подсистемы, имеющей произвольную физическую природу, и подсистемы, в которой есть конечное число различных бозонных полей. В начальный момент времени подсистемы равновесны и не взаимодействуют. Считается, что взаимодействие включается адиабатически. Тогда имеет место теорема о соотношениях между средними специального вида. Отметим, что эту теорему можно доказать, опираясь на лемму Боголюбова /5/, однако мы предпочли прямое доказательство теоремы, обладающее, на наш взгляд, большей наглядностью. В этом случае лемма Боголюбова следует из теоремы, когда взаимодействие линейно. Но если для линейных систем прямое применение теоремы позволяет сразу исключить бозонные переменные из кинетического уравнения /I-4/, то для нелинейных систем этого оказывается, вообще говоря, недостаточно.

Однако в модели, рассматриваемой в § 2 настоящей работы и описывающей нелинейное взаимодействие системы двухуровневых излучателей с двумя бозонными полями /6-I0/, вышеуказанную теорему можно с успехом комбинировать с присущим данной модели законом сохранения. Это позволяет изгнать из средних, появляющихся в точном кинетическом уравнении, операторы динамических бозе-полей, что является относительным успехом по сравнению с предыдущей работой /6/, также посвященной данной модели, и дает возможность применять более реалистические аппроксимации.

Рассматриваемая здесь модель представляет интерес по целому ряду причин. Прежде всего следует упомянуть проблему расчета характеристик преобразователей, используемых для визуализации ИК-излучения /11/, задачу о взаимодействии когерентного излучения с кристаллической средой (см., например, в обзоре /12/), описание комбинационного рассеяния в активных средах /13/, двухфотонную спектроскопию /14/. Некоторые аспекты данной модели уже исследовались. Так, в /9,10/ получено точное решение равновесной задачи, а в /6/, как уже упоминалось, рассмотрена кинетика излучения в предположении, что одно из полей является очень сильным и медленно меняющимся со временем. В настоящей работе для этой модели построена иерархия кинетических уравнений, в которую бозе-поля вошли лишь через операторы чисел заполнения, взятые в начальный момент времени. В рассматриваемом нами случае, когда учитывается по одной моде в каждом из полей, иерархия является точной. В § 3 в приближении Борна - Маркова /15/ исследовано влияние начальных условий на кинетику излучения при точной настройке суммарной частоты на частоту перехода между атомными уровнями. Выявлено, что в системе возникают биения, связанные с перекачкой энергии из одного поля в другое.

Следует отметить, что влияние процессов переполяризации и связанных с ними явлений исключалось, так как поляризация полагалась экспоненциально затухающей.

§ 1. Основные соотношения

Рассмотрим модельную систему, состоящую из конечного числа L бозонных полей и некоторой другой подсистемы A, конкретная реализация которой в данном параграфе несущественна. Бозонные поля могут быть квантованы в различных объемах и иметь различную физическую природу. Спектры импульсов $\vec{k}$, $\vec{p}$, ..., $\vec{q}$ и соответствующих энергий $\omega_1(\vec{k})$, $\omega_2(\vec{p})$, ..., $\omega_L(\vec{q})$ бозонных полей в этом случае будут дискретны и, вообще говоря, несоизмеримы. Гамильтониан свободного ℓ-го поля имеет вид

$$F_\ell = \sum_{\vec{k}}^{\vec{\Lambda}_\ell} \omega_\ell(\vec{k})\, a_\ell^+(\vec{k})\, a_\ell(\vec{k}), \tag{1}$$

где $a_\ell^{\#}(\vec{k})$ - бозе-амплитуды, удовлетворяющие перестановочным

соотношениям:

$$[\, a_\ell(\vec{k}), a_j^+(\vec{p})] = \delta_{\ell j}\, \delta_{\vec{k}\vec{p}},$$
$$[\, a_\ell(\vec{k}), a_j(\vec{p})] = 0, \tag{2}$$

а импульс $\vec{\Lambda}_\ell$ соответствует ультрафиолетовому обрезанию в спектре ℓ-го бозонного поля. Здесь и всюду далее полагаем $\hbar = 1$.

Гамильтониан подсистемы A конкретизировать не будем, а примем лишь, что спектр его в невозмущенном полем состоянии дискретен:

$$H_A |\alpha\rangle = \mathcal{E}(\alpha)|\alpha\rangle. \tag{3}$$

Здесь мы обозначили через α мультииндекс, нумерующий собственные векторы $|\alpha\rangle$ и собственные значения $\mathcal{E}(\alpha)$ гамильтониана H_A.

Взаимодействие между полями и подсистемой A в начальный момент времени $t = t_0$ отсутствует:

$$\lim_{t \to t_0+0} H_{INT}(t) = 0; \tag{4}$$

все поля и подсистема A при этом равновесны и характеризуются обратными температурами β_1, β_2, ..., β_L, β_A.

Полный гамильтониан системы в момент времени t имеет вид

$$H = F_1 + F_2 + \dots F_L + H_A + H_{INT}(t). \tag{5}$$

Взаимодействие можно записать в виде

$$H_{INT}(t) = H_{INT} \cdot e^{\gamma t}, \qquad \gamma > 0, \tag{6}$$

обеспечивающем его адиабатическое включение, причем вид оператора H_{INT} нас пока не интересует.

Если обозначить через $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_L$ и $\mathcal{H}_A$ гильбертовы пространства состояний для бозонных полей и подсистемы A соответственно, то гамильтониан (5)-(6) будет определен на гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_L \otimes \mathcal{H}_A. \tag{7}$$

Полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{F}_\ell$, $1 \le \ell \le L$, выберем в виде

$$|n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e); e\rangle =$$
$$= \left(n(\vec{k}_1)!\, n(\vec{k}_2)! \dots n(\vec{\Lambda}_e)!\right)^{-1/2} a_e^+(\vec{k}_1)^{n(\vec{k}_1)}\, a_e^+(\vec{k}_2)^{n(\vec{k}_2)} \dots a_e^+(\vec{\Lambda}_e)^{n(\vec{\Lambda}_e)} |0\rangle, \tag{8}$$

где $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2 \dots$ – импульсы спектра e-го поля, $\vec{\Lambda}_e$ – импульс обрезания для этого поля, $n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e)$ – соответствующие числа заполнения, $|0\rangle$ – вакуум поля.

Орты (8) являются собственными векторами для гамильтониана свободного поля F_e:

$$F_e |n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e); e\rangle =$$
$$= \omega_e\left(n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e)\right) |n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e); e\rangle \tag{9}$$

с собственными значениями, равными следующим суммам:

$$\omega_e(n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e)) = \sum_{\vec{k}=\vec{k}_1}^{\vec{\Lambda}_e} n(\vec{k})\, \omega_e(\vec{k}). \tag{10}$$

Для краткости записи будем обозначать совокупность чисел заполнения для орта (8) как $\{n_e\}$. Тогда мы можем записать

$$|\{n_e\}\rangle = |n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e); e\rangle,$$
$$\omega_e(\{n_e\}) = \omega_e(n(\vec{k}_1), n(\vec{k}_2), \dots, n(\vec{\Lambda}_e)). \tag{11}$$

Базис в пространстве состояний $\mathcal{H}$ всей системы образуем из векторов $|\{n_e\}\rangle$ и $|\alpha\rangle$, причем последние будем также считать ортонормированными:

$$|\{n_1\}, \{n_2\}, \dots, \{n_L\}, \alpha\rangle = |\{n_1\}\rangle \otimes |\{n_2\}\rangle \otimes \dots \otimes |\{n_L\}\rangle \otimes |\alpha\rangle \tag{12}$$

В начальный момент времени матрица плотности имеет вид

$$\rho = \rho(F_1) \otimes \rho(F_2) \otimes \dots \otimes \rho(F_L) \otimes \rho(H_A), \tag{13}$$

где

$$\rho(F_e) = \exp(-\beta_e F_e) \Big/ \underset{\{\mathcal{F}_e\}}{Sp} \exp(-\beta_e F_e) = \exp(-\beta_e F_e) / Z_e, \tag{14}$$
$$1 \le e \le L,$$

$$\rho(H_A) = \exp(-\beta_A H_A) \Big/ \underset{\{\mathcal{H}_A\}}{Sp} \exp(-\beta_A H_A) = \exp(-\beta_A H_A) / Z_A. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь произвольный оператор $U(t)$, нетривиально действующий в полном гильбертовом пространстве состояний (7), считая, что он может зависеть от времени явно. Пусть также $a_1^\#(\vec{k})$, $a_2^\#(\vec{p})$, $\dots$, $a_L^\#(\vec{q})$ – операторы бозе-полей, взятые в начальный момент времени. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для средних вида $\langle a_1^\#(\vec{k}) a_2^\#(\vec{p}) \dots a_L^\#(\vec{q}) U(t)\rangle$ и $\langle U(t) a_1^\#(\vec{k}) a_2^\#(\vec{p}) \dots a_L^\#(\vec{q})\rangle$, взятых по квазиравновесному распределению (13)-(15), имеет место соотношение:

$$\langle a_1^\#(\vec{k}) a_2^\#(\vec{p}) \dots a_L^\#(\vec{q}) U(t)\rangle =$$
$$= \exp\left(\eta_1 \beta_1 \omega_1(\vec{k}) + \eta_2 \beta_2 \omega_2(\vec{p}) + \dots + \eta_L \beta_L \omega_L(\vec{q})\right) \times \tag{16}$$
$$\times \langle U(t) a_1^\#(\vec{k}) a_2^\#(\vec{p}) \dots a_L^\#(\vec{q})\rangle,$$

где величины η_e, $1 \le e \le L$, выбираются из следующего закона соответствия:

$$\eta_L = \begin{cases} +1, & \text{если } a_e^\#(\vec{k}) = a_e(\vec{k}), \\ -1, & \text{если } a_e^\#(\vec{k}) = a_e^+(\vec{k}). \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Чтобы не загромождать выкладки, мы будем рассматривать случай, когда $L = 2$. Как можно будет видеть, в случаях с большим L произойдет простое увеличение числа матричных элементов в соответствующих спектральных разложениях. При этом схема доказательства остается той же, поскольку она в известном смысле элементарна.

Построим спектральные разложения для средних $\langle a_1(\vec{k}) a_2(\vec{q}) U(t)\rangle$ и $\langle U(t) a_1(\vec{k}) a_2(\vec{q})\rangle$. Имеем

$$Z_1 Z_2 Z_A \langle a_1(\vec{k}) a_2(\vec{q}) U(t)\rangle =$$
$$= \underset{\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{H}_A\}}{Sp} \left[a_1(\vec{k}) a_2(\vec{q}) U(t) \exp(-\beta_1 F_1 - \beta_2 F_2 - \beta_A H_A)\right] = \tag{18}$$
$$= \sum_\alpha \sum_{\{n_1\}} \sum_{\{n_2\}} \langle \{n_1\}, \{n_2\}, \alpha | a_1(\vec{k}) a_2(\vec{q}) U(t) \times$$

$$\times \exp(-\beta_1 F_1 - \beta_2 F_2 - \beta_A H_A)\,|\{n_1\},\{n_2\},\alpha\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\sum_{\alpha'}\sum_{\{n_1'\}}\sum_{\{n_2'\}} \langle\{n_1\},\{n_2\},\alpha|\,a_1(\vec{k})\,a_2(\vec{q})\,\times$$

$$|\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'\rangle\langle\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'|\,U(t)\,|\{n_1\},\{n_2\},\alpha\rangle\,\times$$

$$\times \exp\left(-\beta_1\omega_1(\{n_1\}) - \beta_2\omega_2(\{n_2\}) - \beta_A\mathcal{E}(\alpha)\right).$$

Здесь мы использовали уравнения на собственные значения (3) и (9) в сокращенной записи (II), а также представление единичного оператора

$$\mathbb{1} = \sum_{\alpha'}\sum_{\{n_1'\}}\sum_{\{n_2'\}} |\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'\rangle\langle\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'|\,. \qquad (I9)$$

Действие операторов $a_1(\vec{k})$ и $a_2(\vec{q})$ по определению следующее:

$$a_1(\vec{k})\,|\{n_1\}\rangle = \sqrt{n_1(\vec{k})}\,|\{\tilde{n}_1\}\rangle,\quad a_1(\vec{k})|0\rangle = 0,$$

$$a_2(\vec{q})\,|\{n_2\}\rangle = \sqrt{n_2(\vec{q})}\,|\{\tilde{n}_2\}\rangle,\quad a_2(\vec{q})|0\rangle = 0, \qquad (20)$$

где последовательность чисел заполнения $\{\tilde{n}_1\}$ получается из последовательности $\{n_1\}$ заменой в ней $n_1(\vec{k})$ на $(n_1(\vec{k}) - 1)$, аналогично $\{\tilde{n}_2\}$ получается из $\{n_2\}$ заменой $n_2(\vec{q})$ на $(n_2(\vec{q}) - 1)$. Подставляя (20) в (I8) и используя запись (II), получаем

$$Z_1 Z_2 Z_A \langle a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\,U(t)\rangle = \sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\sum_{\alpha'}\sum_{\{n_1'\}}\sum_{\{n_2'\}} \times$$

$$\times\sqrt{n_1'(\vec{k})\,n_2'(\vec{q})}\;\delta_{\alpha\alpha'}\;\delta_{\{n_1\}\{\tilde{n}_1'\}}\,\delta_{\{n_2\}\{\tilde{n}_2'\}}\,\langle\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'|\,U(t)\,\times$$

$$|\{n_1\},\{n_2\},\alpha\rangle \exp\left(-\beta_1\omega_1(\{n_1\}) - \beta_2\omega_2(\{n_2\}) - \beta_A\mathcal{E}(\alpha)\right) =$$

$$= \sum_{\alpha'}\sum_{\{n_1'\}}\sum_{\{n_2'\}} \sqrt{n_1'(\vec{k})\,n_2'(\vec{q})}\,\langle\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'|\,U(t)\,\times$$

$$|\{\tilde{n}_1'\},\{\tilde{n}_2'\},\alpha'\rangle \exp\left(-\beta_1\omega_1(\{\tilde{n}_1'\}) - \beta_2\omega_2(\{\tilde{n}_2'\}) - \beta_A\mathcal{E}(\alpha')\right). \qquad (2I)$$

Так как последовательности $\{n_1'\}$ и $\{\tilde{n}_1'\}$, $\{n_2'\}$ и $\{\tilde{n}_2'\}$ определены согласно (20), то для соответствующих энергий справедливы соотношения, следующие из формулы (I0),

$$\omega_1(\{\tilde{n}_1'\}) = \omega_1(\{n_1'\}) - \omega_1(\vec{k}),$$

$$\omega_2(\{\tilde{n}_2'\}) = \omega_2(\{n_2'\}) - \omega_2(\vec{q}). \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (2I) и убирая штрихи у индексов суммирования, получим спектральное представление:

$$Z_1 Z_2 Z_A \langle a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\,U(t)\rangle = \exp\left(\beta_1\omega_1(\vec{k}) + \beta_2\omega_2(\vec{q})\right)\times$$

$$\times\sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\sqrt{n_1(\vec{k})\,n_2(\vec{q})}\,\langle\{n_1\},\{n_2\},\alpha|\,U(t)\,\times \qquad (23)$$

$$|\{\tilde{n}_1\},\{\tilde{n}_2\},\alpha\rangle \exp\left(-\beta_1\omega_1(\{n_1\}) - \beta_2\omega_2(\{n_2\}) - \beta_A\mathcal{E}(\alpha)\right).$$

Для среднего $\langle U(t)a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\rangle$, действуя подобным же образом, получаем

$$Z_1 Z_2 Z_A \langle U(t)\,a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\rangle =$$

$$= \underset{\{F_1,F_2,H_A\}}{Sp}\left[U(t)a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\exp(-\beta_1 F_1 - \beta_2 F_2 - \beta_A H_A)\right] =$$

$$= \sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\langle\{n_1\},\{n_2\},\alpha|\,U(t)a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\exp(-\beta_1F_1-\beta_2F_2-\beta_A H_A)\,\times$$

$$\times|\{n_1\},\{n_2\},\alpha\rangle = \sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\sum_{\alpha'}\sum_{\{n_1'\}}\sum_{\{n_2'\}}\langle\{n_1\},\{n_2\},\alpha|\,U(t)\,\times \qquad (24)$$

$$\times|\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'\rangle\langle\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'|\,a_1(\vec{k})a_2(\vec{q})\,|\{n_1\},\{n_2\},\alpha\rangle\exp\left(-\beta_1\omega_1(\{n_1\}) -\right.$$

$$\left.-\beta_2\omega_2(\{n_2\}) - \beta_A\mathcal{E}(\alpha)\right) = \sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\sum_{\alpha'}\sum_{\{n_1'\}}\sum_{\{n_2'\}}\sqrt{n_1(\vec{k})\,n_2(\vec{q})}\,\times$$

$$\times\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\{n_1'\}\{\tilde n_1\}}\,\delta_{\{n_2'\}\{\tilde n_2\}}\,\langle\{n_1\},\{n_2\},\alpha|\,U(t)\,|\{n_1'\},\{n_2'\},\alpha'\rangle\times$$

$$\times\,\exp\left(-\beta_1\omega_1(\{n_1\})-\beta_2\omega_2(\{n_2\})-\beta_A E(\alpha)\right)=$$

$$=\sum_{\alpha}\sum_{\{n_1\}}\sum_{\{n_2\}}\sqrt{n_1(\vec k)\,n_2(\vec q)}\,\langle\{n_1\},\{n_2\},\alpha|\,U(t)\,|\{\tilde n_1\},\{\tilde n_2\},\alpha\rangle\times$$

$$\times\,\exp\left(-\beta_1\omega_1(\{n_1\})-\beta_2\omega_2(\{n_2\})-\beta_A E(\alpha)\right).$$

Сравнивая (23) и (24), видим, что правые части в них совпадают с точностью до множителя $\exp(\beta_1\omega_1(\vec k)+\beta_2\omega_2(\vec q))$. Следовательно, имеет место соотношение

$$\langle a_1(\vec k)a_2(\vec q)U(t)\rangle=\exp\left(\beta_1\omega_1(\vec k)+\beta_2\omega_2(\vec q)\right)\langle U(t)a_1(\vec k)a_2(\vec q)\rangle. \tag{25}$$

Вычисляя спектральные разложения для средних $\langle a_1^+(\vec k)a_2^+(\vec q)\,U(t)\rangle$ и $\langle U(t)a_1^+(\vec k)a_2^+(\vec q)\rangle$, $\langle a_1^+(\vec k)a_2(\vec q)U(t)\rangle$ и $\langle U(t)a_1^+(\vec k)a_2(\vec q)\rangle$, $\langle a_1(\vec k)a_2^+(\vec q)U(t)\rangle$ и $\langle U(t)a_1(\vec k)a_2^+(\vec q)\rangle$, убеждаемся в справедливости равенств

$$\langle a_1^+(\vec k)a_2^+(\vec q)U(t)\rangle=\exp\left(-\beta_1\omega_1(\vec k)-\beta_2\omega_2(\vec q)\right)\langle U(t)a_1^+(\vec k)a_2^+(\vec q)\rangle, \tag{26}$$

$$\langle a_1^+(\vec k)a_2(\vec q)U(t)\rangle=\exp\left(-\beta_1\omega_1(\vec k)+\beta_2\omega_2(\vec q)\right)\langle U(t)a_1^+(\vec k)a_2(\vec q)\rangle, \tag{27}$$

$$\langle a_1(\vec k)a_2^+(\vec q)U(t)\rangle=\exp\left(\beta_1\omega_1(\vec k)-\beta_2\omega_2(\vec q)\right)\langle U(t)a_1(\vec k)a_2^+(\vec q)\rangle. \tag{28}$$

Вводя по правилу (I7) величину η_ℓ, $1\le\ell\le L$, объединяем формулы (25)-(28) в одну:

$$\langle a_1^{\#}(\vec k)a_2^{\#}(\vec q)U(t)\rangle=\exp\left(\eta_1\beta_1\omega_1(\vec k)+\eta_2\beta_2\omega_2(\vec q)\right)\langle U(t)a_1^{\#}(\vec k)a_2^{\#}(\vec q)\rangle, \tag{29}$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к выводу иерархии кинетических уравнений,

отметим еще один полезный факт. Пусть в начальный момент времени t_0 температура одного из полей, для определенности будем считать, что первого, равна нулю. В этом случае мы рассматриваем процесс спонтанного излучения в этом поле. В начальном условии для матрицы плотности (I3)-(I5) имеем:

$$\rho(F_1)=|0\rangle_1\,{}_1\langle 0|, \tag{30}$$

где $|0\rangle_1$ - вакуум первого поля. Тогда, подставляя (30) в спектральное представление (24) и учитывая (20), получим

$$\langle U(t)\,a_1(\vec k)\,a_2(\vec q)\rangle=0. \tag{31}$$

Из теоремы следует также, что

$$\langle a_1(\vec k)a_2(\vec q)U(t)\rangle=0. \tag{32}$$

Из спектральных представлений для средних в (26)-(28) видим, что при условии (30) имеем равенство

$$\langle a_1^{\#}(\vec k)a_2^{\#}(\vec q)U(t)\rangle=\langle U(t)a_1^{\#}(\vec k)a_2^{\#}(\vec q)\rangle=0. \tag{33}$$

Формула (33) справедлива также, если

$$\rho(F_2)=|0\rangle_2\,{}_2\langle 0|, \tag{34}$$

где $|0\rangle_2$ - вакуум второго поля.

<u>Следствие</u>. Если для какого-либо $\ell\in\{1,2,\dots,L\}$ выполняется условие

$$\rho(F_\ell)=|0\rangle_\ell\,{}_\ell\langle 0|, \tag{35}$$

где $|0\rangle_\ell$ - вакуум ℓ-го поля, то средние

$$\langle a_1^{\#}(\vec k)a_2^{\#}(\vec q)\dots a_L^{\#}(\vec p)U(t)\rangle=\langle U(t)a_1^{\#}(\vec k)a_2^{\#}(\vec q)\dots a_L^{\#}(\vec p)\rangle \tag{36}$$

равны нулю и вклада в кинетику процесса излучения не дают.

где $U(t)$ - гейзенберговское представ-е оператора $U(t_0)$, действующего в пр-ве A.

<u>Замечание</u>. В случае $L=1$ получаем лемму Боголюбова /5/. Приведенное нами доказательство наглядно демонстрирует, что оператор $U(t)$ - произволен, может явно зависеть от времени, может быть также многовременным.

§ 2. Точная иерархия кинетических уравнений для случая фиксированной суммарной частоты

Далее мы будем рассматривать микроскопическую модель, описывающую нелинейное взаимодействие системы N двухуровневых излучателей с двумя бозонными полями. Эту модель можно получить надлежащей редукцией из более общей модели, предложенной в работах /7,8/ и предназначенной для описания многофотонных процессов. Кроме того, в настоящей работе ограничимся рассмотрением двухфотонных каскадных процессов. Таким образом, гамильтониан будет иметь вид

$$H(t)=\sum_{\vec{k}}\omega_1(\vec{k})a_1^+(\vec{k})a_1(\vec{k})+\sum_{\vec{q}}\omega_2(\vec{q})a_2^+(\vec{q})a_2(\vec{q})+ \tag{37}$$
$$+\varepsilon\sum_{f=1}^{N}S^z(f)+\frac{\lambda e^{\gamma t}}{N}\sum_{f=1}^{N}\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{q}}\left(S^-(f)a_1^+(\vec{k})a_2^+(\vec{q})+a_2(\vec{q})a_1(\vec{k})S^+(f)\right),$$

где $S^z(f)$, $S^{\pm}(f)$ – операторы квазиспинов, обычным образом выражающиеся через матрицы Паули, ассоциированные с f-м атомом:

$$S^z(f)=\frac{1}{2}\sigma_f^z,\quad S^{\pm}(f)=\frac{1}{2}(\sigma_f^x\pm i\sigma_f^y), \tag{38}$$

$$[\sigma_f^i,\sigma_g^j]=2i\epsilon^{ijk}\sigma_f^k\,\delta_{fg}. \tag{39}$$

В выражениях (37)-(39) величина ε равна разности энергий возбужденного и основного состояний двухуровневого атома, λ – константа связи, фактор $e^{\gamma t}$, $\gamma>0$ введен для осуществления адиабатического включения взаимодействия согласно (4)-(6), ϵ^{ijk} – абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга с компонентой $\epsilon^{123}=1$.

Уравнение Лиувилля для статистического оператора имеет вид

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=[H(t),\rho(t)] \tag{40}$$

с начальным условием согласно (I3)-(I5):

$$\rho(t_0)=\rho(F_1)\otimes\rho(F_2)\otimes\rho(H_A), \tag{4I}$$

$$\rho(F_1)=\exp\Big(-\beta_1\sum_{\vec{k}}\omega_1(\vec{k})a_1^+(\vec{k})a_1(\vec{k})\Big)\Big/\underset{\{F_1\}}{Sp}\exp\Big(-\beta_1\sum_{\vec{k}}\omega_1(\vec{k})a_1^+(\vec{k})a_1(\vec{k})\Big), \tag{42}$$

$$\rho(F_2)=\exp\Big(-\beta_2\sum_{\vec{q}}\omega_2(\vec{q})a_2^+(\vec{q})a_2(\vec{q})\Big)\Big/\underset{\{F_2\}}{Sp}\exp\Big(-\beta_2\sum_{\vec{q}}\omega_2(\vec{q})a_2^+(\vec{q})a_2(\vec{q})\Big), \tag{43}$$

$$\rho(H_A)=\exp\Big(-\beta_A\varepsilon\sum_{f=1}^{N}S^z(f)\Big)\Big/\underset{\{H_A\}}{Sp}\exp\Big(-\beta_A\varepsilon\sum_{f=1}^{N}S^z(f)\Big) \tag{44}$$

Введем оператор эволюции $U(t,t_0)$, удовлетворяющий соотношениям:

$$i\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}=H(t)U(t,t_0),\quad U(t_0,t_0)=1, \tag{45}$$

$$U^+(t,t_0)=U^{-1}(t,t_0). \tag{46}$$

Из уравнения Лиувилля следует, что

$$\rho(t)=U(t,t_0)\rho(t_0)U^{-1}(t,t_0). \tag{47}$$

Рассмотрим некоторую динамическую величину, записываемую в шредингеровском представлении для момента времени t_0 как $B(t_0)$. Ее среднее значение в момент времени t будет:

$$\langle B(t)\rangle=Sp\,B(t_0)\rho(t)=Sp\,B(t_0)U(t,t_0)\rho(t_0)U^{-1}(t,t_0)=$$
$$=Sp\,U^{-1}(t,t_0)B(t_0)U(t,t_0)\rho(t_0). \tag{48}$$

Как видно, выражение $U^{-1}(t,t_0)B(t_0)U(t,t_0)$ является представлением Гейзенберга для данной динамической величины, которое при $t=t_0$ совпадает с ее шредингеровским представлением. Таким образом, согласно (48) для вычисления среднего значения динамической величины мы усредняем соответствующий оператор, взятый в гейзенберговском представлении по квазиравновесному распределению (4I)-(44). Отметим также, что, если в начальный момент времени коммутатор двух величин $B_1(t_0)$ и $B_2(t_0)$ был равен числу C, то такой коммутатор сохраняется во времени:

$$[B_1(t),B_2(t)]=[B_1(t_0),B_2(t_0)]=C, \tag{49}$$

где t – произвольный момент времени, $B_1(t)$ и $B_2(t)$ – соответствующие гейзенберговские представления этих величин, а число C может быть, в частности, нулем.

Запишем уравнения движения для операторов числа фотонов в каждом поле, а также для оператора полуразности числа инверсных и конверсных атомов в подсистеме излучателей:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{\vec k} a_1^+(\vec k,t)a_1(\vec k,t)\Big) = \tag{50}$$
$$= -\frac{\lambda e^{\gamma t}}{N}\sum_{f=1}^{N}\sum_{\vec k}\sum_{\vec q}\Big(a_2(\vec q,t)a_1(\vec k,t)S^+(f,t) - S^-(f,t)a_1^+(\vec k,t)a_2^+(\vec q,t)\Big),$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{\vec q} a_2^+(\vec q,t)a_2(\vec q,t)\Big) = \tag{51}$$
$$= -\frac{\lambda e^{\gamma t}}{N}\sum_{f=1}^{N}\sum_{\vec k}\sum_{\vec q}\Big(a_2(\vec q,t)a_1(\vec k,t)S^+(f,t) - S^-(f,t)a_1^+(\vec k,t)a_2^+(\vec q,t)\Big),$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{f=1}^{N} S^z(f,t)\Big) = \tag{52}$$
$$= \frac{\lambda e^{\gamma t}}{N}\sum_{f=1}^{N}\sum_{\vec k}\sum_{\vec q}\Big(a_2(\vec q,t)a_1(\vec k,t)S^+(f,t) - S^-(f,t)a_1^+(\vec k,t)a_2^+(\vec q,t)\Big).$$

Существенной особенностью является то, что правые части в уравнениях (50)-(52) с точностью до знака совпадают. Нетрудно видеть, что имеют место законы сохранения, выражающиеся в следующих операторных равенствах:

$$\sum_{\vec k} a_1^+(\vec k,t)a_1(\vec k,t) = \sum_{\vec k} a_1^+(\vec k,t_0)a_1(\vec k,t_0) + \sum_{f=1}^{N}\big(S^z(f,t_0) - S^z(f,t)\big), \tag{53}$$

$$\sum_{\vec q} a_2^+(\vec q,t)a_2(\vec q,t) = \sum_{\vec q} a_2^+(\vec q,t_0)a_2(\vec q,t_0) + \sum_{f=1}^{N}\big(S^z(f,t_0) - S^z(f,t)\big). \tag{54}$$

Соотношения (53) и (54) являются следствием двухбозонного характера взаимодействия и означают, что на единичный акт конверсии (инверсии) в подсистеме излучателей приходится по одному акту рождения (уничтожения) кванта каждого из бозонных полей одновременно.

Перейдем к рассмотрению физически важного случая двухфотонного взаимодействия с фиксированной суммарной частотой. Проще всего добиться такой фиксации, если учитывать в каждом поле лишь по одной моде. Будем обозначать соответствующие операторы рождения и уничтожения бозонов как $a^{\#}(t)$ и $b^{\#}(t)$, а энергии этих частиц – через ω_1 и ω_2 соответственно. Эти моды будем считать независимыми:

$$[a^{\#}(t), b^{\#}(t)] = 0.$$

Введем для компактности записи операторы

$$S^z(t) = \frac{1}{N}\sum_{f=1}^{N} S^z(f,t), \quad S^{\pm}(t) = \frac{1}{N}\sum_{f=1}^{N} S^{\pm}(f,t), \tag{55}$$

удовлетворяющие, как это следует из (38)-(39), перестановочным соотношениям:

$$[S^z(t), S^{\pm}(t)] = \pm\frac{S^{\pm}(t)}{N},$$
$$[S^{\pm}(t), S^{\mp}(t)] = \pm\frac{2S^z(t)}{N}. \tag{56}$$

Уравнения движения для бозе-факторов, входящих в гамильтониан взаимодействия, будут теперь иметь вид:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\big(a^+(t)b^+(t)\big) = -(\omega_1+\omega_2)a^+(t)b^+(t) -$$
$$-\lambda e^{\gamma t}\big(1 + a^+(t)a(t) + b^+(t)b(t)\big)S^+(t), \tag{57}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\big(b(t)a(t)\big) = (\omega_1+\omega_2)b(t)a(t) +$$
$$+\lambda e^{\gamma t}S^-(t)\big(1 + a^+(t)a(t) + b^+(t)b(t)\big). \tag{58}$$

Формальное решение этих уравнений есть:

$$a^+(t)b^+(t) = e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}a^+(t_0)b^+(t_0) +$$
$$+ i\lambda\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\gamma\tau} e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}\big(1 + a^+(\tau)a(\tau) + b^+(\tau)b(\tau)\big)S^+(\tau), \tag{59}$$

$$b(t)a(t) = e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}b(t_0)a(t_0) -$$
$$- i\lambda\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\gamma\tau} e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}S^-(\tau)\big(1 + a^+(\tau)a(\tau) + b^+(\tau)b(\tau)\big). \tag{60}$$

Из законов сохранения (53) и (54) получаем:

$$a^+(\tau)a(\tau) = a^+(t_0)a(t_0) + N\big(S^z(t_0) - S^z(\tau)\big), \tag{61}$$

$$b^+(\tau)b(\tau) = b^+(t_0)b(t_0) + N\big(S^z(t_0) - S^z(\tau)\big). \tag{62}$$

Тогда выражения (59) и (60) можно переписать в виде:

$$a^+(t)b^+(t) = e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)} a^+(t_0)b^+(t_0) + i\lambda\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\gamma\tau} e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}\{1+a^+(t_0)a(t_0)+b^+(t_0)b(t_0)+ 2N(S^z(t_0)-S^z(\tau))\}\, S^+(\tau), \tag{63}$$

$$b(t)a(t) = e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)} b(t_0)a(t_0) - i\lambda\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\gamma\tau} e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)} S^-(\tau)\{1+a^+(t_0)a(t_0)+b^+(t_0)b(t_0)+ 2N(S^z(t_0)-S^z(\tau))\}. \tag{64}$$

Пусть теперь $O(t)$ - оператор некоторой динамической величины, принадлежащей подсистеме квазиспинов A, взятый в гейзенберговском представлении. Его временная эволюция подчиняется следующему уравнению движения

$$\frac{\partial}{\partial t}O(t) + iN\varepsilon[O(t),S^z(t)] = -i\lambda e^{\gamma t}[O(t),S^-(t)]a^+(t)b^+(t) - i\lambda e^{\gamma t} b(t)a(t)[O(t),S^+(t)]. \tag{65}$$

Подставим в (65) вместо $a^+(t)\,b^+(t)$ и $b(t)a(t)$ их формальные выражения (63)-(64). Получим, усредняя по квазиравновесному распределению (4I)-(44):

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle O(t)\rangle + iN\varepsilon\langle[O(t),S^z(t)]\rangle = -i\lambda e^{\gamma t}\langle[O(t),S^-(t)]\, e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)} a^+(t_0)b^+(t_0)\rangle + \lambda^2 e^{\gamma t}\langle [O(t),S^-(t)]\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\gamma\tau} e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)} K(t_0,\tau)S^+(\tau)\rangle - i\lambda e^{\gamma t}\langle e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)} b(t_0)a(t_0)\,[O(t),S^+(t)]\rangle - \lambda^2 e^{\gamma t}\langle\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\gamma\tau} e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)} S^-(\tau)K(t_0,\tau)[O(t),S^+(t)]\rangle. \tag{66}$$

где введено следующее обозначение:

$$K(t_0,\tau) = 1+a^+(t_0)a(t_0)+b^+(t_0)b(t_0)+2N(S^z(t_0)-S^z(\tau)). \tag{67}$$

Заметим, что для описания кинетики двухфотонного взаимодействия двух независимых мод поля с системой двухуровневых излучателей иерархия кинетических уравнений (66) является точной.

Далее, если бы в начальном состоянии в одном из полей число частиц равнялось нулю, т.е. если бы соответствующий тензорный сомножитель в (4I)-(44) имел вид

$$\rho(F_e) = |0\rangle_e\, {}_e\langle 0|, \tag{68}$$

где $|0\rangle_e$ -вакуум одного из полей, то, согласно следствию (36) из теоремы, первый и третий члены в правой части (66) исчезли бы, и на этом вывод точного кинетического уравнения можно было закончить. Бозонные поля давали бы вклад в такое кинетическое уравнение посредством операторов чисел бозонов, взятых в начальный момент времени, как видно из (67).

Однако, если в начальный момент времени в каждой из мод запасено некоторое число фотонов, т.е. рассматривается не спонтанное излучение, то, используя теорему, можно преобразовать первый и третий члены в правой части (66) к виду, подобному второму и четвертому членам соответственно.

Чтобы показать это, заметим, что из (26) и (25) следует

$$\langle U(t)a^+(t_0)b^+(t_0)\rangle = (1+N(\omega_1,\omega_2))\langle[U(t),a^+(t_0)b^+(t_0)]\rangle \tag{69}$$

$$\langle b(t_0)a(t_0)W(t)\rangle = (1+N(\omega_1,\omega_2))\langle[b(t_0)a(t_0),W(t)]\rangle, \tag{70}$$

где $U(t)=[O(t),S^-(t)]$, $W(t)=[O(t),S^+(t)]$

и введено обозначение

$$N(\omega_1,\omega_2) = (\exp(\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2)-1)^{-1} = \frac{N_1N_2}{1+N_1+N_2}, \qquad N_i = (\exp(\beta_i\omega_i)-1)^{-1},\quad i=1,2. \tag{7I}$$

С помощью соотношения (69), выражая $e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}a^+(t_0)\,b^+(t_0)$ из формулы (63), преобразуем первый член в правой части уравнения (66):

$$-i\lambda e^{\gamma t}\langle[O(t),S^-(t)]\; e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)} a^+(t_0)\,b^+(t_0)\rangle =$$

$$=-i\lambda e^{\gamma t}(1+N(\omega_1,\omega_2))\left\langle\left[[O(t),S^-(t)],e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}a^+(t_0)b^+(t_0)\right]\right\rangle=$$

$$=-\lambda^2 e^{\gamma t}(1+N(\omega_1,\omega_2))\left\langle\left[[O(t),S^-(t)],\int_{t_0}^{t}d\tau\, e^{\gamma\tau}e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}K(t_0,\tau)S^+(\tau)\right]\right\rangle. \tag{72}$$

В (72) было учтено, что имеет место очевидное равенство

$$\left[[O(t),S^-(t)],a^+(t)b^+(t)\right]=0.$$

Аналогично выводу (72), выражая $e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}b(t_0)a(t_0)$ из формулы (64), используя соотношение (70) и учитывая, что

$$\left[b(t)a(t),[O(t),S^+(t)]\right]=0,$$

преобразуем третий член в правой части уравнения (66):

$$-i\lambda e^{\gamma t}\left\langle e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}b(t_0)a(t_0)\,[O(t),S^+(t)]\right\rangle=$$

$$=-i\lambda e^{\gamma t}(1+N(\omega_1,\omega_2))\left\langle\left[e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-t_0)}b(t_0)a(t_0),[O(t),S^+(t)]\right]\right\rangle= \tag{73}$$

$$=\lambda^2 e^{\gamma t}(1+N(\omega_1,\omega_2))\left\langle\left[\int_{t_0}^{t}d\tau\, e^{\gamma\tau}e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}S^-(\tau)K(t_0,\tau),[O(t),S^+(t)]\right]\right\rangle.$$

Подставляя преобразованные согласно (72) и (73) первый и третий члены в правую часть уравнения (66), получаем точную в пределе $t_0\to-\infty$, $\gamma\to+0$ иерархию кинетических уравнений, описывающую нелинейное взаимодействие двух независимых бозонных мод с квазиспиновой материей:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle O(t)\rangle+iN\varepsilon\left\langle[O(t),S^z(t)]\right\rangle=$$

$$=\lambda^2\int_{-\infty}^{t}d\tau\, e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}\Big\{N(\omega_1,\omega_2)\left\langle[S^-(t),O(t)]K(t_0,\tau)S^+(\tau)\right\rangle+$$

$$+(1+N(\omega_1,\omega_2))\left\langle K(t_0,\tau)S^+(\tau)\,[O(t),S^-(t)]\right\rangle\Big\}+ \tag{74}$$

$$+\lambda^2\int_{-\infty}^{t}d\tau\, e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}\Big\{N(\omega_1,\omega_2)\left\langle S^-(\tau)K(t_0,\tau)[O(t),S^+(t)]\right\rangle+$$

$$+(1+N(\omega_1,\omega_2))\left\langle[S^+(t),O(t)]S^-(\tau)K(t_0,\tau)\right\rangle\Big\}.$$

Таким образом, формальный вклад бозе-**полей** в описание кинетики рассматриваемой модели сводится к тому, что в средних фигурируют операторы числа бозонов, взятые в начальный момент времени:

$$\hat{n}_1=a^+(t_0)a(t_0),\quad \hat{n}_2=b^+(t_0)b(t_0). \tag{75}$$

§ 3. <u>Случай затухающей поляризации</u>

Для величины $\langle S^z(t)\rangle$, характеризующей населенности уровней в подсистеме двухуровневых атомов, имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle S^z(t)\rangle=\frac{\lambda^2}{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\, e^{i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}\Big\{N(\omega_1,\omega_2)\Big\langle S^-(t)\big(1+\hat{n}_1+\hat{n}_2+$$

$$+2N(S^z(t_0)-S^z(\tau))\big)S^+(\tau)\Big\rangle-(1+N(\omega_1,\omega_2))\Big\langle\big(1+\hat{n}_1+\hat{n}_2+$$

$$+2N(S^z(t_0)-S^z(\tau))\big)S^+(\tau)S^-(t)\Big\rangle+\frac{\lambda^2}{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\, e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\tau)}\Big\{N(\omega_1,\omega_2)\times$$

$$\times\Big\langle S^-(\tau)\big(1+\hat{n}_1+\hat{n}_2+2N(S^z(t_0)-S^z(\tau))\big)S^+(t)\Big\rangle-(1+N(\omega_1,\omega_2))\times$$

$$\times\Big\langle S^+(t)S^-(\tau)\big(1+\hat{n}_1+\hat{n}_2+2N(S^z(t_0)-S^z(\tau))\big)\Big\rangle\Big\}. \tag{76}$$

Пусть теперь $A(t_1)$ и $B(t_2)$ – гейзенберговские представления динамических величин из подсистемы излучателей, взятые в некоторые моменты времени t_1 и t_2, а β_1 и β_2 – начальные обратные температуры бозе-полей. Средние, в которые входят операторы $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$, будем расцеплять следующим образом:

$$\langle\hat{n}_i A(t_1)B(t_2)\rangle=\langle A(t_1)\hat{n}_i B(t_2)\rangle=\langle A(t_1)B(t_2)\hat{n}_i\rangle=\frac{1}{e^{\beta_i\omega_i}-1}\langle A(t_1)B(t_2)\rangle, \tag{77}$$

где $i=1,2$.

Тройные корреляторы операторов квазиспинов будем оценивать по формулам

$$\langle S^z(t_3)S^\pm(t_1)S^\mp(t_2)\rangle=\langle S^\pm(t_1)S^z(t_3)S^\mp(t_2)\rangle=$$

$$=\langle S^\pm(t_1)S^\mp(t_2)S^z(t_3)\rangle=\langle S^z(t_3)\rangle\langle S^\pm(t_1)S^\mp(t_2)\rangle. \tag{78}$$

Примем, что Ω –параметр лоренцева неоднородного уширения, а T – так называемое "время жизни осцилляторов". Тогда для двух моментов времени t_2 и t_1, таких, что $|t_2-t_1|\lesssim T$, можно записать /15/:

$$\langle S^{\pm}(t_1)S^{\mp}(t_2)\rangle = \begin{cases}\langle S^{\pm}(t_1)S^{\mp}(t_1)\rangle e^{\pm i\Omega(t_1-t_2)}e^{-(t_1-t_2)/2T}, & t_1>t_2,\\ \langle S^{\pm}(t_2)S^{\mp}(t_2)\rangle e^{\mp i\Omega(t_2-t_1)}e^{-(t_2-t_1)/2T}, & t_2>t_1.\end{cases} \qquad (79)$$

Зафиксируем следующие начальные условия:

$$\langle S^{z}(t_0)\rangle = S, \quad t_0\to-\infty, \qquad (80)$$

$$\left|\langle S^{\pm}(t_0)\rangle\right| = P, \quad t_0\to-\infty. \qquad (81)$$

Используя (80), можно ввести следующее представление для полуразности населенностей уровней:

$$\langle S^{z}(t)\rangle = S+f(t), \qquad (82)$$

где функция $f(t)$ характеризует отклонение значения полуразности населенностей в момент времени t от начального.

Упрощая с помощью приближений (77)-(79) уравнение (76) и подставляя тождество (82), получаем интегро-дифференциальное уравнение для функции $f(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t) = -\frac{2\lambda^2}{N}e^{-t/2T}\left(\langle S^{+}(t)S^{-}(t)\rangle + \frac{2N(\omega_1,\omega_2)}{N}\left(S+f(t)\right)\right)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{t}d\tau\, e^{\tau/2T}\cos\left((\omega_1+\omega_2-\Omega)(t-\tau)\right)\left(1+N_1+N_2-2Nf(\tau)\right). \qquad (83)$$

Из определения (82) следует, что

$$f(t_0)=0, \quad t_0\to-\infty, \qquad (84)$$

а ввиду наличия $\int\limits_{t_0\to-\infty}^{t} d\tau\ldots$ в качестве сомножителя в правой части уравнения (83) и ограниченности других сомножителей, получаем

$$\left.\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right|_{t\to-\infty} = 0. \qquad (85)$$

Чтобы не привлекать дополнительных уравнений, будем считать, что поляризация экспоненциально затухает:

$$\langle S^{+}(t)S^{-}(t)\rangle = P^2 e^{-t/T}. \qquad (86)$$

Несовершенство аппроксимации (86) очевидно, однако это позволя-

ет нам замкнуть рассмотрение на единственном уравнении (83), а также выявить биения интенсивности излучения, связанные с перекачкой энергии между полями. Такие биения не могут быть связаны с эффектами затухания и восстановления поляризации, которые исключены согласно (86).

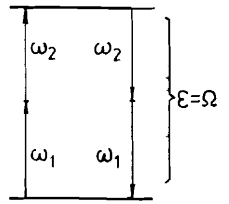


Рис. I.

Далее будем рассматривать важный для практики случай резонансной настройки суммарной частоты мод (рис. I), т.е. примем выполнение равенства:

$$\omega_1+\omega_2-\Omega = \omega_1+\omega_2-\varepsilon = 0. \qquad (87)$$

Такая ситуация может возникать, например, в экспериментах по нелинейному преобразованию частоты сигнальной моды /I6/.

Будем считать, что следующее выражение отлично от нуля в интересующем нас интервале времен:

$$F(t) = P^2e^{-t/T} + \frac{2N(\omega_1,\omega_2)}{N}\left(S+f(t)\right) \neq 0. \qquad (88)$$

Производная от $F(t)$ есть

$$F'(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \left(-\frac{P^2}{T}e^{-t/T} + \frac{2N(\omega_1,\omega_2)}{N}\,\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right). \qquad (89)$$

Подставляем приближение (86) в уравнение (83), делим это уравнение на (88), учитывая условие (87), дифференцируем результат по времени и получаем для величины $f(t)$ дифференциальное уравнение 2-го порядка :

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial f(t)}{\partial t}\left(\frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{1}{2T}\right) + \frac{2\lambda^2}{N}F(t)\left(1+N_1+N_2-2Nf(t)\right) = 0 \qquad (90)$$

с начальными условиями:

$$f(t_0)=0,\quad \frac{\partial f(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=0,\quad t_0\to-\infty. \qquad (91)$$

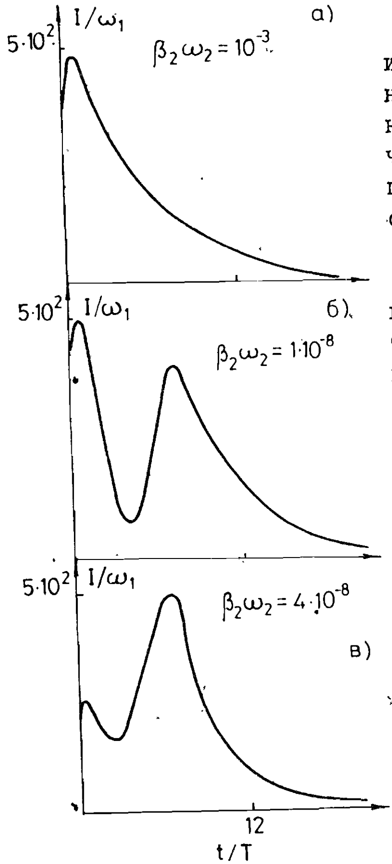
Уравнение (90)-(91) исследовалось численно при следующих значениях входящих в него параметров:

$$T\omega_1=10^8;\ T\omega_2=10^8;\ \beta_1/T=10^{-20};\ T\lambda=0{,}1; \qquad (92)$$
$$T\varepsilon=2\cdot10^8;\ S=0{,}5;\ P=0{,}5;\ N=10^{10}.$$

Варьировалась начальная температура второго поля, т.е. величина β_2. Интенсивность излучения определялась как

$$I(t)=-N\frac{\partial}{\partial t}\langle S^z(t)\rangle=-N\frac{\partial f(t)}{\partial t}, \qquad (93)$$

что корректно в силу законов сохранения (53) и (54).



Как видно из рисунка 2, при $\beta_1\omega_1 \ll \beta_2\omega_2$ интенсивность излучения имеет один пик. По мере уменьшения значения величины $\beta_2\omega_2$ и, следовательно, увеличения числа запасенных в начальный момент времени фотонов второго поля появляется еще один пик интенсивности излучения, величина которого соизмерима с величиной первого пика.

Такое поведение формы импульса излучения объясняется достаточно просто. При низких начальных температурах второго поля влияние этого поля на процесс пренебрежимо мало, максимум интенсивности совпадает с временем достижения наибольшей когерентности системы излучателей по первому полю (рис. 2а). С ростом температуры второго поля число его квантов, запасенных в начальный момент времени, возрастает, соответственно возрастает амплитуда колебаний энергии во втором поле за счет частичной повторной инверсии уже излучивших двухуровневых атомов. Поскольку времена достижения максимальной когерентности излучателей по каждому полю не совпадают, то возникают два соизмеримых по величине пика интенсивности излучения. Соотношение величин этих пиков может быть разным. На рисунках 2б и 2в приведены формы импульсов для $\beta_2\omega_2=10^{-8}$ и $\beta_2\omega_2=4\cdot10^{-8}$ соответственно.

Как было найдено в результате численного решения, при $\beta_1\omega_1\sim\beta_2\omega_2$ остается один пик интенсивности излучения, величина которого намного больше величины пиков при $\beta_1\omega_1<\beta_2\omega_2$, а время задержки импульса значительно возрастает. Однако, как следует из численных значений параметров, приведенных в (92), если $\beta_1\omega_1\sim\beta_2\omega_2$, то величины $N(\omega_1,\omega_2)$ и N становятся сравнимы. Тогда, при некотором t, может случиться, что $F(t)=0$, и приближение (88), в котором было получено исследованное нами дифференциальное уравнение 2-го порядка (90)-(91), может стать несправедливым. В то же время пренебрегать возможностью резонансного возрастания интенсивности при совпадении времен достижения когерентности в обоих полях не следует. Выяснить этот вопрос можно, найдя более совершенный способ исследования интегро-дифференциального уравнения (83).

Таким образом, применение теоремы вместе с законами сохранения, присущими рассмотренной модели, позволило записать кинетическое уравнение более точно, нежели, например, в /6/, и обнаружить два сравнимых по величине максимума интенсивности излучения.

Литература

1. Боголюбов Н.Н. (мл.), Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1982, т. 52, № 3, с. 243-430.
2. Боголюбов Н.Н. (мл.), Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1982, т. 53, № 1, с. 108-113.
3. Bogolubov N.N. (Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. Physica A., 1984, v. 128, No 1-2, p. 82-98.
4. Боголюбов Н.Н. (мл.), Молдояров А.А., Сорокина Е.М., Шумовский А.С. В сб. "Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики", Дубна, 1984, Д17-84-850, т.1, с.127-130.
5. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 2, с. 245-300.
6. Bogolubov N.N. (Jr), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. Physica A., 1985, v. 130, No 1-2, p. 273-291.
7. McNeil K.J., Walls D.F. J. Phys. A., 1975, v.8, No 1, p. 104-110.
8. McNeil K.J., Walls D.F. J. Phys. A., 1975, v. 8, No 1, p. 111-119.

9. Боголюбов Н.Н. (мл.), Молдояров А.А., Шумовский А.С. Препринт ОИЯИ, Д17-85-414, Дубна, 1985.
10. Алискендеров Э.И., Молдояров А.А., Шумовский А.С. Краткие сообщения ОИЯИ, Дубна, 1984, № 10, с. 26-35.
11. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1981, т. 256, № 5, с. 1094-1096.
12. Боголюбов Н.Н. (мл.), Плечко В.Н., Шумовский А.С. ЭЧАЯ, 1983, т. 14, вып. 6, с. 1443-1499.
13. Ахманов С.А., Коротеев Н.И. УФН, 1977, т. 123, вып. 3, с. 405-471.
14. Бломберген Н. Нелинейная спектроскопия. М.: "Мир", 1979.
15. Gross M., Haroche S. Phys. Rev., 1982, v. 93, No 5, p. 301-396.
16. Соломатин В.С., Мелешко А.Н. Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 7(85), с. 1528-1530.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1986 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	3 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамп, п/я 79.

Бакасов А.А. и др. P17-86-74

Кинетика двухфотонного излучения в случае затухающей поляризации

На случай произвольного адиабатически включающегося взаимодействия обобщена известная лемма Боголюбова о соотношениях между средними, содержащими вакуумные бозоны. Показано, что небозонный оператор, входящий в такие средние, произволен и может, в часности, быть как явно зависящим от времени, так и многовременным. Рассмотрена кинетика двухбозонного излучения в двухуровневой системе. Построена точная иерархия кинетических уравнений, в которую формально не входят динамические бозе-поля. Найдено, что интенсивность излучения может иметь два соизмеримых максимума, не обусловленных процессами переполяризации.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской.

Bakasov A.A. et al. P17-86-74

Two-Photon Radiation Kinetics for the Damping Polarization

The well-known Bogolubov' lemma on the relations between averages containing vacuum bosons is generalized to an arbitrary adiabatically switching on interaction. It is shown that a nonboson operator entering into these averages is arbitrary and may be both time dependent explicitly and have a many-time form. The kinetics of the two-boson radiation in a two-level system is considered. An exact hierarchy of kinetic equations is constructed that does not formally include dynamic bose-fields. It is found that the radiation intensity may have two commensurate maxima are not generated by repolarization processes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986