

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P17-86-698

И.В.Барашенков, Х.Т.Холмуродов*

**БОЗЕ-ГАЗ С ПАРНЫМ
И ТРЕХЧАСТИЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ:
ЭВОЛЮЦИЯ НЕСТАБИЛЬНЫХ "ПУЗЫРЬКОВ"**

* Таджикский государственный университет
им. В.И.Ленина, Душанбе

1986

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе ^{/1/} задача о системе бозонов с δ -образными двухчастичным притяжением и трехчастичным отталкиванием была сведена в приближении самосогласованного поля к так называемому ψ^3 - ψ^5 нелинейному уравнению Шредингера,

$$i\psi_t + \psi_{xx} \pm \psi + \psi|\psi|^2 - a\psi|\psi|^4 = 0 \quad (1^\pm)$$

(a -вещественный параметр, $a > 0$). Помимо указанного, уравнение (1) имеет целый ряд других приложений. Оно возникает при описании распространения световых пучков в среде с насыщением нелинейности ^{/2/}; в квазиклассическом пределе к нему сводится ядерная гидродинамика с силами Скирма ^{/3/}. Ряд эффектов в теории магнетизма ^{/4/}, молекулярных кристаллов ^{/5/} и др. также может быть описан в рамках ψ^3 - ψ^5 нелинейного уравнения Шредингера. Таким образом, уравнение (1) принадлежит к числу универсальных уравнений нелинейной физики. Предмет рассмотрения настоящей заметки составляют его солитоноподобные решения.

Иногда ψ^3 - ψ^5 нелинейное уравнение Шредингера записывают в виде

$$i\tilde{\psi}_t + \tilde{\psi}_{xx} - \tilde{a}\tilde{\psi} + \tilde{\psi}|\tilde{\psi}|^2 - \tilde{\psi}|\tilde{\psi}|^4 = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{\psi} = \sqrt{a}\psi$; $\tilde{a} = -a$ в случае уравнения (1⁺) и $\tilde{a} = a$ в случае уравнения (1⁻). Мы, однако, будем пользоваться другой формой

$$i\phi_t + \phi_{xx} - \rho_0(2A + \rho_0)\phi + 2(A + 2\rho_0)|\phi|^2\phi - 3|\phi|^4\phi = 0, \quad (3)$$

где ϕ и A/ρ_0 связаны с $\tilde{\psi}$ и \tilde{a} :

$$\phi(x, t) = b\tilde{\psi}(\sqrt{3}b^2x, 3b^4t), \quad b^2 = \frac{2}{3}(A + 2\rho_0),$$

$$\frac{A}{\rho_0} = -2 + \frac{3}{4\tilde{a}}(1 - \sqrt{1 - 4\tilde{a}}), \quad \rho_0 > 0$$

(в терминах ϕ интересующее нас решение ψ^3 - ψ^5 нелинейного уравнения Шредингера приобретает наиболее простой вид). Отметим также два интеграла уравнения (3), которые потребуются нам, ниже. Сохраняющееся число частиц дается формулой

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} (|\phi|^2 - \rho_0) dx, \quad (4)$$

а энергия выглядит следующим образом:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \{ |\phi_x|^2 + (|\phi|^2 - \rho_0)^2 (|\phi|^2 - A) \} dx. \quad (5)$$

Мы будем рассматривать уравнение (3) при граничных условиях вида

$$\phi(x, t) \rightarrow \phi^{\pm} = \text{const}, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad (6)$$

где $|\phi^{\pm}|^2 = \rho_0$. С точки зрения задачи о бозе-газе такая постановка соответствует исследованию нелинейных возмущений в конденсате постоянной плотности ρ_0 . В работе^{6/} было получено точное солитоноподобное решение уравнения (3):

$$\phi_s = \sqrt{2\rho_0} \frac{\text{ch}(\tilde{x} - i\mu)}{[(2\rho_0 - A) / \sqrt{A^2 + v^2} + \text{ch} 2\tilde{x}]^{1/2}}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2} (x - vt - x_0), \quad \cos 2\mu = \frac{A\rho_0 + v^2/2}{\rho_0 \sqrt{A^2 + v^2}}, \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2},$$

а через c обозначена скорость звука в среде,

$$c^2 = 4\rho_0(\rho_0 - A).$$

При этом на бесконечности имеет место $\phi^{\pm} = e^{\mp i\mu} \sqrt{\rho_0}$.

Решение (7) описывает уединенную волну разряжения, распространяющуюся по конденсату с постоянной скоростью $v < c$. При $A < 0$ покоящийся ($v = 0$) солитон (7) имеет форму кинка (в этом случае $\mu = \pi/2$, и справедливо $\phi^+ = -\phi^-$), а в области $0 < A < \rho_0$ выполняется $\mu = 0$ и $\phi^+ = \phi^-$ (рис. 1). Несложно понять, что в этой последней области благодаря совпадению асимптотик у решения (7) существуют естественные многомерные аналоги (имеющие форму пузырьков). Имея в виду перейти в дальнейшем к рассмотрению трехмерной ситуации, в настоящей заметке мы ограничиваемся именно случаем $0 < A < \rho_0$. При этом из соображений наглядности мы будем называть солитон (7) "пузырьком" (учитывая, разумеется, всю условность подобной аналогии).

Размер "пузырька" λ_s можно условно определить, например, как расстояние между точками перегиба функции $|\phi_s(x, t)|^2$. Из уравне-

ния $\partial^2(|\phi_s|^2) / \partial x^2 = 0$ находим

$$\text{ch} \left(\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2} \lambda_s \right) = \xi + (\xi^2 + 2)^{1/2}, \quad \xi = \frac{2\rho_0 - A}{2\sqrt{A^2 + v^2}}. \quad (8)$$

В работе^{7/} было показано, что при $0 < A < \rho_0$ покоящийся солитон (7) неустойчив по отношению к малым возмущениям. Настоящая работа преследует две цели. Во-первых, мы рассматриваем устойчивость солитона при ненулевой скорости v , а во-вторых, при тех v , когда последний нестабилен, исследуем временную эволюцию неустойчивости. Все результаты получены с помощью непосредственного численного моделирования.

2. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для численного исследования уравнения (3) была использована явная разностная схема типа "leap frog". На равномерной сетке

$$\omega = \omega_r \times \omega_h,$$

$$\omega_r = \{t_n : t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad \tau = T/N\},$$

$$\omega_h = \{x_m : x_m = -L + mh, \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad h = 2L/M\}$$

дифференциальное уравнение (3) аппроксимировалась разностным:

$$i \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^{n-1}}{2\tau} + \frac{\phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n}{h^2} - (2A + \rho_0)\rho_0 \phi_m^n + 2(A + 2\rho_0)|\phi_m^n|^2 \phi_m^n - 3|\phi_m^n|^4 \phi_m^n = 0. \quad (9)$$

Шаги по времени и координате x выбирались так, чтобы удовлетворить условию устойчивости схемы (9)^{8/}: $\tau \leq h^2/4$. Значение ρ_0 было выбрано равным 1 (поскольку решения (3) с одинаковым отношением A/ρ_0 подобны, это не нарушает общности). Для контроля точности вычислялось значение интеграла (5) и проверялось его сохранение.

2.1. Эволюция покоящегося солитона

На первом этапе исследования моделировалась эволюция начального условия в виде покоящегося ($v = 0$) "пузырька" (7) (рис. 1). При этом мы не вносили в систему никаких специальных возмущений; роль возмущений играли естественные погрешности аппроксимации непрерывной задачи (3) разностным уравнением (9).

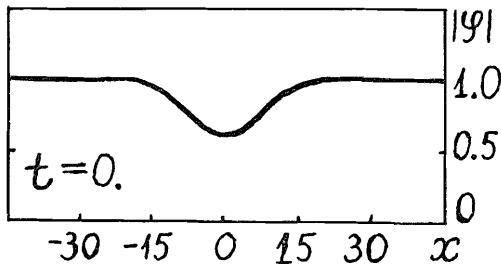
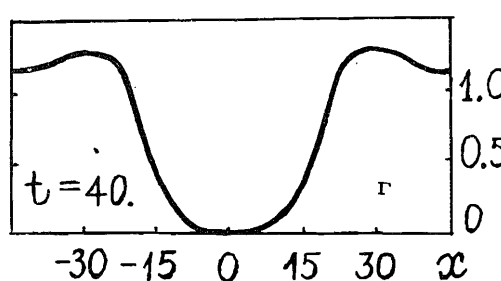
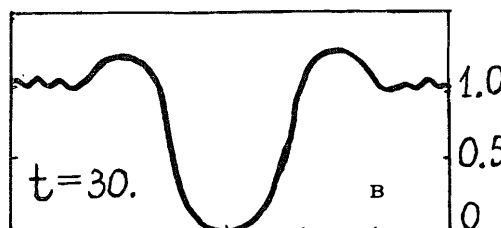
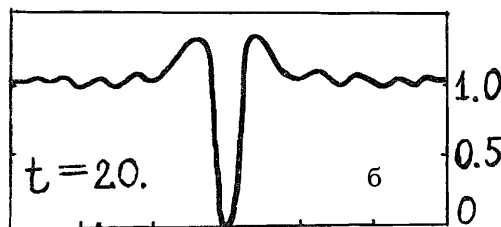
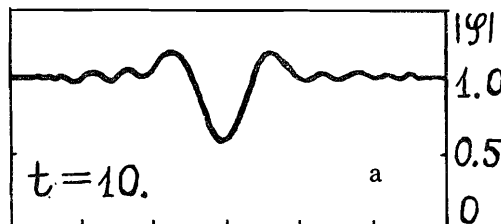


Рис. 1. "Пузырек" (7) при $v = 0$.



Во всех рассмотренных случаях ($A = 0.2$; $A = 0.5$ и $A = 0.8$) картина развития неустойчивости была качественно одинаковой. Вначале ширина солитона уменьшалась, а амплитуда $1 - \phi|_{x=0}$ увеличивалась (рис. 2а,б). (Имея в виду упоминавшуюся аналогию с пузырьком в жидкости, можно представлять амплитуду как степень разряжения конденсата внутри "пузырька"). После того, как плотность конденсата в центре "пузырька" достигала нуля (рис. 2б), последний входил в режим неограниченного расширения (рис. 2в,г). При этом внутри "пузырька" плотность конденсата оставалась равной нулю, а за счет частиц, вытесненных из него, снаружи возникала область повышенной плотности (так что суммарное число частиц (4) сохранялось). По мере расширения "пузырька", как размеры этой области, так и максимальное значение плотности конденсата в ней непрерывно увеличивалась (рис. 2в,г).

Второй этап исследования заключался в следующем. В^{7/} вопрос об устойчивости солитона (7) при $v = 0$ к малым возмущениям $\delta\phi(x) = \epsilon[f(x) + ig(x)]$ (здесь $\epsilon \ll 1$, $f = f^*$, $g = g^*$, $\|f\| = \|g\| = 1$) был

Рис. 2. Эволюция начального условия в виде покоящегося солитона (7). В качестве возмущений используются погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным.

в линейном приближении сведен к задаче на собственные значения для системы двух операторов типа Шредингера. Там же^{7/} для девяти эквидистантных значений параметра A из интервала $(0,1)$ (т.е. для $A = 0.1; 0.2; \dots, 0.9$) было численно найдено вещественное собственное значение (т.е. инкремент неустойчивости) и соответствующая собственная вектор-функция $\vec{Y}(x) = \{f(x), g(x)\} / f(x), g(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$; отметим также, что $g(x)$ не имеет нулей в интервале $(-\infty, +\infty)$. Значения собственной функции $\vec{Y}(x)$, нормированной условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f^2(x) + g^2(x)] dx = 1,$$

табулированы в^{7/} при различных A . При этом знак $\vec{Y}(x)$ фиксирован требованием положительности $g(x)$. Мы воспользовались этими результатами, чтобы выбрать начальное условие для уравнения (3) в виде

$$\phi(x, 0) = \phi_s(x) + \epsilon[f(x) + ig(x)], \quad (10)$$

где $\phi_s(x)$ дается формулой (7) при $v=0$, а ϵ — малый параметр.

При выборе $\epsilon = -0.1$ эволюция возмущенного "пузырька" совпадала с описанной выше (рис.2). Естественное различие заключалось в том, что на первом этапе, при выборе $\phi(x, 0) = \phi_s(x)$ для проявления неустойчивости требовалось определенное время (необходимое для образования соответствующего возмущения), тогда как при выборе начального условия в виде (10) деформация солитона начиналась непосредственно в момент $t = 0$.

При выборе $\epsilon = +0.1$ неустойчивость развивалась в ином направлении (рис.3) — покоящийся "пузырек"

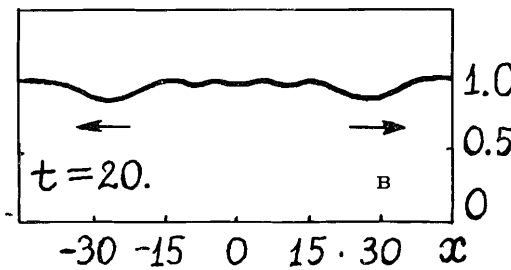
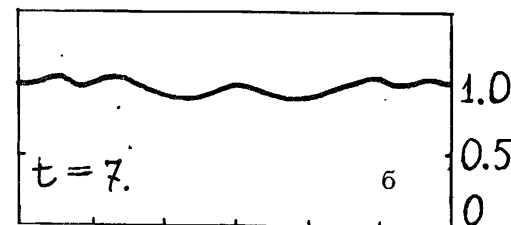
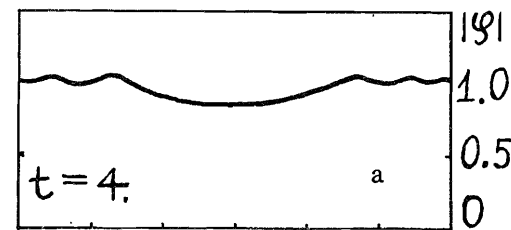


Рис. 3. Эволюция покоящегося солитона при специальном выборе возмущения (начальное условие выбрано в виде (10) при $\epsilon = +0.1$).

распадался на два разбегающихся солитона малой амплитуды (при $A = 0.5$ скорость этих солитонов составляла $0.8c$), а также быстро-затухающий линейный фон.

В заключение отметим, что расчеты, описанные в разделе 2.1, проводились при выборе интервала интегрирования $(-L, L) = (-40, 40)$; $h = 0.2$, $\tau = 0.004$. Точность сохранения интеграла (5) во всех вариантах была не хуже 2%.

2.2 Область устойчивости движущегося "пузырька"

Как отмечалось в ^{7/}, из неустойчивости солитона (7) при $v = 0$ еще не следует его неустойчивость в общем случае. Дело в том, что несмотря на галилееву инвариантность уравнения (3), решение (7) при $v \neq 0$ невозможно привести в систему покоя галилеевым бустом, не нарушая при этом граничные условия (6). Задача об устойчивости решения должна решаться независимо при каждом значении скорости. Ниже излагаются результаты численных экспериментов, в которых изучалась эволюция начального условия в виде движущегося солитона (7).

Расчеты были выполнены для трех значений A из промежутка $(0,1)$: $A = 0.2$, $A = 0.5$ и $A = 0.8$. Шаг по координате был взят равным $h = 0.4$, шаг по времени $\tau = 0.0075$, интервал интегрирования $(-70, 70)$. Начальное положение солитона выбиралось равным $x_0 = -20$. При малых скоростях v солитон по-прежнему оказывался неустойчивым, однако при каждом рассмотренном значении A инкремент неустойчивости уменьшался с ростом v (т.е. росло время, необходимое для распада "пузырька"). Наконец, при скоростях, больших некоторой скорости $v = \tilde{v}$, солитон успевал преодолеть интервал интегрирования без каких-либо видимых изменений. Отметим, что в тех случаях, когда решение оказывалось неустойчивым, картина распада совпадала с изображенной на рис. 2.

Результаты расчетов собраны в таблице. Здесь \tilde{v} — максимальная скорость, при которой еще наблюдался распад солитона; \tilde{t} — время, за которое его амплитуда /равная, по определению, $\max_x \{1 - |\phi(x)|\}$ / увеличивалась при этой скорости на 10%. Это время мы условно

A	\tilde{v}/c	\tilde{t}	$q = \tilde{v}\tilde{t}/\tilde{\lambda}_s$	$\tilde{\delta}$
0.2	0.20	66	9.2	$4 \cdot 10^{-3}$ %
0.5	0.35	88	15.4	$9 \cdot 10^{-2}$ %
0.8	0.45	163	18.2	$8 \cdot 10^{-2}$ %

принимая за время жизни "пузырька" — при $t > \tilde{t}$ неустойчивость развивалась чрезвычайно быстро. Далее, q есть отношение времени жизни \tilde{t} к времени $\tilde{\lambda}_s/\tilde{v}$, за которое солитон проходит расстояние, равное собственной ширине (вычисленной по формуле (8)). Наконец, через $\tilde{\delta}$ обозначено относительное изменение интеграла (5) за время \tilde{t} , т.е. $\tilde{\delta} = 100\% \cdot [N(\tilde{t}) - N(0)]/N(0)$.

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе ^{6/} было показано, что для околосвуковых волн малой амплитуды уравнение (3) сводится к уравнению Кортевега-де Фриза, причем решение (7) переходит в солитон КдФ. Хорошо известно, что последний устойчив. Естественно поэтому предположить, что и солитон (7) является устойчивым при скоростях, близких к c . По-видимому, существует некоторая критическая скорость v_{cr} — такая, что "пузырек" стабилен при $v_{cr} \leq v \leq c$ и разрушается при $v < v_{cr}$. В разделе 2.2 представлены дополнительные аргументы в пользу этой гипотезы, а для критической скорости получена оценка снизу: $v_{cr} > \tilde{v}$. Разумеется, ввиду конечности интервала интегрирования результаты численных экспериментов нельзя воспринимать как доказательство существования v_{cr} . Наверняка можно утверждать лишь то, что инкремент неустойчивости уменьшается с ростом скорости, и при $v > \tilde{v}$ солитон (7) представляет собой объект если не стабильный, то во всяком случае живущий достаточно долго по сравнению с характерным временем λ_s/v .

Авторы глубоко благодарны В.Г.Маханькову, беседы с которым в значительной степени стимулировали наш интерес к предмету. Мы также признательны А.С.Ковалеву, С.А.Сергеенкову и В.А.Осипову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев А.С., Косевич А.М. ФНТ, 2, 7 (1976), с.913.
2. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. ЖЭТФ, 60, 1 (1971), с.136.
3. Картавенко В.Г. ЯФ, 40, 2 (1984), с.377.
4. Pushkarov Kh.I., Primatarova M.T. phys. stat. sol. (b) 123 (1984), p.573.
5. Pushkarov Kh.I., Primatarova M.T. phys. stat. sol. (b) 133 (1986), p.253.
6. Barashenkov I.V., Makhankov V.G. JINR, E2-84-173, Dubna, 1984.
7. Barashenkov I.V., Gocheva A.D., Makhankov V.G. and Puzynin I.V. JINR, E17-85-967, Dubna, 1985.
8. Ablowitz M.J., Taha T.R. Clarkson College of Technology I.F.N.S. preprint No.15, Potsdam, N.Y., 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 октября 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Барашенков И.В., Холмуродов Х.Т.

P17-86-698

Бозе-газ с парным и трехчастичным взаимодействием:
эволюция нестабильных "пузырьков"

В приближении среднего поля система бозонов с δ -образными двухчастичным притяжением и трехчастичным отталкиванием описывается ψ^3 - ψ^5 нелинейным уравнением Шредингера,

$$i\psi_t + \psi_{xx} \pm \psi + \psi|\psi|^2 - a\psi|\psi|^4 = 0, \quad a > 0.$$

В настоящей работе в рамках этого уравнения численно моделируется эволюция солитоподобного решения типа "пузырька в конденсате". Показано, что в зависимости от выбора начального возмущения покоящийся солитон либо распадается, либо входит в режим неограниченного роста. Что касается движущегося решения, то инкремент неустойчивости падает с увеличением скорости, и при больших скоростях солитон представляет собой достаточно долгоживущий объект.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Barashenkov I.V., Kholmurodov Kh.T.

P17-86-698

Bose-Gas with Two- and Three-Body Interactions:
Evolution of the Unstable "Bubbles"

In the mean-field approximation the boson system with two-body attractive and three-body repulsive δ -function interactions reduces to the ψ^3 - ψ^5 nonlinear Schrödinger equation:

$$i\psi_t + \psi_{xx} \pm \psi + \psi|\psi|^2 - a\psi|\psi|^4 = 0, \quad a > 0.$$

We have simulated numerically the evolution of the soliton-like "bubble in the condensate" solution to this equation, and here the results are reported. The static soliton is found either to decay or to grow without bounds depending on the choice of initial perturbation. As regards the travelling "bubble", the growth rate diminishes under velocity increase, and at high speeds the soliton represents a rather long-lived object.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986