объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-86-614

Е.А.Кочетов

МНОГОФОТОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в "Journal of Physics A"

1986

В последние IO лет активный и все возрастающий интерес проявляется к исследованию трехуровневых систем, взаимодействующих с резонансным полем излучения /I-7/. Квазиклассический подход к описанию такого рода систем развивается, например, в /4,5/. В другой серии работ /6,7/ найдены точные решения уравнения Гейзенберга для динамических переменных типа оператора заселенности уровней и числа фотонов. В настоящей работе дано точное решение задачи о взаимодействии трехуровнего атома с двухмодовым полем излучения, причем это взаимодействие реализуется через механизм многофотонных переходов. Используемый здесь метод построения полной системы собственных векторов и уровней энергии системы аналогичен предложенному в /8/ для описания системы: двухуровневый атом + излучение.

Рассмотрим трехуровневый атом с двумя разрешенными переходами I⟷3 и 2⟷3, взаимодействующий с двухмодовым полем излучения a, b:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{3} \Omega_j R_{jj} + \omega_1 a^+ a + \omega_2 b^+ b + \lambda_1 \left(a^{l_1} b^{k_1} R_{31} + (a^+)^{l_1} (b^+)^{k_1} R_{13} \right) + \lambda_2 \left(b^{k_2} a^{l_2} R_{32} + (b^+)^{k_2} (a^+)^{l_2} R_{23} \right). \qquad (I)$$

Здесь операторы $R_{ij} = |i\rangle\langle j|$ описывают населенности уровней (при $i = j$) и дипольные переходы (при $i \neq j$). Вектор $|i\rangle$ есть i -ое собственное состояние одиночного атома: $R_{jj}|i\rangle = \delta_{ij}|i\rangle$. Нетрудно убедиться, что

$$[R_{ij}, R_{kl}] = R_{il}\delta_{jk} - R_{kj}\delta_{il}.$$

іераторы $a^+(a), b^+(b)$ описывают рождение (уничтожение) бозонных возждений с энергией соответственно ω_1 , ω_2 : $[a, a^+] = [b, b^+] = I$, $[a, b] = [a^+, b^+] = 0$.

Физический смысл взаимодействия вида (I) состоит в том, что кажій переход системы с уровня на уровень сопровождается испусканием іи поглощением фиксированного и зависящего от типа перехода набора іантов полей a и b . Например, переход атома с 1-го уровня на ·й , описываемый оператором R_{31} , сопровождается испусканием l_1 , іантов поля a и k_1 , квантов поля b . Сохранение в системе (I) ірядов $\hat{N} = a^+a - l_1 R_{11} - l_2 R_{22}$ и $\hat{M} = b^+b - k_1 R_{11} - k_2 R_{22}$ позволя- представить пространство состояний системы в виде $\sum \oplus \mathcal{H}_{NM}$, где аждое подпространство $\mathcal{H}_{NM}$, отвечающее совместным значениям за-

рядов N и M , порождается базисом

$$|\Phi_m^{N,M}\rangle = |N + l_1\delta_{m1} + l_2\delta_{m2}\rangle\, |M + k_1\delta_{m1} + k_2\delta_{m2}\rangle\, |m\rangle, \qquad (2)$$

где

$$a^+a|N+\ldots\rangle = (N+\ldots)|N+\ldots\rangle, \quad b^+b|M+\ldots\rangle = (M+\ldots)|M+\ldots\rangle,$$

а

$$R_{ii}|m\rangle = \delta_{im}|m\rangle, \quad i, m = 1, 2, 3.$$

Легко увидеть, что возможные совместные собственные значения зарядов N и M образуют совокупности:

$$\{n - l_1,\ p - k_1;\ n, p \geqslant 0\} \qquad \{n - l_2,\ p - k_2;\ n, p \geqslant 0\},$$

в связи с чем необходимо отдельно рассмотреть четыре случая: I) $l_1 \geqslant l_2$, $k_1 \geqslant k_2$; 2) $l_1 \geqslant l_2$, $k_2 \geqslant k_1$; 3) $l_2 \geqslant l_1$, $k_2 \geqslant k_1$; 4) $l_2 \geqslant l_1$, $k_1 \geqslant k_2$.

I) Пусть сначала $l_1 \geqslant l_2$, $k_1 \geqslant k_2$. Тогда совместные собственные значения операторов $\hat{N}$ и $\hat{M}$ пробегают последовательность $(n - l_1, p - k_1)$ и разложение решения уравнения Шредингера $|\Psi^{NM}\rangle$ с гамильтонианом (I) по функциям (2) с $N = n - l_1$, и $M = p - k_1$ выглядит как

$$|\Psi^{NM}\rangle = (1 + c_1^2 + c_2^2)^{-1/2} \big(|n\rangle|p\rangle|1\rangle + c_1|n - l_1 + l_2\rangle|p - k_1 + k_2\rangle|2\rangle + c_2|n - l_1\rangle|p - k_1\rangle|3\rangle \big), \quad n \geqslant l_1, \quad p \geqslant k_1 \qquad (3)$$

$$|\Psi^{NM}\rangle = (1 + c^2)^{-1/2} \big(|n\rangle|p\rangle|1\rangle + c|n - l_1 + l_2\rangle|p - k_1 + k_2\rangle|2\rangle \big)$$
$$l_1 - l_2 \leqslant n < l_1, \ p \geqslant k_1 - k_2; \quad n \geqslant l_1, \ k_1 - k_2 \leqslant p < k_1$$

$$|\Psi^{NM}\rangle = |n\rangle|p\rangle|1\rangle, \quad 0 \leqslant n < l_1 - l_2, \ p \geqslant 0;$$
$$n \geqslant l_1 - l_2, \ 0 \leqslant p < k_1 - k_2.$$

Подстановка (3) в уравнение

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = \mathcal{E}|\Psi\rangle \qquad (4)$$

дает $\left(|\Psi^{N = n - l_1,\ M = p - k_1}\rangle \equiv |\Psi_{np}\rangle \right)$:

i) для $n \geqslant l_1$, $p \geqslant k_1$,

$$|\Psi^{\pm}_{np}\rangle = (\lambda_1^2 a_{np}^2 + \lambda_2^2 b_{np}^2 + u_{\pm}^2)^{-1/2} (\lambda_1 a_{np} |n\rangle |p\rangle |1\rangle + \lambda_2 b_{np} |n-l_1+l_2\rangle \quad (5)$$
$$|p-k_1+k_2\rangle |2\rangle + u_{\pm} |n-l_1\rangle |p-k_1\rangle |3\rangle)$$

$$\mathcal{E}^{\pm}_{np} = \omega_1(n-l_1) + \omega_2(p-k_1) + \Omega_3 + \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \lambda_1^2 a_{np}^2 + \lambda_2^2 b_{np}^2}, \quad (6)$$

здесь

$$u_{\pm} = -\frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \lambda_1^2 a_{np}^2 + \lambda_2^2 b_{np}^2} \quad (7)$$

$$a_{np}^2 = \frac{n!\,p!}{(n-l_1)!\,(p-k_1)!}, \qquad b_{np}^2 = \frac{(n-l_1+l_2)!\,(p-k_1+k_2)!}{(n-l_1)!\,(p-k_1)!}$$

и использовано так называемое резонансное условие:

$$\Omega_1 - \Omega_3 + \omega_1 l_1 + \omega_2 k_1 = \Omega_2 - \Omega_3 + \omega_1 l_2 + \omega_2 k_2 = \Delta.$$

Кроме того, при $n \geq l_1$, $p \geq k_1$ решением уравнения (4) является также

$$|\Psi_{np}\rangle = (\lambda_1^2 a_{np}^2 + \lambda_2^2 b_{np}^2)^{-1/2} (\lambda_2 b_{np} |n\rangle |p\rangle |1\rangle - \lambda_1 a_{np} |n-l_1+l_2\rangle \quad (8)$$
$$|p-k_1+k_2\rangle |2\rangle),$$

$$\mathcal{E}_{np} = \omega_1 n + \omega_2 p + \Omega_1 = \omega_1(n-l_1+l_2) + \omega_2(p-k_1+k_2) + \Omega_2. \quad (9)$$

ii) если $l_1 - l_2 \leq n < l_1$, $p \geq k_1 - k_2$
или $n \geq l_1$, $k_1 - k_2 \leq p < k_1$

$$|\Psi^{(1)}_{np}\rangle = |n\rangle |p\rangle |1\rangle, \qquad |\Psi^{(2)}_{np}\rangle = |n-l_1+l_2\rangle |p-k_1+k_2\rangle |2\rangle \quad (10)$$

$$\mathcal{E}_{np} = \omega_1 n + \omega_2 p + \Omega_1. \quad (11)$$

Отметим, что уровни энергии (11) вследствие условия (7) двукратно вырождены, что свидетельствует о существовании дополнительного, независимого от $\mathcal{H}$, $\hat{N}$ и $\hat{M}$ интеграла движения, который может быть представлен, например, в виде

$$\hat{\mathcal{P}} = \sum_{ii)} |\Psi^{(1)}_{np}\rangle\langle\Psi^{(1)}_{np}| - \sum_{ii)} |\Psi^{(2)}_{np}\rangle\langle\Psi^{(2)}_{np}|,$$

iii) и, наконец, в областях $0 \leq n < l_1 - l_2$, $p \geq 0$
и $n \geq l_1 - l_2$, $0 \leq p < k_1 - k_2$.

$$|\Psi_{np}\rangle = |n\rangle |p\rangle |1\rangle, \quad \mathcal{E}_{np} = \omega_1 n + \omega_2 p + \Omega_1. \quad (12)$$

Нетрудно увидеть, что полученные выше собственные функции задачи (1) при $l_1 \geq l_2$ и $k_1 \geq k_2$ образуют полную ортонормированную систему.

Рассмотрим теперь второй вариант: $l_1 \geq l_2$, $k_2 \geq k_1$.
Обозначая $|\Psi^{N=n-l_1, M=p-k_1}\rangle \equiv |\Psi_{np}\rangle$ и
$|\Psi^{N=n-l_2, M=p-k_2}\rangle \equiv |\tilde{\Psi}_{np}\rangle$, получим, что:

i) для $n \geq l_1$, $p \geq k_1$ решение дается формулами (5)-(9);

ii) для каждых n и p из областей $l_1 - l_2 \leq n < l_1$, $p \geq 0$ и $n \geq l_1$, $0 \leq p < k_1$ уровни энергии системы $\mathcal{E}_{np} = \Omega_1 + \omega_1 n + \omega_2 p$ двукратно вырождены: каждому уровню соответствует две линейно-независимых собственных функции (10).

iii) и, наконец, в области $0 \leq n < l_1 - l_2$, $p \geq 0$ решение дается формулами (12), а в области $n \geq 0$, $0 \leq p < k_2 - k_1$

$$|\tilde{\Psi}_{np}\rangle = |n\rangle |p\rangle |2\rangle, \qquad \tilde{\mathcal{E}}_{np} = \omega_1 n + \omega_2 p + \Omega_2.$$

Приведенные выше собственные функции образуют полную ортонормированную систему. Если положить $k_1 = l_2 = 0$, $\Delta = 0$ в формулах, описывающих систему при $l_1 \geq l_2$, $k_2 \geq k_1$, получаются выражения для уровней энергии и собственных функций, приведенные в работе /9/. Отметим, однако, что множества, описанные в пункте ii) при $k_1 = l_2 = 0$ пусты, и характерного для системы при произвольных l_1, l_2, k_1, k_2 вырождения в этом частном случае нет. Оставшиеся вне рассмотрения варианты 3) $l_2 \geq l_1$, $k_2 \geq k_1$ и 4) $l_2 \geq l_1$, $k_1 \geq k_2$ получаются соответственно из 1), 2) заменой $l_1 \leftrightarrow l_2$, $k_1 \leftrightarrow k_2$, $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$, $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2$ с последующим преобразованием $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ $|3\rangle \longrightarrow |3\rangle$, которое осуществляется унитарным оператором

$$\hat{R} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| = R_{12} + R_{21} + R_{33}.$$

Таким образом, при произвольных l_1, l_2, k_1, k_2 мы описали полную систему решений уравнения (4) с гамильтонианом (1). Существенно при этом, что разложения (3), отражая свойства симметрии, позволяют свести решение уравнения Шредингера в бесконечно-мерном пространстве к решению счетного набора не связанных между собой конечных систем алгебраических уравнений.

Литература

1. M.Tan-no,K.Yokoto,H.Inaba,J.Phys.B8.(1975),339.
2. C.M.Bowden,C.R.Stroud,Phys.Rev.A18,(1978),1588.
3. T.W.Mossberg,S.R.Hartmann,Phys.,A23,(1981),1271.
4. J.N.Elgin,Phys.Lett.,8A,(1980),140.
5. H.I.Yoo,J.H.Eberly,Phys.Rept.,118,(1985),239.
6. N.N.Bogolubov (Jr.),Fam Le Kien,A.S.Shymovsky, Phys.Lett.101A,(1984),201,Phys.Lett.107A,(1985),173.
7. N.N.Bogolubov (jr.),Fam Le Kien, A.S.Shymovsky, J.Phys.A19,(1986),191.
8. E.A.Kochetov,Preprint JINR E-17-85-945,(1985),Dubha.
9. E.I.Aliskenderov,Fam Le Kien,Nguyen Dinh Vinh,A.S.Shymovsky, J.Phys.,A19,(1986).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 сентября 1986 года.

Кочетов Е.А. Р17-86-614

Многофотонные переходы в трехуровневых системах

Найдено точное решение задачи о взаимодействии трехуровневого атома с двухмодовым полем скалярных фотонов, операторы рождения и уничтожения которых входят в гамильтониан взаимодействия нелинейным образом. Инвариантность гамильтониана относительно совместных фазовых преобразований операторов бозе-полей и операторов дипольных атомных переходов приводит к сохранению зарядов системы, что, в свою очередь, позволяет искать точный вектор состояния в виде разложения по собственным функциям этих зарядов. Отметим, что в резонансном случае, в отличие от других, менее общих задач такого типа, некоторые уровни энергии рассматриваемой системы оказываются двукратно вырожденными, что свидетельствует о существовании в системе дополнительного интеграла движения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Kochetov E.A. P17-86-614

Multiphoton Transitions in Three-Level Systems

An exact solution is found to the problem of interaction of a three-level atom with a two-mode field of scalar photons, the operators of creation and annihilation of quants of these fields being a nonlinear form in the interaction Hamiltonian. In the resonant case some energy levels of the system under consideration are doubly degenerated, which testifies to the existence of an extra constant of motion.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986